

磁共振无线输电：两个谐振电路如何“隔空握手”

第 43 届决赛短训讲义组

2026 年 10 月

目录

1 导读	2
2 名词与符号	4
3 前置模块 I：自感、互感与诺依曼公式	5
3.1 自感、互感与磁能	5
3.2 矢势与诺依曼公式	6
3.3 两同轴圆环的互感	8
3.4 圆环与多匝线圈的自感	10
4 前置模块 II：谐振电路与损耗	11
4.1 复振幅与复阻抗	11
4.2 串联谐振与品质因数	12
4.3 损耗从哪里来 (1)：趋肤效应与交流电阻	13
4.4 损耗从哪里来 (2)：辐射电阻	15
5 两个耦合谐振回路：效率由什么决定	17
5.1 电路方程与反射阻抗	17
5.2 谐振时的效率与最优负载	18
5.3 为什么必须谐振	20
5.4 最大效率与最大功率不是一回事	20
6 频率分裂、临界耦合与耦合模理论	20
6.1 无损耦合振子的简正模	21
6.2 有损耗时的传输谱：临界耦合	22
6.3 耦合模方程：两谐振器之间的能量交换	23

1 导读	2
7 距离、安全与多线圈	26
7.1 效率随距离的骤降与“中程”的含义	26
7.2 为什么是“磁”共振：近场中的电场与磁场	26
7.3 中继线圈	29
8 决赛风格例题	30
9 实验与数据处理：由频率分裂测耦合系数	39
10 小结：推导链	44
A 同轴圆环互感的精确式与两个极限	46
A.1 化为完全椭圆积分	46
A.2 远场展开的核对	47
A.3 近距离极限	47
B 效率的一般公式	47
C 磁偶极辐射功率	48
D 线圈附近导电组织的涡流电阻	49
E 加权最小二乘	50

1 导读

把手机放在充电板上，它就开始充电；电动汽车停在车位上，地面线圈就能隔着十几厘米的空气给车充电；植入人体的器件可以隔着皮肤接收能量。这些“无线输电”装置的核心都是同一个物理系统：两个通过互感耦合的线圈。只靠普通的互感（变压器原理），线圈稍一分开，效率就急剧下降；如果让两个线圈都工作在谐振状态，并且损耗足够小，就能在几倍线圈尺寸的距离上高效传输能量。本讲从互感和谐振电路出发，推出决定效率的唯一参数 $U = k\sqrt{Q_1Q_2}$ (k 为耦合系数, Q 为品质因数)，再讨论强耦合下传输谱的频率分裂、两个谐振器之间能量的来回交换，以及距离、安全性和中继线圈等实际问题。

背景：Tesla 的设想

19 世纪末、20 世纪初，在电网尚未普及时，特斯拉 (Nikola Tesla) 投入大量精力研究无线输电。1901 年他在纽约长岛开始建造约 57 m 高的沃登克里弗塔 (Wardenclyffe Tower), J. P. Morgan 最初为此投资 15 万美元。该塔打算用于跨大西洋的无线通信，特斯拉也希望用它实现无线输电。此后追加资金落空，工程未能完成，塔于 1917 年被拆除 [1]。特斯拉 1902 年 1 月提交、1914 年 12 月获批的美国专利 1,119,732 号《输送电能的装置》是这一时期的代表 [2]。Kurs 等

人指出，这类方案（例如特斯拉线圈）伴随着很强的电场，并不适合日常使用 [3]。

背景：2007：两米外点亮 60 W 灯泡

2007 年，麻省理工学院 Soljačić 小组的 Kurs 等人在 *Science* 上报道了“强耦合磁谐振”无线输电实验 [3]。他们用两只相同的铜螺旋线圈：线圈半径 30 cm，高 20 cm，导线截面半径 3 mm，5.25 匝，靠导线自身的分布电感与分布电容谐振（“自谐振线圈”），实测谐振频率 9.90 MHz（理论估计 10.56 ± 0.3 MHz），实测品质因数 $Q = 950 \pm 50$ （理论估计约 2500）。两线圈同轴放置，在约 2 m 的距离上点亮了一只 60 W 灯泡，线圈之间的传输效率约 40%；在 2.4 m（线圈半径的 8 倍）处仍处于“强耦合区”。驱动电路从墙上插座取电约 400 W，所以“插座到灯泡”的总效率只有约 15%，大部分损耗在驱动用的振荡器上。同一组人此前在理论文章中分析了用谐振物体的近场实现“中程”能量传输 [4]。本讲第 8 节的例题 1 会用本讲推出的公式复算这个实验。

背景：今天的应用

- **手机无线充电 (Qi 标准)**：无线充电联盟 (Wireless Power Consortium, WPC) 2008 年 12 月成立，2010 年发布 Qi 低功率规范 1.0 版 (5 W) [5, 6]。发射线圈与接收线圈相距通常约 5 mm，耦合很强；低功率参考设计的工作频率在 105–205 kHz 之间，接收端通过负载调制向发射端发送控制信息，发射端据此调节功率 [7]。
- **电动汽车无线充电**：SAE J2954 (2020 年成为正式标准) 规定轻型电动车无线充电的标称频率为 85 kHz，功率等级为 3.7、7.7、11 kW [8, 9]。
- **植入式医疗器件**：人工耳蜗、神经刺激器等常通过皮肤两侧的线圈感应供电或充电。线圈尺寸受限、周围组织导电，这类系统的频率选择与安全问题有其特殊性 [10, 11]。

学习目标 学完本讲，你应当能够：

1. 由毕奥-萨伐尔定律推出诺依曼互感公式，计算两同轴圆环的互感（远场偶极近似、近距离对数近似与精确值），理解耦合系数 k 的含义与 $|k| \leq 1$ ；
2. 用复阻抗分析串联谐振电路，掌握品质因数 Q 的三种等价定义，由趋肤效应与偶极辐射估算线圈的损耗电阻；
3. 由两回路的复数电路方程推出反射阻抗、传输效率与最优负载，证明最大效率 $\eta_{\max} = U^2 / (1 + \sqrt{1 + U^2})^2$ 只由 $U = k\sqrt{Q_1 Q_2}$ 决定；
4. 理解频率分裂、临界耦合，用耦合模方程描述两谐振器间的能量交换，并说明它与电路方程的等价性；
5. 估算效率随距离的变化、近场中电场与磁场的相对大小、组织中的涡流损耗，分析中继线圈的作用；
6. 处理“由传输谱的频率分裂测耦合系数”一类实验数据：线性化、加权最小二乘、模型误差的识别。

前置知识：本讲需要的普通物理与数学

- 电磁学：毕奥-萨伐尔定律、安培环路定理、法拉第电磁感应定律（积分形式）、自感与互感的概念、磁场能量、电偶极子与磁偶极子；
- 电路：基尔霍夫定律、交流电的有效值、RLC 电路的基本概念；
- 数学：泰勒展开、定积分、复数及其指数形式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 、线性常微分方程、二次函数求极值。

本讲新引入的工具（矢势与旋度、斯托克斯定理、散度与高斯定理、用势表示电场、拉莫尔公式的来由、复阻抗、品质因数、趋肤深度、辐射电阻、反射阻抗、简正模、耦合模方程、椭圆积分、加权最小二乘）都在首次使用前给出定义与推导。

建议学时 共 2 学时（约 90 分钟）：前置模块（互感、谐振、损耗）30 分钟；效率与最优负载 20 分钟；频率分裂与耦合模理论 20 分钟；距离、安全与中继 20 分钟。例题与实验题供课后练习，附录供深入阅读。

推导路线

1. 毕奥-萨伐尔定律 $\Rightarrow$ 诺依曼公式 $\Rightarrow$ 同轴圆环互感 $M(d)$ 、耦合系数 k ；
2. 复阻抗、品质因数 Q 、损耗电阻（趋肤效应、辐射）；
3. 两回路电路方程 $\Rightarrow$ 反射阻抗与效率 $\eta \Rightarrow$ 最优负载与 $\eta_{\max}(U)$ ；
- 4.（无损极限）简正模与频率分裂；（慢变包络）耦合模方程与能量交换；
5. 距离标度、安全与中继。

2 名词与符号

以下字母在个别地方另作他用，用到时会再说明： h （例题 1 中为线圈高度，例题 3 中为线圈离皮肤的高度）； δ （趋肤深度； δf 表示频率偏移）； K （椭圆积分 $K(k_e)$ ；面电流密度；实验题的拟合参数）； λ （线电荷密度；例题 4 中的本征值）； $T_0 = 2\pi/\omega_0$ （振荡周期，不要与传输系数 T 混淆）； p_1 、 p_0 （实验题的拟合参数）； $\mathcal{D}$ （式 (3.9) 中的组合长度）； $\nu = \omega/\omega_0$ （例题 2）； $u = kQ$ （中继线圈）。

两点约定：

- **复数约定**：交变量写作 $V(t) = \text{Re}[\tilde{V}e^{i\omega t}]$ ， $\tilde{V}$ 称为复振幅（相量）。为简洁，复振幅仍记作 V 、 I ，由上下文区分。电工书常把虚数单位写作 j ，含义相同。
- **字母 k** ：本讲的 k 一律指耦合系数。电磁波的波数 ω/c 不另设字母，直接写成 ω/c （文献中常把 $(\omega a/c)^4$ 写作 $(ka)^4$ ）。

表 1 本讲符号表 (下标 1、2 分别指发射端与接收端; 例题 4 中 3 指第三个线圈)

符号	含义	单位
a, a_1, a_2	线圈 (圆环) 半径	m
b	导线截面半径	m
d	两同轴线圈中心距; 例题 1 中写作 D	m
N, n	线圈匝数	1
L, L_1, L_2	自感	H
M	互感	H
$k = M/\sqrt{L_1 L_2}$	耦合系数	1
$\Lambda = \ln(8a/b) - 2$	圆环自感中的对数因子, $L = \mu_0 a \Lambda$	1
C	电容	F
R, R_1, R_2	线圈自身的损耗电阻 (欧姆损耗 R_Ω + 辐射电阻 R_{rad})	Ω
$R_L, x = R_L/R_2$	负载电阻、负载比	$\Omega, 1$
$\omega, \omega_0 = 1/\sqrt{LC}, f$	角频率、谐振角频率、频率 $f = \omega/2\pi$	$\text{s}^{-1}, \text{s}^{-1}, \text{Hz}$
Z, X	复阻抗、电抗 (阻抗的虚部)	Ω
$Q = \omega_0 L/R$	品质因数	1
Q_L	负载品质因数 (计入外电路损耗)	1
$U = k\sqrt{Q_1 Q_2}$	耦合品质参数 (“耦合强度 / 损耗”)	1
η	传输效率 (负载功率 / 电源输出功率)	1
$\Gamma = \omega_0/(2Q)$	振幅衰减率 (6.2 节计入外电路时用 Q_L)	s^{-1}
$\kappa = k\omega_0/2$	耦合率 (耦合模方程中的耦合系数)	s^{-1}
δ	趋肤深度	m
$\rho, \sigma = 1/\rho$	电阻率、电导率	$\Omega \text{ m}, \text{S/m}$
$\mathbf{A}$	矢势, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$	T m
m, p	磁偶极矩、电偶极矩 (振幅)	$\text{A m}^2, \text{C m}$
$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$	真空波阻抗, 约 376.7Ω	Ω
c	真空光速	m/s
W	储存的能量	J
T	功率传输系数 (负载功率 / 电源资用功率)	1

3 前置模块 I: 自感、互感与诺依曼公式

3.1 自感、互感与磁能

定义: 自感与互感

空间中有两个闭合线圈 1、2, 分别通有电流 I_1, I_2 。由毕奥-萨伐尔定律, 磁场 $\mathbf{B}$ 与产生它的电流成正比, 所以穿过线圈 2 的磁通 (多匝线圈对各匝求和) 可以写成

$$\Phi_2 = M_{21}I_1 + L_2I_2, \quad (3.1)$$

比例系数 L_2 叫线圈 2 的自感, M_{21} 叫线圈 1 对线圈 2 的互感。它们只由几何形状 (及周围介质) 决定。由法拉第定律, 线圈 2 中的感应电动势为 $\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt} - L_2\frac{dI_2}{dt}$ 。

互感的正负取决于电流正方向的约定: 本讲总是把两同轴线圈的电流正方向取为同一绕向 (从

+z 方向看都是逆时针), 这时线圈 1 的磁场穿过线圈 2 的磁通为正, $M > 0$ 。

推导: 两线圈系统的磁能与 $M_{12} = M_{21}$

先让 I_1 从 0 增大到终值 ($I_2 = 0$), 电源克服自感电动势做功 $\int I_1 L_1 dI_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$ 。再保持 I_1 不变, 让 I_2 从 0 增大到终值: 电源 2 做功 $\frac{1}{2} L_2 I_2^2$; 同时线圈 1 中出现感应电动势 $-M_{12} \frac{dI_2}{dt}$, 电源 1 为保持 I_1 不变要额外做功 $\int I_1 M_{12} dI_2 = M_{12} I_1 I_2$ 。总能量

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2. \quad (3.2)$$

若先建 I_2 再建 I_1 , 同理得到交叉项 $M_{21} I_1 I_2$ 。磁能只取决于终态电流, 与建立次序无关, 所以 $M_{12} = M_{21} \equiv M$ 。(下面的诺依曼公式会直接给出这一对称性。)

定义: 耦合系数

$$k \equiv \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (3.3)$$

推导: 为什么 $|k| \leq 1$

磁能 W 是磁场能量密度 $B^2/2\mu_0$ 的体积分, 对任意 I_1, I_2 都有 $W \geq 0$ 。把式 (3.2) 看成 I_1/I_2 的二次函数: $W = \frac{I_2^2}{2} [L_1(I_1/I_2)^2 + 2M(I_1/I_2) + L_2] \geq 0$ 对一切 I_1/I_2 成立, 要求判别式 $4M^2 - 4L_1 L_2 \leq 0$, 即 $|k| \leq 1$ 。 $|k| = 1$ 意味着存在一组电流使总磁场处处为零——两线圈的磁通完全重合 (理想变压器)。

k 衡量 “线圈 1 产生的磁通有多大比例穿过线圈 2”。变压器铁芯中 k 接近 1; 手机充电板相距几毫米, $k \sim 0.3$; Kurs 实验中两线圈相距 2m, k 只有约 3×10^{-3} (例题 1)。本讲要回答的核心问题是: k 这么小时, 能量为什么还能高效地传过去?

3.2 矢势与诺依曼公式

计算互感要求线圈 1 的磁场穿过线圈 2 的磁通, 这是一个面积分, 面的形状由线圈 2 决定, 一般很难算。诺依曼 (F. E. Neumann, 1845) 把它化成了只沿两条导线的线积分 [12]。推导要用到矢势和斯托克斯定理。

前置知识: 旋度与斯托克斯定理

对矢量场 $\mathbf{F}(x, y, z)$, 定义旋度

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{F})_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \\ (\nabla \times \mathbf{F})_y &= \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \\ (\nabla \times \mathbf{F})_z &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

它的物理意义来自环流: 在垂直于 z 轴的平面内取边长 $\Delta x, \Delta y$ 的小矩形, 逆时针 (从 +z 看) 绕一周, $\mathbf{F}$ 的环流为 $[F_x(y) - F_x(y + \Delta y)]\Delta x + [F_y(x + \Delta x) - F_y(x)]\Delta y \approx \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \Delta x \Delta y$, 即 “旋度的 z 分量 $\times$ 面积”。把一个有限曲面 S 剖成许多小块, 相邻小块公共边上的环流方

向相反而抵消，只剩边界 ∂S 上的环流，于是得到斯托克斯定理

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.4)$$

其中边界的绕行方向与 $d\mathbf{S}$ 的方向成右手关系。本讲还要用到一个恒等式：若 $f(\mathbf{r})$ 是标量函数、 $\mathbf{c}$ 是常矢量，则

$$\nabla \times (f\mathbf{c}) = \nabla f \times \mathbf{c}, \quad (3.5)$$

按分量写出即可验证，例如 z 分量： $\partial_x(fc_y) - \partial_y(fc_x) = (\nabla f \times \mathbf{c})_z$ 。

前置知识：散度、高斯定理、电势与分部积分

本讲在例题 1 与附录 D 中还要用到下面几个工具。

- **散度与高斯定理**： $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ 。取边长 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 的小立方体，穿出 x 方向两个面的净通量为 $[F_x(x + \Delta x) - F_x(x)]\Delta y \Delta z \approx \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta V$ ，三个方向相加即“散度 $\times$ 体积”。把有限体积剖成小立方体，内部公共面的通量相消，得高斯定理 $\oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV$ 。两个例子：磁通连续（磁感线闭合）即 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ；电荷守恒（从小体积流出的净电流等于其中电荷的减少率）即 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t$ 。

- **用势表示电场**：把斯托克斯定理 (3.4) 用于法拉第定律的积分形式，得 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ 。代入 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，得 $\nabla \times (\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t) = 0$ 。旋度处处为零的场，沿任意闭合回路的线积分为零（斯托克斯定理），因而可以像静电场那样写成某个标量的负梯度。于是

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi.$$

在本讲的准静态情形下（式 (3.6) 给出的 $\mathbf{A}$ ）， ϕ 就是电荷分布产生的库仑势 $\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$ ；第一项是变化磁场感应的电场，第二项是电荷产生的电场。

- **体积分的分部积分**：由乘积求导， $\nabla \cdot (\phi \mathbf{J}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \nabla \phi$ 。对全空间积分，左边由高斯定理化为无穷远处的面积分，电流局限在导线内时为零，所以 $\int \mathbf{J} \cdot \nabla \phi dV = -\int \phi \nabla \cdot \mathbf{J} dV$ 。

推导：由毕奥-萨伐尔定律得到矢势

线圈 1（闭合回路 C_1 ）在场点 $\mathbf{r}$ 产生的磁场为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}.$$

第一步，对场点 $\mathbf{r}$ 求梯度可得 $\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}$ （与点电荷库仑场同一个计算）。于是被积式可写成

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} &= -d\mathbf{l}_1 \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \\ &= \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \times d\mathbf{l}_1. \end{aligned}$$

第二步, $d\mathbf{l}_1$ 只依赖源点、不依赖场点, 对 $\mathbf{r}$ 而言是常矢量, 用式 (3.5): $\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} \times d\mathbf{l}_1 = \nabla \times \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}$ 。第三步, 旋度对场点求导, 可以提到对源点的积分之外:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

$\mathbf{A}$ 叫矢势。它像静电势一样由源“直接叠加”而成: 每段电流元贡献一个与自身平行、随距离按 $1/r$ 减小的矢量。

推导: 诺依曼公式

线圈 1 的磁场穿过线圈 2 的磁通, 用斯托克斯定理 (3.4) 化为沿 C_2 的线积分:

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{l}_2. \end{aligned}$$

代入式 (3.6), 除以 I_1 :

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (3.7)$$

被积式对 1、2 对称, 所以 $M_{12} = M_{21}$ 。它还说明: 两段电流元相互平行时对 M 贡献最大, 相互垂直时贡献为零。

注: 诺依曼公式用于自感时要小心

令 $C_1 = C_2$ 计算自感, 被积式在 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ 处发散 ($\int dl/l$ 对数发散)。原因是把导线当成了无限细的线。实际导线有截面半径 b , 发散被截断在 $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \sim b$ 处, 所以自感总带有 $\ln(a/b)$ 型的因子 (见第 3.4 节)。

3.3 两同轴圆环的互感

考虑半径为 a_1 、 a_2 的两个同轴圆环, 中心距为 d (图 1(a))。用柱坐标, 两环上的点分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (a_1 \cos \varphi_1, a_1 \sin \varphi_1, 0), \\ \mathbf{r}_2 &= (a_2 \cos \varphi_2, a_2 \sin \varphi_2, d), \end{aligned}$$

线元 $d\mathbf{l}_i = a_i(-\sin \varphi_i, \cos \varphi_i, 0)d\varphi_i$ ($i = 1, 2$), 所以

$$\begin{aligned} d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 &= a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2, \\ |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 &= a_1^2 + a_2^2 + d^2 - 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

被积式只依赖差 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, 对另一个角度积分给出因子 2π 。代入式 (3.7):

$$M = \frac{\mu_0 a_1 a_2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad (3.8)$$

其中 $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ 由上式给出 (取 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$)。这是一个普通的定积分, 可以直接数值计算。经变量代换它可以化成“完全椭圆积分”(附录 A), 这就是麦克斯韦在《电磁通论》中给出的精确公式 [13]。

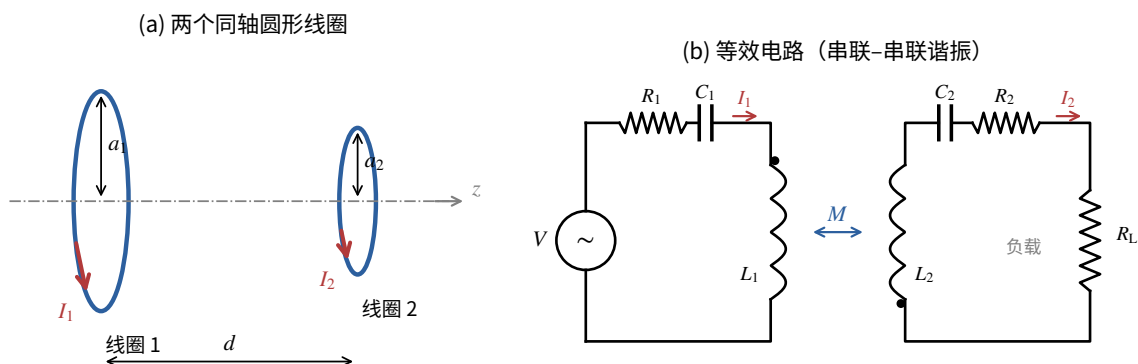


图 1 (a) 两个同轴圆形线圈, 半径 a_1, a_2 , 中心距 d , 电流 I_1, I_2 的正方向取同一绕向; (b) 本讲分析的等效电路: 每个线圈串联一个电容使之谐振 (“串联-串联” 补偿), R_1, R_2 为线圈自身的损耗电阻, R_L 为负载, 两回路通过互感 M 耦合。黑点为同名端 (这样一对端点: 电流同时从这两端流入时, 两线圈的磁通相互加强)。两电流都从打点端流入线圈, 对应图 (a) 中两线圈同一绕向, 此时 $M > 0$, 回路方程为式 (5.1)、(5.2)。

远场: 偶极-偶极近似 记 $\mathcal{D}^2 \equiv a_1^2 + a_2^2 + d^2$, $\epsilon \equiv 2a_1a_2/\mathcal{D}^2$ 。两环相距较远时 $\epsilon \ll 1$, 把被积式按 ϵ 展开:

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}^2(1 - \epsilon \cos \varphi)}} = \frac{1}{\mathcal{D}} \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon \cos \varphi + \frac{3}{8} \epsilon^2 \cos^2 \varphi + \frac{5}{16} \epsilon^3 \cos^3 \varphi + \dots \right).$$

乘以 $\cos \varphi$ 后在一个周期上积分, 只有 $\cos \varphi$ 的奇次幂项留下: $\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi$, $\int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi = 3\pi/4$ 。于是

$$M = \frac{\mu_0 \pi a_1^2 a_2^2}{2\mathcal{D}^3} \left[1 + \frac{15}{8} \frac{a_1^2 a_2^2}{\mathcal{D}^4} + \dots \right], \quad \mathcal{D}^2 = a_1^2 + a_2^2 + d^2. \quad (3.9)$$

保留首项, 并在 $d \gg a_1, a_2$ 时把 $\mathcal{D}$ 换成 d :

$$M \approx \frac{\mu_0 \pi a_1^2 a_2^2}{2d^3} \quad (d \gg a_1, a_2). \quad (3.10)$$

检验: 用磁偶极子的图像核对式 (3.10)

圆环 1 在自身轴线上距中心 z 处的磁场 (毕奥-萨伐尔定律的标准结果) 为 $B_z = \frac{\mu_0 I_1 a_1^2}{2(a_1^2 + z^2)^{3/2}}$ 。
 $z \gg a_1$ 时 $B_z \approx \frac{\mu_0 m_1}{2\pi z^3}$, 其中 $m_1 = I_1 \pi a_1^2$ 是环 1 的磁偶极矩。若环 2 很小 ($a_2 \ll d$), 它所在处磁场近似均匀, 穿过它的磁通为 $B_z \pi a_2^2$, 于是

$$M \approx \frac{\mu_0 \pi a_1^2 a_2^2}{2(a_1^2 + d^2)^{3/2}} \quad (a_2 \ll a_1 \text{ 或 } a_2 \ll d). \quad (3.11)$$

它与式 (3.9) 的首项在 $a_2 \rightarrow 0$ 时完全一致; $d \gg a_1$ 时两者都回到式 (3.10)。量纲: $\mu_0 \times \text{m}^4 / \text{m}^3 = \mu_0 \times \text{m}$, 即 H, 正确。

式 (3.9) 的首项已经包含了远场的第一级修正: $\mathcal{D}^{-3} = d^{-3}[1 + (a_1^2 + a_2^2)/d^2]^{-3/2} \approx d^{-3}[1 - \frac{3}{2}(a_1^2 + a_2^2)/d^2]$, 而方括号中的 $\frac{15}{8}$ 项是 $(a/d)^4$ 量级。这个结论在实验题中要用到。

近距离: 对数近似 两个等半径圆环 ($a_1 = a_2 = a$) 靠得很近 ($d \ll a$) 时, 附录 A 由精确式求得

$$M \approx \mu_0 a \left[\ln \frac{8a}{d} - 2 \right] \quad (d \ll a). \quad (3.12)$$

$\ln(a/d)$ 的来源很直观: 靠近导线处, 弯曲的圆环看起来像一根直导线, 其磁场 $\mu_0 I / (2\pi r)$ 从 $r \sim d$ 积分到 $r \sim a$ 给出 $\ln(a/d)$; 常数 $\ln 8 - 2$ 要靠精确计算。

图 2 比较了精确值与这些近似。偶极近似在 $d > 5.5a$ 时误差小于 10%, 在 $d \sim a$ 时高估到约 4 倍; 对数近似在 $d < 0.2a$ 时误差小于 2%。

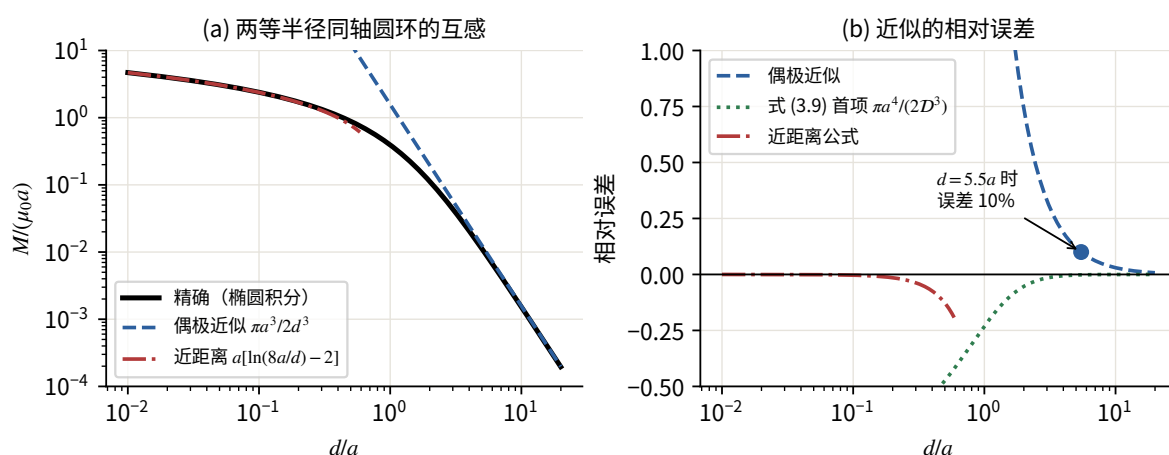


图 2 两等半径同轴圆环的互感。(a) 精确值 (式 (3.8), 附录 A 的椭圆积分) 与偶极近似 (3.10)、近距离近似 (3.12) 的比较; (b) 各近似的相对误差。点线为式 (3.9) 的首项 $\mu_0 \pi a^4 / (2\mathcal{D}^3)$ (它已含远场的首级修正), 在 $d > 2.8a$ 时误差小于 2%。脚本 `scripts/fig_mutual.py` 还用诺依曼双重积分的直接求和核对了 $d = a$ 处的精确值。

交互演示: 两同轴线圈的耦合系数 k 随距离 d 的变化: 精确值 (椭圆积分) 与偶极近似、轴线近似的对比。可调节两线圈半径之比与导线半径 (两线圈导线半径相同), 读出任一距离处的 k 和局部幂次 $n = -d \ln k / d \ln d$ 。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 `wpt-coupling`)。

3.4 圆环与多匝线圈的自感

把一个导线截面半径为 b 的单匝圆环 ($b \ll a$) 的自感, 近似看成“导线轴线上的电流细线”与“导线内侧表面上的一条细线”之间的互感。两条细线靠得很近时, 互感只依赖它们的间距, 与错开的方向 (轴向或径向) 无关 (误差为 $\mathcal{O}(b/a)$), 所以可以在式 (3.12) 中令 $d \rightarrow b$:

$$L \approx \mu_0 a \left[\ln \frac{8a}{b} - 2 \right] \equiv \mu_0 a \Lambda. \quad (3.13)$$

这正是高频下(电流集中在导线表面, 见第 4.3 节)圆环自感的标准结果; 直流时电流均匀分布在截面上, 导线内部还有一部分磁能, -2 换成 $-7/4$ [13]。例如 $a = 10 \text{ cm}$ 、 $b = 1 \text{ mm}$: $\Lambda = \ln 800 - 2 = 4.68$, $L = 0.59 \text{ pH}$ 。

N 匝紧密绕在一起的线圈(绕组截面远小于 a), 每匝的磁通都约为单匝的 N 倍, 总磁链再乘 N , 所以 $L \approx N^2 \mu_0 a \Lambda$; 两个这样的线圈之间 $M \approx N_1 N_2 M_{\text{单匝}}$ 。耦合系数中 N 相消:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \approx \frac{\pi a_1^2 a_2^2}{2d^3 \sqrt{a_1 a_2 \Lambda_1 \Lambda_2}} \quad (3.14)$$

$$(d \gg a_1, a_2).$$

对两个相同线圈, $k \approx \pi a^3 / (2\Lambda d^3)$: 耦合系数只由几何决定, 并随距离按 d^{-3} 衰减。匝数不改变 k , 但改变阻抗的大小 ($L \propto N^2$), 用来与电源、负载匹配。

要点: 前置模块 I 小结

- 诺依曼公式 (3.7) 把互感化成两条导线上的双重线积分; M 对两线圈对称。
- 同轴圆环: 远场 $M \approx \mu_0 \pi a_1^2 a_2^2 / (2d^3)$ (偶极-偶极), 近距离 $M \approx \mu_0 a [\ln(8a/d) - 2]$; 精确值由式 (3.8) 数值积分。
- 耦合系数 $|k| \leq 1$, 只由几何决定, 远场 $k \propto d^{-3}$ 。

4 前置模块 II: 谐振电路与损耗

4.1 复振幅与复阻抗

定义: 复振幅与复阻抗

在频率为 ω 的正弦稳态下, 电路中每个电压、电流都是 $\text{Re}[Xe^{i\omega t}]$ 的形式, X 是复数(复振幅), 其模是振幅, 辐角是初相位。求导 $\frac{d}{dt}$ 变成乘以 $i\omega$ 。于是三种元件的电压-电流关系都变成线性比例关系 $V = ZI$:

$$\begin{aligned} Z_R &= R, \\ Z_L &= i\omega L, \\ Z_C &= \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Z 叫复阻抗, 实部叫电阻, 虚部叫电抗 X 。串联阻抗相加, 并联导纳 $1/Z$ 相加, 基尔霍夫定律对复振幅照样成立。

在 $e^{i\omega t}$ 约定下, 电感上的电压超前电流 90° (因子 $i = e^{i\pi/2}$), 电容上的电压落后电流 90° 。

推导: 平均功率

元件上的瞬时功率 $P(t) = \text{Re}[Ve^{i\omega t}] \cdot \text{Re}[Ie^{i\omega t}]$ 。用 $\text{Re } z = \frac{1}{2}(z + z^*)$ 展开, 含 $e^{\pm 2i\omega t}$ 的项在一个周期内平均为零, 剩下

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \text{Re}(VI^*) = \frac{1}{2} |I|^2 \text{Re } Z. \quad (4.2)$$

电抗不消耗平均功率: 电感、电容只在一个周期内来回吞吐能量。注意因子 $\frac{1}{2}$: 本讲的 V 、 I

是振幅，不是有效值。

4.2 串联谐振与品质因数

串联 RLC 电路的阻抗

$$Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \equiv R + iX(\omega). \quad (4.3)$$

当 $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ 时 $X = 0$: 电感与电容的电抗相互抵消, 在电压一定时电流最大, 称为谐振。谐振附近令 $\omega = \omega_0 + \Delta$ ($|\Delta| \ll \omega_0$), 一阶展开

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = L \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} \approx 2L\Delta. \quad (4.4)$$

品质因数 Q 衡量谐振器“储能多、损耗少”的程度。它有三种常用定义 (下面的推导框证明, 对串联 RLC 三者给出同一个值 $Q = \omega_0 L/R$)。

定义：品质因数的三种定义

1. **能量定义**: $Q = \omega_0 \frac{W}{\bar{P}_{\text{loss}}}$, W 为谐振时储存的能量, $\bar{P}_{\text{loss}}$ 为平均损耗功率。等价说法: 每振荡一个弧度, 损耗掉储能的 $1/Q$ 。
2. **带宽定义**: $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, $\Delta\omega$ 为受迫响应的功率 ($|I|^2$) 降到峰值一半的两个频率之差 (“半高全宽”)。
3. **衰减定义**: 自由振荡的能量按 $W(t) = W(0)e^{-\omega_0 t/Q}$ 衰减; 等价地, 振幅按 $e^{-\Gamma t}$ 衰减, $\Gamma = \omega_0/(2Q)$ 。

推导：三种定义的等价性

(i) 谐振时电流振幅为 I , 电感储能在一周期内最大为 $\frac{1}{2}LI^2$, 此时电容上电荷为零; 电荷最大时电流为零, 能量全在电容中, 也是 $\frac{1}{2}LI^2$ (因 $\omega_0^2 LC = 1$)。所以总储能恒为 $W = \frac{1}{2}LI^2$ 。平均损耗 $\bar{P} = \frac{1}{2}RI^2$ (式 (4.2))。于是 $Q = \omega_0 W/\bar{P} = \omega_0 L/R$ 。

(ii) 外加电压振幅 V 固定, $|I|^2 = V^2/(R^2 + X^2)$ 。半功率条件为 $X^2 = R^2$, 即 $\omega L - 1/(\omega C) = \pm R$ 。两个正根分别为 $\omega_{1,2} = \left(\mp R + \sqrt{R^2 + 4L/C} \right)/(2L)$, 相减得 $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = R/L$, 严格成立。所以 $\omega_0/\Delta\omega = \omega_0 L/R$ 。

(iii) 自由振荡满足 $L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0$ 。试探 $q \propto e^{st}$, 得 $LS^2 + Rs + 1/C = 0$, $s = -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}}$ 。振幅衰减率 $\Gamma = \frac{R}{2L} = \frac{\omega_0}{2Q}$, 能量正比于振幅平方, 衰减率为 $2\Gamma = \omega_0/Q$ 。振荡频率 $\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2} = \omega_0\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}$, $Q \gg 1$ 时与 ω_0 只差 $\mathcal{O}(Q^{-2})$ 。

小结: (i)(ii) 对串联 RLC 严格成立; (iii) 中严格按 $e^{-Rt/L}$ 衰减的是能量的包络 (一个周期内储能还有小起伏), 振荡频率也比 ω_0 略低, $Q \gg 1$ 时这些差别可忽略。

注：第四种说法：电压放大

谐振时电流 $I = V/R$, 电容 (或电感) 上的电压振幅 $|I|/(\omega_0 C) = V \cdot \omega_0 L/R = QV$ 。高 Q 谐振器在线圈和电容上会出现远高于电源电压的电压, 这也是自谐振线圈附近电场很强的原因。

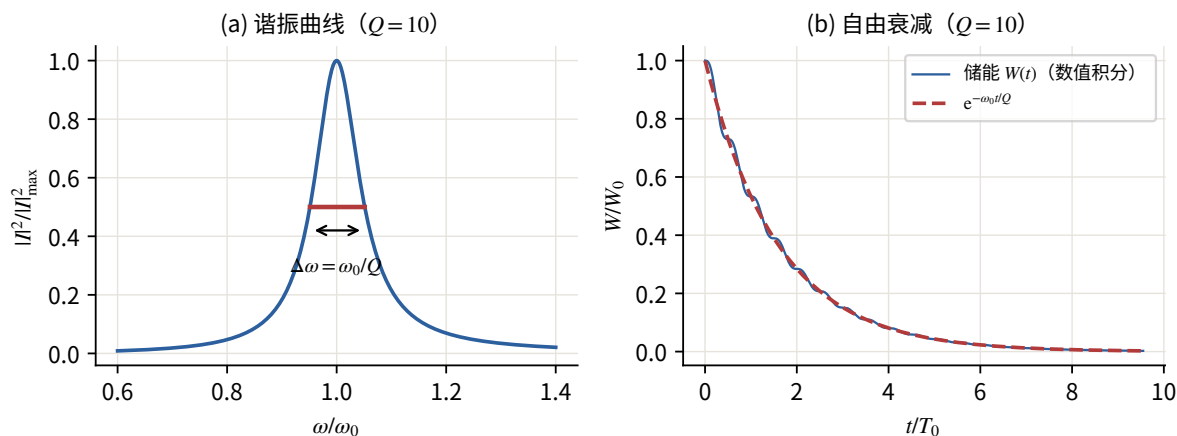


图 3 串联 RLC 谐振器 ($Q = 10$)。 (a) 受迫响应 $|I|^2$ 的半高全宽为 ω_0/Q ; (b) 自由振荡储能的数值积分结果与 $e^{-\omega_0 t/Q}$ 一致 (横轴以周期 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 为单位) (小起伏来自一个周期内损耗功率 RI^2 的变化)。脚本 `scripts/fig_resonance.py` 中用 `assert` 核对了两者。

注：负载品质因数

谐振器接上外电路 (电源内阻、负载、测量用的耦合环) 后, 外电路也消耗能量。按能量定义, 总损耗 = 本征损耗 + 外电路损耗, 所以 $1/Q_L = 1/Q_0 + 1/Q_e$, 其中 Q_0 为谐振器本身的 (无载) 品质因数, $Q_e = \omega_0 L/R_e$ 由外电路的等效电阻 R_e 决定。实验中测到的线宽对应 Q_L 。

4.3 损耗从哪里来 (1): 趋肤效应与交流电阻

线圈的损耗电阻主要有两部分: 导线的欧姆电阻和向外辐射电磁波的“辐射电阻”。直流时铜线的电阻按 $\rho\ell/(\pi b^2)$ 计算; 在 MHz 频率下, 电流只在导线表面很薄的一层中流动, 电阻大得多。

假设：趋肤效应模型

- 先把导体看成占据 $z > 0$ 的半无限大平面导体 (导线半径 b 远大于趋肤深度时, 表面曲率可以忽略);
- 电流沿 x 方向, 场只随深度 z 变化: $\mathbf{E} = E_x(z, t)\hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{B} = B_y(z, t)\hat{\mathbf{y}}$;
- 导体内满足欧姆定律 $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, 并忽略位移电流 (要求 $\sigma \gg \omega\epsilon_0$; 铜 $\sigma = 5.9 \times 10^7 \text{ S/m}$, 10 MHz 时 $\omega\epsilon_0 \approx 6 \times 10^{-4} \text{ S/m}$, 相差 11 个数量级)。

推导：趋肤深度

第一步, 法拉第定律用于 xz 平面内的小矩形 (边长 $\Delta x, \Delta z$, 绕行方向 $(x, z) \rightarrow (x + \Delta x, z) \rightarrow (x + \Delta x, z + \Delta z) \rightarrow (x, z + \Delta z)$, 按右手定则其法向为 $-\hat{\mathbf{y}}$):

$$\begin{aligned} E_x(z)\Delta x - E_x(z + \Delta z)\Delta x &= -\frac{d}{dt}[-B_y\Delta x\Delta z] \\ \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t}. \end{aligned}$$

第二步, 安培环路定理用于 yz 平面内的小矩形 (绕行 $(y, z) \rightarrow (y + \Delta y, z) \rightarrow (y + \Delta y, z + \Delta z) \rightarrow (y, z + \Delta z)$, 法向为 $+\hat{x}$):

$$\begin{aligned} B_y(z)\Delta y - B_y(z + \Delta z)\Delta y &= \mu_0 J_x \Delta y \Delta z \\ \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial z} &= -\mu_0 \sigma E_x. \end{aligned}$$

第三步, 换成复振幅 ($\partial_t \rightarrow i\omega$), 把第一式再对 z 求导并代入第二式:

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = -i\omega \frac{dB_y}{dz} = i\omega \mu_0 \sigma E_x.$$

第四步, 试探 $E_x = E_0 e^{-\gamma z}$, 得 $\gamma^2 = i\omega \mu_0 \sigma$. 用 $\sqrt{i} = (1 + i)/\sqrt{2}$, 取实部为正的根 (场向导体内部衰减):

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1 + i}{\delta}, \\ \delta &= \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega \mu_0}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

电场与电流密度 $J_x = \sigma E_0 e^{-z/\delta} e^{-iz/\delta}$ 在深度 δ 内衰减到表面值的 $1/e$, 同时相位滞后. δ 称为趋肤深度。

铜 ($\rho = 1.68 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$): $f = 100 \text{ kHz}$ 时 $\delta = 0.21 \text{ mm}$, 10 MHz 时 $\delta = 21 \mu\text{m}$ 。

推导: 表面电阻与导线的交流电阻

单位宽度 (沿 y) 内的总电流 $K = \int_0^\infty J_x dz = \sigma E_0 \int_0^\infty e^{-(1+i)z/\delta} dz = \frac{\sigma E_0 \delta}{1 + i}$, 所以 $|K| = \sigma |E_0| \delta / \sqrt{2}$. 单位表面积上的平均焦耳功率

$$\begin{aligned} \frac{\bar{P}}{\text{面积}} &= \int_0^\infty \frac{1}{2} \sigma |E_x|^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \sigma |E_0|^2 \int_0^\infty e^{-2z/\delta} dz \\ &= \frac{\sigma |E_0|^2 \delta}{4} = \frac{1}{2} |K|^2 \cdot \frac{1}{\sigma \delta}. \end{aligned}$$

与均匀电流流过厚度为 δ 的薄层完全一样. 半径为 $b \gg \delta$ 的圆导线, 周长 $2\pi b$, 电流沿周长均匀分布, 所以长度 ℓ 的导线

$$R_\Omega = \frac{\rho \ell}{2\pi b \delta} \propto \sqrt{\omega} \quad (b \gg \delta). \quad (4.6)$$

与直流电阻之比为 $b/(2\delta)$: 10 MHz 时半径 3 mm 的铜线, 交流电阻是直流电阻的 72 倍。

注: 邻近效应与绞合线

多匝线圈中, 相邻导线的磁场进一步把电流挤向导线的某一侧, 有效截面更小, 电阻比式 (4.6) 还大, 这称为邻近效应. 低频 (100 kHz 量级) 的手机、汽车充电线圈常用许多根相互绝缘的细线绞合而成的“利兹线”, 使每根细线的半径小于趋肤深度, 电流在截面上近似均匀分布. 本讲的估算都忽略邻近效应, 因此给出的是 Q 的上限。

4.4 损耗从哪里来 (2): 辐射电阻

交变电流的线圈是一个振荡的磁偶极子, 会向远处辐射电磁波, 带走能量。这部分能量损耗可以等效成一个串联电阻。

推导: 偶极辐射功率: 从电场线的“折痕”到拉莫尔公式

设电荷 q 原来静止, 在 $t = 0$ 起的极短时间 τ 内以加速度 a 加速到 $v = a\tau \ll c$, 此后匀速运动。场的变化以光速传播, 所以在时刻 $t \gg \tau$: 半径 ct 以外的场还是原来静止电荷的库仑场, 场线从原位置发出; 半径 $c(t - \tau)$ 以内是运动电荷的场 ($v \ll c$ 时近似为从当前位置 vt 发出的库仑场)。电场线不能中断 (高斯定律), 两组场线必须在厚度 $c\tau$ 的薄球壳内连接起来, 形成一道“折痕”。

在与加速度方向夹角 θ 的方向上, 内外两组场线横向错开 $vt \sin \theta$, 而折痕的径向厚度只有 $c\tau$, 所以折痕内电场的横向分量与径向分量之比为 $E_{\perp}/E_r = vt \sin \theta / (c\tau) = ar \sin \theta / c^2$ ($r = ct$)。径向分量仍是 $q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$, 于是

$$E_{\perp} = \frac{qa \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \propto \frac{1}{r},$$

比库仑场衰减得慢, 能把能量带到无穷远, 这就是辐射场。辐射场是向外传播的电磁波, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ 且 $B = E/c$, 能流密度 $S = E_{\perp}^2 / (\mu_0 c) = \epsilon_0 c E_{\perp}^2$, 对半径 r 的球面积分 ($\int \sin^2 \theta d\Omega = 8\pi/3$):

$$P = \epsilon_0 c \left(\frac{qa}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right)^2 \frac{8\pi}{3} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}.$$

这就是拉莫尔公式 (完整推导见 Purcell 与 Morin 《电磁学》, 或中级电动力学教材, 如文献 [14] 第 11 章)。

多个电荷时各自的辐射场相加。若电荷分布的尺度远小于波长, 各电荷到观察点的推迟时间差可以忽略, 辐射场正比于 $\sum q_i \mathbf{a}_i = \ddot{\mathbf{p}}$ 。所以在最低阶近似下其辐射只取决于电偶极矩 $\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{r}_i$ 的二阶导数 (把 $q\mathbf{r}$ 换成 $\ddot{\mathbf{p}}$; 对 $p \cos \omega t$ 求时间平均时用 $\overline{\cos^2} = \frac{1}{2}$):

$$P_e = \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}, \quad (4.7)$$

$$\bar{P}_e = \frac{p^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (\mathbf{p} = p \cos \omega t \hat{\mathbf{z}}).$$

磁偶极矩为 $m \cos \omega t$ 的小电流环, 平均辐射功率 (附录 C 由两对电偶极子叠加推出) 为

$$\bar{P}_m = \frac{\mu_0 m^2 \omega^4}{12\pi c^3}. \quad (4.8)$$

它与式 (4.7) 的关系是 $p \rightarrow m/c$ 。

推导：小线圈的辐射电阻

N 匝、半径 a 的线圈通以电流 $I \cos \omega t$ (各处电流相同, 要求导线总长远小于波长), 磁偶极矩振幅 $m = NI\pi a^2$ 。定义辐射电阻 R_{rad} 使 $\bar{P}_m = \frac{1}{2}R_{\text{rad}}I^2$, 由式 (4.8):

$$\begin{aligned} R_{\text{rad}} &= \frac{\mu_0 \omega^4 N^2 \pi^2 a^4}{6\pi c^3} \\ &= \frac{\pi Z_0}{6} N^2 \left(\frac{\omega a}{c}\right)^4 \\ &\approx 197 \Omega \times N^2 \left(\frac{\omega a}{c}\right)^4, \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中 $Z_0 = \mu_0 c = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 。 $\omega a/c = 2\pi a/\lambda$ 是线圈的“电尺寸”。

检验：量纲与量级

Z_0 的单位是 Ω , $(\omega a/c)$ 无量纲, 故 R_{rad} 的单位是 Ω 。Kurs 线圈 $a = 0.3\text{m}$, 9.9MHz 时 $\omega a/c = 0.062$, $(\omega a/c)^4 = 1.5 \times 10^{-5}$, $N = 5.25$ 匝时 $R_{\text{rad}} \approx 0.08 \Omega$ (假设电流处处相同; 实际自谐振线圈电流两端为零, 例题 1 中会修正为约 0.03Ω), 与欧姆电阻 (约 0.2Ω) 相比不可忽略。

欧姆电阻 $\propto \omega^{1/2}$, 辐射电阻 $\propto \omega^4$ 。在电感一定的条件下, $Q = \omega L/(R_\Omega + R_{\text{rad}})$ 先随频率升高而增大, 后因辐射急剧减小, 中间存在一个最优频率。只保留这两项, 令 $\frac{d}{d\omega} [\omega/(A\omega^{1/2} + B\omega^4)] = 0$, 得 $\frac{1}{2}A\omega^{1/2} = 3B\omega^4$, 即最优处

$$R_{\text{rad}} = \frac{1}{6}R_\Omega. \quad (4.10)$$

图 4 以 Kurs 的线圈为例画出了各种损耗电阻与 Q 随频率的变化 (这里假设同一个线圈用外接电容调谐到不同频率; 自谐振线圈的频率其实由几何决定)。理论 Q 的极大值约 2470, 出现在 9.7MHz 附近, 与实验的工作频率 9.9MHz 几乎重合。Kurs 等人也强调: Q 与耦合都随频率变化, 选择合适的工作频率对优化传输至关重要 [3]。

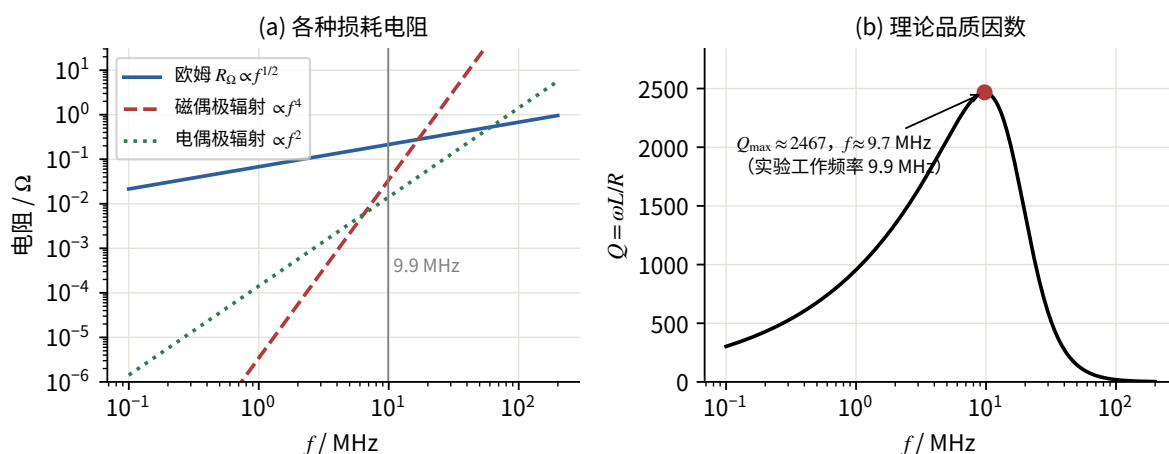


图 4 Kurs 线圈 ($a = 30\text{cm}$, $b = 3\text{mm}$, 5.25 匝, $h = 20\text{cm}$, 铜 $\sigma = 5.9 \times 10^7\text{S/m}$, $L = 10.34\mu\text{H}$) 的损耗电阻与理论品质因数。(a) 欧姆电阻 (式 (4.6), 计入余弦电流分布的因子 $\frac{1}{2}$)、磁偶极与电偶极辐射电阻 (例题 1 的式 (8.2)、(8.3)); (b) $Q = \omega L/R$ 。只保留欧姆与磁偶极辐射两项时, 最优频率处 $R_{\text{rad}} = R_\Omega/6$ (脚本中已核对); 计入电偶极辐射后最优频率降低约 4%。

要点：前置模块 II 小结

- 复阻抗： $Z_L = i\omega L$, $Z_C = 1/(i\omega C)$ ；平均功率 $\frac{1}{2}|I|^2 \operatorname{Re} Z$ 。
- 串联谐振 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ；品质因数 $Q = \omega_0 L/R = \omega_0 W/\bar{P} = \omega_0/\Delta\omega$ ，振幅衰减率 $\Gamma = \omega_0/(2Q)$ 。
- 交流电阻 $R_\Omega = \rho\ell/(2\pi b\delta) \propto \omega^{1/2}$ ；辐射电阻 $R_{\text{rad}} = \frac{\pi Z_0}{6} N^2 (\omega a/c)^4 \propto \omega^4$ 。二者决定一个使 Q 最大的频率。

5 两个耦合谐振回路：效率由什么决定**5.1 电路方程与反射阻抗****假设：两回路模型**

- 线圈尺寸远小于波长，整个电路可以用集总参数 (L 、 C 、 R 、 M) 描述 (准静态近似)；
- 发射回路：理想电压源 (复振幅 V)、线圈损耗电阻 R_1 、电容 C_1 、自感 L_1 串联；接收回路： L_2 、 C_2 、损耗电阻 R_2 与负载电阻 R_L 串联 (图 1(b))；
- 两回路只通过互感 M 耦合 (忽略线圈之间的电容耦合)，电流正方向如图， $M > 0$ ；
- 效率定义为 $\eta = \bar{P}_L/\bar{P}_{\text{in}}$ ：负载吸收的平均功率与电源输出的平均功率之比。电源内阻造成的损耗另行讨论 (第 5.4 节)。

对两回路分别用基尔霍夫电压定律。回路 2 中，互感电动势 $-M dI_1/dt$ 相当于一个电源，写成复振幅为 $-i\omega M I_1$ ：

$$Z_1 I_1 + i\omega M I_2 = V, \quad (5.1)$$

$$i\omega M I_1 + Z_2 I_2 = 0, \quad (5.2)$$

其中

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1 + iX_1, \quad X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}; \\ Z_2 &= R_2 + R_L + iX_2, \\ X_2 &= \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

推导：次级电流与反射阻抗

由式 (5.2)，

$$I_2 = -\frac{i\omega M}{Z_2} I_1. \quad (5.4)$$

代回式 (5.1)： $\left(Z_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2}\right) I_1 = V$ 。从电源看进去，整个系统相当于一个阻抗

$$\begin{aligned} Z_{\text{in}} &= Z_1 + Z_{\text{ref}}, \\ Z_{\text{ref}} &\equiv \frac{\omega^2 M^2}{Z_2}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Z_{ref} 叫反射阻抗：次级回路的存在，在初级看来就是串联了一个额外阻抗。解出

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{Z_2 V}{Z_1 Z_2 + \omega^2 M^2}, \\ I_2 &= \frac{-i\omega M V}{Z_1 Z_2 + \omega^2 M^2}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

检验：两个极限

(i) $M \rightarrow 0$: $I_2 \rightarrow 0$, $I_1 \rightarrow V/Z_1$, 回到单个 RLC 回路。(ii) 次级开路 ($Z_2 \rightarrow \infty$): $Z_{\text{ref}} \rightarrow 0$, 初级不受影响。符号：谐振时 Z_2 为实数, $I_2/I_1 = -i\omega M/Z_2$, 次级电流落后初级 90° 。这与直观一致：次级电动势 $-M\dot{I}_1$ 落后 I_1 90° , 而谐振的次级回路是纯电阻, 电流与电动势同相。

推导：传输效率

反射阻抗的实部 $\text{Re } Z_{\text{ref}} = \omega^2 M^2 \text{Re}(1/Z_2) = \omega^2 M^2 (R_2 + R_L)/|Z_2|^2$ 。由式 (4.2), 电源输出的平均功率为 $\frac{1}{2}|I_1|^2 \text{Re } Z_{\text{in}} = \frac{1}{2}|I_1|^2 (R_1 + \text{Re } Z_{\text{ref}})$, 其中 $\frac{1}{2}|I_1|^2 \text{Re } Z_{\text{ref}}$ 这一部分传到了次级 (可直接验证它等于 $\frac{1}{2}|I_2|^2 (R_2 + R_L)$: 由式 (5.4), $|I_2|^2 (R_2 + R_L) = |I_1|^2 \omega^2 M^2 (R_2 + R_L)/|Z_2|^2$)。次级功率中 $R_L/(R_2 + R_L)$ 进入负载。所以

$$\eta(\omega) = \underbrace{\frac{\text{Re } Z_{\text{ref}}}{R_1 + \text{Re } Z_{\text{ref}}}}_{\text{初级} \rightarrow \text{次级}} \times \underbrace{\frac{R_L}{R_2 + R_L}}_{\text{次级} \rightarrow \text{负载}}. \quad (5.7)$$

式 (5.7) 对任意频率成立。物理图像很清楚：电源送出的功率在初级线圈电阻 R_1 与“反射电阻” $\text{Re } Z_{\text{ref}}$ 之间按比例分配；传到次级的功率再在 R_2 与 R_L 之间分配。要效率高，就要让反射电阻远大于 R_1 , 同时让 R_L 远大于 R_2 ——但 R_L 越大, $\text{Re } Z_{\text{ref}}$ 越小, 两者相互制约, 存在最优负载。

5.2 谐振时的效率与最优负载

两回路都调到同一谐振频率 ω_0 且在 ω_0 工作时, $X_1 = X_2 = 0$, $Z_2 = R_2 + R_L$ 为实数, $\text{Re } Z_{\text{ref}} = \omega_0^2 M^2 / (R_2 + R_L)$ 。引入两个无量纲量

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{R_L}{R_2}, \\ U^2 &\equiv \frac{\omega_0^2 M^2}{R_1 R_2} = k^2 \frac{\omega_0 L_1}{R_1} \frac{\omega_0 L_2}{R_2} \\ &= k^2 Q_1 Q_2, \end{aligned} \quad (5.8)$$

其中 $Q_{1,2} = \omega_0 L_{1,2} / R_{1,2}$ 是两线圈的无载品质因数 (不含负载)。

推导：效率的无量纲形式

$\text{Re } Z_{\text{ref}} / R_1 = \omega_0^2 M^2 / [R_1 R_2 (1 + x)] = U^2 / (1 + x)$, 代入式 (5.7):

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{U^2 / (1 + x)}{1 + U^2 / (1 + x)} \cdot \frac{x}{1 + x} \\ &= \frac{x U^2}{(1 + x)(1 + x + U^2)}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

推导：最优负载与最大效率

对 x 求导。记 $g(x) = \ln \eta = \ln x - \ln(1+x) - \ln(1+x+U^2) + \text{常数}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+U^2} \\ &= \frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{1+x+U^2} = 0 \\ \Rightarrow x(1+x) &= 1+x+U^2 \\ \Rightarrow x^2 &= 1+U^2. \end{aligned}$$

最优负载比

$$x_{\text{opt}} = \frac{R_{L,\text{opt}}}{R_2} = \sqrt{1+U^2}. \quad (5.10)$$

代回式 (5.9), 记 $s = \sqrt{1+U^2}$, 则 $1+s+U^2 = s+s^2 = s(1+s)$:

$$\begin{aligned} \eta_{\text{max}} &= \frac{U^2 s}{(1+s) \cdot s(1+s)} \\ &= \frac{U^2}{\left(1 + \sqrt{1+U^2}\right)^2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

其中 $U = k\sqrt{Q_1 Q_2}$ 。

检验：极限与数值

- 弱耦合 $U \ll 1$: $\eta_{\text{max}} \approx U^2/4$, 随距离按 $k^2 \propto d^{-6}$ 骤降。
- 强耦合 $U \gg 1$: $\eta_{\text{max}} = \left(\frac{U}{1+\sqrt{1+U^2}}\right)^2 \approx \left(1 - \frac{1}{U}\right)^2 \approx 1 - \frac{2}{U}$ 。损耗占比与 $1/U$ 成正比。
- 数值: $U = 1$ 时 $\eta_{\text{max}} = 1/(1+\sqrt{2})^2 = 17.2\%$; $U = 3$ 时 52%; $U = 10$ 时 82%。
- 对称性: 式 (5.11) 只含乘积 $Q_1 Q_2$, 发射端与接收端的 Q 可以互相“补偿”。

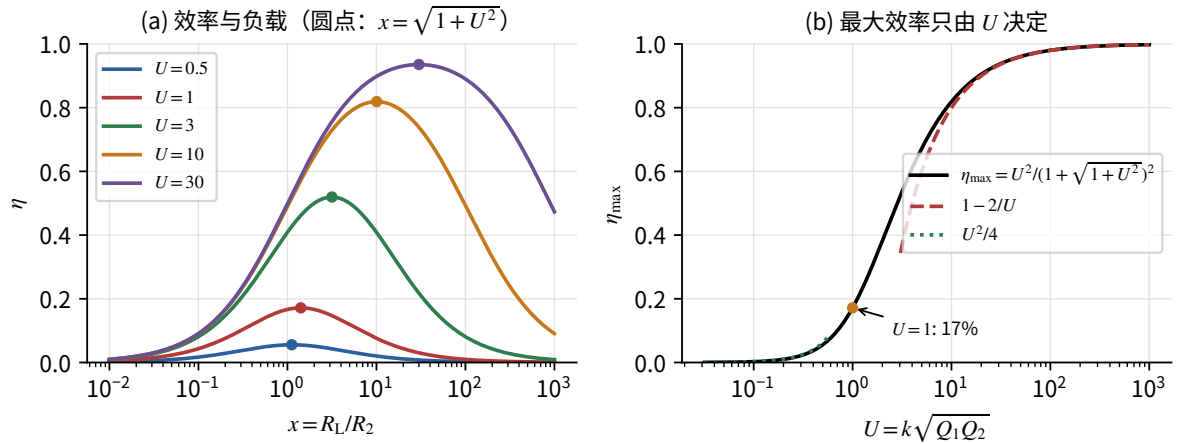


图 5 (a) 谐振时效率随负载比 $x = R_L/R_2$ 的变化 (式 (5.9)), 圆点为最优负载 $x = \sqrt{1+U^2}$; (b) 最大效率只由 $U = k\sqrt{Q_1 Q_2}$ 决定 (式 (5.11)) 及其两个渐近式。脚本中用数值求极值核对了最优点的位

交互演示：调节 $U = k\sqrt{Q_1 Q_2}$ 与负载比 $x = R_L/R_2$ ，观察效率曲线 $\eta(x)$ 及最优负载 $x_{\text{opt}} = \sqrt{1+U^2}$ 的位置；下图标出当前 U 在 $\eta_{\text{max}}(U)$ 曲线上的位置。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 wpt-eff）。

要点：效率只由 $U = kQ$ 决定

两线圈谐振、负载最优时，传输效率只依赖一个无量纲参数 $U = k\sqrt{Q_1 Q_2}$ 。 k 由几何决定，随距离按 d^{-3} 减小；只要 Q 足够大，即使 $k \sim 10^{-3}$ ， U 仍可大于 1。Kurs 等人把 $U > 1$ 称为“强耦合区” [3]。这就是“磁共振”无线输电的核心：**用谐振器的高 Q 弥补几何耦合的弱。**

5.3 为什么必须谐振

如果次级不加电容（不谐振）， $Z_2 = R'_2 + i\omega L_2$ ($R'_2 = R_2 + R_L$)。通常 $\omega L_2 \gg R'_2$ ，反射电阻

$$\text{Re } Z_{\text{ref}} = \frac{\omega^2 M^2 R'_2}{R'^2_2 + \omega^2 L_2^2} \approx \frac{\omega^2 M^2}{R'_2} \cdot \frac{R'^2_2}{\omega^2 L_2^2}.$$

与谐振时的 $\omega^2 M^2/R'_2$ 相比，小了 $(R'_2/\omega L_2)^2 = 1/Q_{2L}^2$ 倍 ($Q_{2L} = \omega L_2/R'_2$ 为次级的负载品质因数)。即使把 R'_2 选成 ωL_2 使 $\text{Re } Z_{\text{ref}}$ 取最大值 $\omega^2 M^2/(2\omega L_2) = \frac{1}{2}k^2\omega L_1$ ，初级的“有效 U^2 ”也只有 $\text{Re } Z_{\text{ref}}/R_1 = \frac{1}{2}k^2 Q_1$ ，比谐振时的 $k^2 Q_1 Q_2$ 小 $2Q_2$ 倍。所以：

- 次级谐振使反射电阻放大约 Q^2 倍。Kurs 等人估计，与非谐振感应耦合相比，效率提高约 $\omega^2/\Gamma^2 \sim 10^6$ [3]；
- 初级谐振的作用是抵消初级线圈的大电抗 ωL_1 ，否则电源必须提供大量无功功率（电源与电抗元件之间来回交换、一个周期内平均为零的那部分功率）（电流大、电压高，电源内阻上的损耗也大）。

5.4 最大效率与最大功率不是一回事

实际电源有内阻 R_s 。电源能给出的最大平均功率（资用功率）为 $P_{\text{avail}} = |V|^2/(8R_s)$ ，在负载阻抗等于 R_s 时取得（阻抗匹配）；此时内阻上消耗同样多的功率，“电源 + 链路”的总效率不超过 50%。式 (5.11) 讨论的是链路效率（电源输出到负载），它与电源内阻无关。设计时往往要在“负载拿到的功率”与“链路效率”之间权衡，例题 2 会看到，在强耦合下二者可以随距离朝相反方向变化。附录 B 给出包括电源内阻、失谐在内的一般公式。

6 频率分裂、临界耦合与耦合模理论

上一节只考察了在 ω_0 处工作。改变驱动频率时会出现一个初看奇怪的现象：两线圈靠得足够近时，传输谱在 ω_0 处反而凹下去，分裂成两个峰。

6.1 无损耦合振子的简正模

定义：简正模

多个耦合振子的一种特殊运动方式：所有坐标以同一频率、固定的振幅比作简谐振动。线性系统的任何自由运动都是各简正模的叠加。

推导：两个相同 LC 回路的简正模

忽略电阻与负载，两相同回路 ($L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$) 的电荷 q_1 、 q_2 满足 (式 (5.1)、(5.2) 的时域形式, $V = 0$)

$$\begin{aligned} L\ddot{q}_1 + M\ddot{q}_2 + \frac{q_1}{C} &= 0, \\ L\ddot{q}_2 + M\ddot{q}_1 + \frac{q_2}{C} &= 0. \end{aligned}$$

两式相加、相减，令 $q_{\pm} = q_1 \pm q_2$ ：

$$\begin{aligned} (L + M)\ddot{q}_+ + \frac{q_+}{C} &= 0, \\ (L - M)\ddot{q}_- + \frac{q_-}{C} &= 0. \end{aligned}$$

两者各自是简谐振动，频率

$$\begin{aligned} \omega_s &= \frac{1}{\sqrt{(L + M)C}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + k}}, \\ \omega_a &= \frac{1}{\sqrt{(L - M)C}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - k}}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

q_+ 对应两回路电流同相的“对称模”（频率较低，记作 ω_- ）， q_- 对应反相的“反对称模”（频率较高，记作 ω_+ ），即 $\omega_{\pm} = \omega_0/\sqrt{1 \mp k}$ 。

物理解释：同相电流时两线圈的磁通相互加强，等效电感变成 $L + M$ ，频率降低；反相时相互削弱，等效电感为 $L - M$ ，频率升高。 $k \ll 1$ 时 $\omega_{\pm} \approx \omega_0(1 \pm k/2)$ ，分裂

$$\omega_+ - \omega_- \approx k\omega_0. \quad (6.2)$$

反过来，在无损模型中可由测得的两个频率求出 k ：由 $1/\omega_{\pm}^2 = (1 \mp k)/\omega_0^2$ ，相减除以相加，

$$k = \frac{\omega_+^2 - \omega_-^2}{\omega_+^2 + \omega_-^2} \quad (\text{无损、两回路相同}). \quad (6.3)$$

注：两回路不相同

一般情形下，代入 $q_n \propto e^{i\omega t}$ 得 $(\omega_1^2 - \omega^2)L_1q_1 = \omega^2Mq_2$ 与 $(\omega_2^2 - \omega^2)L_2q_2 = \omega^2Mq_1$ ($\omega_n^2 = 1/L_nC_n$)，相乘消去 q_1q_2 ：

$$(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) = k^2\omega^4. \quad (6.4)$$

$k \ll 1$ 、 $\omega_1 \approx \omega_2$ 时，两个根之差约为 $\sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + k^2\omega_0^2}$ ：失谐只会使分裂变大，两回路调谐到同一频率时分裂最小。这是物理学中普遍出现的“避免交叉”。所以用分裂测 k 时，两回路必须先调到同一频率（Kurs 等人通过微调线圈高度 h 做到这一点 [3]）。

6.2 有损耗时的传输谱：临界耦合

实验上测“传输谱”：用信号源（内阻 R_s ）驱动发射回路，测接收回路负载 R_L 上的功率，与电源资用功率之比称为功率传输系数

$$\begin{aligned} T(\omega) &= \frac{\frac{1}{2}|I_2|^2 R_L}{|V|^2/(8R_s)} \\ &= \frac{4R_s R_L \omega^2 M^2}{|Z_1 Z_2 + \omega^2 M^2|^2}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

第二个等号用了式 (5.6)，这里 Z_1 包含 R_s ， Z_2 包含 R_L 。 $0 \leq T \leq 1$ 。

假设：对称弱耦合近似

两回路完全相同：总串联电阻都为 R （本征 + 外电路），外电路电阻 $R_s = R_L \equiv R_e$ ；只考察谐振附近 $|\Delta| = |\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ ； $k \ll 1$ 。

推导：峰的位置与高度

在谐振附近，由式 (4.4)， $Z_1 = Z_2 \approx R + 2iL\Delta$ ， $\omega M \approx \omega_0 M$ （相对误差 $\mathcal{O}(\Delta/\omega_0)$ ）。引入三个“率”（单位 s^{-1} ）：

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{R}{2L} = \frac{\omega_0}{2Q_L}, \\ \Gamma_e &= \frac{R_e}{2L}, \\ \kappa &= \frac{\omega_0 M}{2L} = \frac{k\omega_0}{2}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$Q_L = \omega_0 L/R$ 为负载品质因数。注意这里的 Γ 是计入外电路的总衰减率（对应 Q_L ），与符号表中的无载衰减率不同。式 (6.5) 分子分母同除以 $(2L)^4$ ：

$$\begin{aligned} T(\Delta) &= \frac{4\Gamma_e^2 \kappa^2}{|(\Gamma + i\Delta)^2 + \kappa^2|^2} \\ &= \frac{4\Gamma_e^2 \kappa^2}{F}, \\ F &\equiv (\kappa^2 + \Gamma^2 - \Delta^2)^2 + 4\Gamma^2 \Delta^2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

分母 F 是 $y = \Delta^2$ 的二次函数： $F = (\kappa^2 + \Gamma^2 - y)^2 + 4\Gamma^2 y$ ， $dF/dy = -2(\kappa^2 + \Gamma^2 - y) + 4\Gamma^2 = 0$ 给出 $y = \kappa^2 - \Gamma^2$ 。

- 若 $\kappa > \Gamma$ ， T 在 $\Delta = \pm\sqrt{\kappa^2 - \Gamma^2}$ 处有两个峰，峰间距

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{\text{peak}} &= 2\sqrt{\kappa^2 - \Gamma^2} \\ &= \omega_0 \sqrt{k^2 - \frac{1}{Q_L^2}}; \end{aligned} \quad (6.8)$$

峰值处 $F = 4\Gamma^4 + 4\Gamma^2(\kappa^2 - \Gamma^2) = 4\Gamma^2 \kappa^2$ ，所以 $T_{\text{peak}} = (\Gamma_e/\Gamma)^2$ ，与 κ 无关；而中心处 $T(0) = 4\Gamma_e^2 \kappa^2 / (\kappa^2 + \Gamma^2)^2$ 随 κ 增大而减小。

- 若 $\kappa \leq \Gamma$ ， $y \geq 0$ 范围内 F 单调增，只有 $\Delta = 0$ 一个峰。

分界点 $\kappa = \Gamma$ ，即

$$k_c = \frac{1}{Q_L}, \quad (6.9)$$

称为临界耦合。此时 $T(0)$ 恰好取得它对 κ 的最大值 $(\Gamma_e/\Gamma)^2$ 。

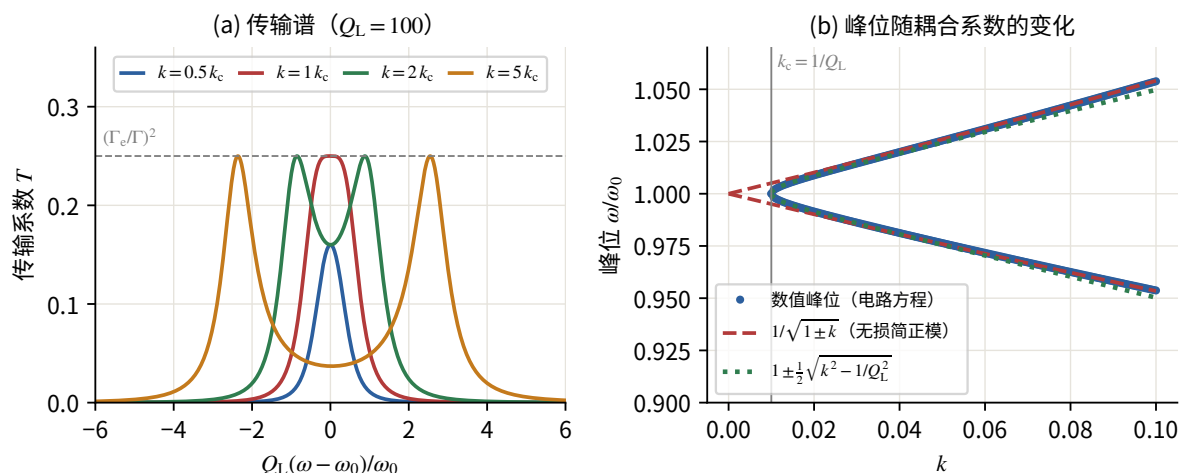


图 6 对称两谐振器的功率传输谱 ($Q_L = 100$, $Q_e = 200$, 由完整电路公式 (6.5) 计算)。(a) 欠耦合 ($k < k_c$) 时单峰且峰值较低; $k \geq k_c$ 后峰值固定为 $(\Gamma_e/\Gamma)^2$, 并分裂成两峰。(b) 数值求得的峰位与无损简正模 (6.1)、弱耦合近似 (6.8) 的比较: 大 k 时前者准确, k 接近 k_c 时后者准确。

两个极限的统一 式 (6.1) 在 k 大时准确但忽略了损耗; 式 (6.8) 计入了损耗但只到 k 的一阶。实验上从峰位求 k , 可以把两者合起来: 先用无损公式 (6.3) 算出 k_1 , 再做损耗修正

$$k^2 \approx k_1^2 + \frac{1}{Q_L^2}, \quad k_1 = \frac{f_+^2 - f_-^2}{f_+^2 + f_-^2}. \quad (6.10)$$

$k \gg 1/Q_L$ 时修正项可忽略, 回到式 (6.3); $k \ll 1$ 时 $k_1 \approx (f_+ - f_-)/f_0$, 回到式 (6.8)。这是一个“两头都对”的拼接公式, 不是严格推导; scripts/fig_split.py 用完整电路方程数值核对, 在 $Q_L = 100$ 、 $1.2k_c < k < 0.1$ 范围内相对误差小于 10^{-4} ; 在实验题的参数下 ($Q_L = 280$, k 从 0.005 到 0.23) 小于 10^{-5} (见 VERIFY.md)。

交互演示: 传输谱随耦合系数 k 与负载品质因数 Q_L 的变化。读数给出临界耦合 $k_c = 1/Q_L$ 、数值峰位与式 (6.1)、(6.8) 的预测。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 wpt-split)。

注: 临界耦合与最大效率不是同一个条件

$k_c = 1/Q_L$ 是在电源与负载电阻固定时“负载拿到资用功率最多”的条件; 第 5.2 节的最优条件是“效率最高”。两者都含“耦合 $\approx$ 损耗”的意思, 但前者的 Q_L 包含了电源内阻和负载。在 $k > k_c$ 的“过耦合”区, 固定频率 ω_0 处负载功率反而下降, 要追踪分裂后的峰才能拿到最大功率 (例题 2)。

6.3 耦合模方程: 两谐振器之间的能量交换

传输谱是频域的描述。时域中发生的是: 能量在两个谐振器之间来回转移, 像两个弱耦合单摆之间的“拍”。描述这一过程最方便的工具是耦合模方程 (coupled-mode theory), Kurs 等人的论文就是用它写的 [3, 15]。下面从电路方程推出它。

假设：慢变包络近似

- 两回路相同，谐振角频率 ω_0 ；
- 弱耦合与低损耗： $k \ll 1$, $1/Q \ll 1$ ；
- 电流写成 $I_n(t) = \text{Re}[A_n(t)e^{i\omega_0 t}]$ ，复包络 $A_n(t)$ 在一个周期内变化很小： $|\dot{A}_n| \sim (\kappa, \Gamma)|A_n| \ll \omega_0|A_n|$ 。

推导：由电路方程到耦合模方程

回路 1 的电压方程 $L\dot{I}_1 + RI_1 + q_1/C + MI_2 = 0$ 对时间求导 ($\dot{q}_1 = I_1$):

$$L\ddot{I}_1 + R\dot{I}_1 + \frac{I_1}{C} + M\ddot{I}_2 = 0.$$

第一步，代入 $I_n = A_n e^{i\omega_0 t}$ (实际电流是它的实部；方程是线性实系数的，复数解的实部也是解)。对时间求导：

$$\begin{aligned}\dot{I}_n &= (\dot{A}_n + i\omega_0 A_n)e^{i\omega_0 t}, \\ \ddot{I}_n &= (\ddot{A}_n + 2i\omega_0 \dot{A}_n - \omega_0^2 A_n)e^{i\omega_0 t}.\end{aligned}$$

第二步，代入并约去 $e^{i\omega_0 t}$ ，用 $1/C = \omega_0^2 L$ 消去 $-\omega_0^2 LA_1 + A_1/C = 0$:

$$\begin{aligned}L(\ddot{A}_1 + 2i\omega_0 \dot{A}_1) + R(\dot{A}_1 + i\omega_0 A_1) \\ + M(\ddot{A}_2 + 2i\omega_0 \dot{A}_2 - \omega_0^2 A_2) = 0.\end{aligned}$$

第三步，按小量的阶数取舍。设 $\kappa \sim \Gamma \sim \epsilon\omega_0$ ($\epsilon \ll 1$)，于是 $|\dot{A}| \sim \epsilon\omega_0|A|$ 、 $k \sim \epsilon$ 、 $R = 2L\Gamma \sim \epsilon\omega_0 L$ ；以 $\omega_0^2 L|A|$ 为基准量级： $2i\omega_0 L\dot{A}_1$ 、 $i\omega_0 RA_1$ 、 $-\omega_0^2 MA_2$ 都是 ϵ 阶，保留； $L\ddot{A}_1$ 、 $R\dot{A}_1$ 、 $2i\omega_0 M\dot{A}_2$ 是 ϵ^2 阶，舍去； $M\ddot{A}_2$ 是 ϵ^3 阶，舍去。剩下

$$2i\omega_0 L\dot{A}_1 + i\omega_0 RA_1 - \omega_0^2 MA_2 = 0.$$

第四步，除以 $2i\omega_0 L$ ，用 $\Gamma = R/2L$ 、 $\kappa = \omega_0 M/2L$ ；回路 2 同理：

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= -\Gamma A_1 - i\kappa A_2, \\ \dot{A}_2 &= -\Gamma A_2 - i\kappa A_1.\end{aligned}\tag{6.11}$$

方程 (6.11) 只含两个参数：衰减率 $\Gamma = \omega_0/(2Q)$ 与耦合率 $\kappa = k\omega_0/2$ 。每个回路的储能（电感能与电容能之和，在一个周期内近似不变）为 $W_n = \frac{1}{2}L|A_n|^2$ ，所以 $|A_n|^2$ 正比于能量。Kurs 等人直接用“能量振幅” $a_n = \sqrt{L/2} A_n$ ($|a_n|^2 = W_n$)，方程形式相同；他们写作 $+i\kappa$ ，这只是电流正方向约定不同（相当于 $M \rightarrow -M$ ），物理量只依赖 $|\kappa|$ 和 κ^2 。

推导：能量的来回交换

设 $t = 0$ 时能量全在回路 1： $A_1(0) = A_0$ ， $A_2(0) = 0$ 。令 $A_n = B_n e^{-\Gamma t}$ ，方程变成 $\dot{B}_1 = -i\kappa B_2$ 、 $\dot{B}_2 = -i\kappa B_1$ ，故 $\ddot{B}_1 = -\kappa^2 B_1$ ，解为 $B_1 = A_0 \cos \kappa t$ ， $B_2 = -iA_0 \sin \kappa t$ 。所以

$$\begin{aligned}W_1(t) &= W_0 \cos^2(\kappa t) e^{-2\Gamma t}, \\ W_2(t) &= W_0 \sin^2(\kappa t) e^{-2\Gamma t}.\end{aligned}\tag{6.12}$$

能量在 $t = \pi/(2\kappa)$ 时第一次全部转到回路 2, 交换的周期为 π/κ ; 同时总能量以 $e^{-2\Gamma t} = e^{-\omega_0 t/Q}$ 衰减。

检验：与简正模一致

无损时, 耦合模方程的本征解 $A_n \propto e^{i\nu t}$: 由 $i\nu A_1 = -i\kappa A_2$, $i\nu A_2 = -i\kappa A_1$ 得 $\nu = \mp\kappa$, 对应 $A_2 = \pm A_1$ 。实际频率为 $\omega_0 + \nu$: 对称模 $\omega_0 - \kappa = \omega_0(1 - k/2)$, 反对称模 $\omega_0(1 + k/2)$, 正是式 (6.1) 在 $k \ll 1$ 时的展开。能量交换就是这两个简正模之间的拍, 拍频 $2\kappa = k\omega_0$ 。

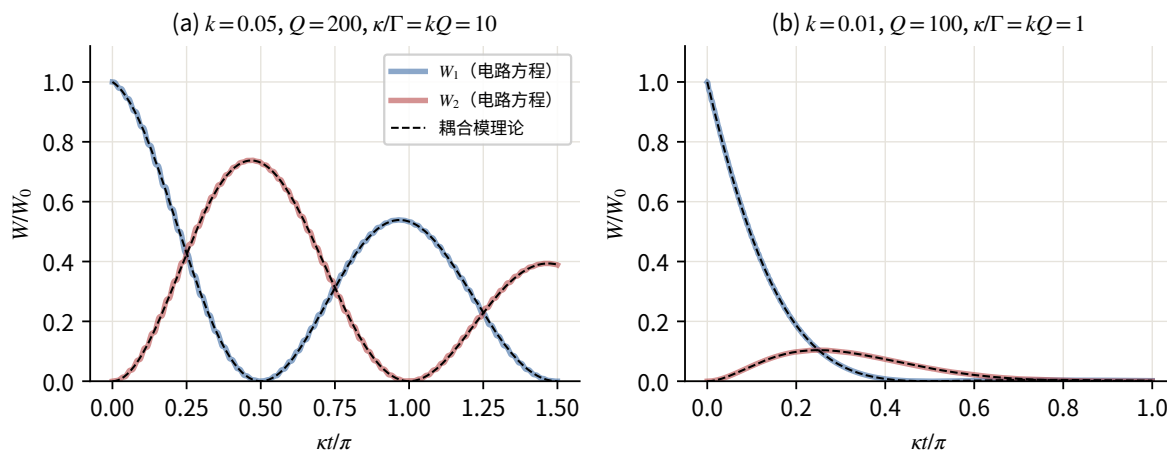


图 7 两耦合 RLC 回路的自由振荡: $t = 0$ 时能量全在回路 1。粗线为完整电路方程 (四阶常微分方程组, 高阶自适应龙格-库塔法积分) 给出的各回路储能, 虚线为耦合模理论 (6.12)。(a) $\kappa/\Gamma = kQ = 10$: 能量来回交换多次; (b) $\kappa/\Gamma = 1$: 第一次转移还没完成, 能量已大部分耗散。

图 7 给出了 $U = kQ = \kappa/\Gamma$ 最直观的含义: 能量从一个谐振器转到另一个所需的时间 $\sim 1/\kappa$, 与能量在谐振器中存活的时间 $\sim 1/\Gamma$ 之比。 $\kappa/\Gamma \gg 1$ 时, 能量在被耗散之前就已经转移过去; 接收端再用一个合适的负载把它“取走”, 效率就高。

交互演示：两耦合 RLC 回路自由振荡的实时数值积分 (完整电路方程, 四阶龙格-库塔法)。调节 k 与 Q , 比较两回路储能 $W_1(t)$ 、 $W_2(t)$ 与耦合模理论的包络 $\cos^2(\kappa t)e^{-2\Gamma t}$ 、 $\sin^2(\kappa t)e^{-2\Gamma t}$ 。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 wpt-beat)。

推导：耦合模理论中的稳态效率

在耦合模方程中加入驱动与负载: 负载使回路 2 多一个衰减率 $\Gamma_W = R_L/(2L_2)$, 回路 1 加驱动项 $F e^{i\omega_0 t}$ 。两回路本征衰减率记为 Γ_1 、 Γ_2 。在 ω_0 处的稳态 ($\dot{A}_n = 0$), 由回路 2 的方程 $0 = -(\Gamma_2 + \Gamma_W)A_2 - i\kappa A_1$ 得

$$\frac{|A_2|^2}{|A_1|^2} = \frac{\kappa^2}{(\Gamma_2 + \Gamma_W)^2}.$$

各部分的耗散功率等于“ $2 \times$ 衰减率 $\times$ 能量” (因能量衰减率是振幅衰减率的 2 倍), 所以

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2\Gamma_W W_2}{2\Gamma_1 W_1 + 2(\Gamma_2 + \Gamma_W)W_2} \\ &= \frac{\Gamma_W \kappa^2}{\Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_W)^2 + (\Gamma_2 + \Gamma_W)\kappa^2} \end{aligned}$$

(两回路 L 不同时 $W_n = \frac{1}{2}L_n|A_n|^2$, 结果不变, 见附录 B)。令 $x = \Gamma_W/\Gamma_2 = R_L/R_2$, $U^2 = \kappa^2/(\Gamma_1\Gamma_2)$, 分子分母同除以 $\Gamma_1\Gamma_2^2$: $\eta = xU^2/[(1+x)^2 + (1+x)U^2]$, 与式 (5.9) 完全相同。其中

$$\begin{aligned} U &= \frac{\kappa}{\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}} \\ &= \frac{k\omega_0/2}{\sqrt{(\omega_0/2Q_1)(\omega_0/2Q_2)}} \\ &= k\sqrt{Q_1Q_2}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

要点：两种语言，同一物理

电路语言 (k 、 Q 、反射阻抗) 与耦合模语言 (κ 、 Γ) 在弱耦合、高 Q 下完全等价: $\kappa = k\omega_0/2$, $\Gamma = \omega_0/2Q$, $U = \kappa/\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2} = k\sqrt{Q_1Q_2}$ 。耦合模语言的好处是不依赖具体电路, 同样适用于声学、光学、原子等任何两个耦合的谐振模; 电路语言在 k 不小 (如手机充电) 时仍然精确。

7 距离、安全与多线圈

7.1 效率随距离的骤降与“中程”的含义

对两个相同线圈 (半径 a , 品质因数 Q), 远场下由式 (3.14),

$$U = kQ \approx \frac{\pi Q}{2\Lambda} \left(\frac{a}{d}\right)^3. \quad (7.1)$$

$U = 1$ ($\eta_{\max} = 17\%$) 对应的距离

$$d_1 \approx a \left(\frac{\pi Q}{2\Lambda}\right)^{1/3}. \quad (7.2)$$

$Q = 1000$ 、 $\Lambda = 5$ 时 $d_1 \approx 6.8a$ 。这就是 Kurs 等人所说的“中程”: 传输距离是线圈尺寸的几倍, 而不是几十倍。因为 $d_1 \propto Q^{1/3}$, 把距离加倍需要把 Q 提高 8 倍。反过来, d 增大一倍, U 降为 $1/8$; 在 $U \lesssim 1$ 的区域 $\eta_{\max} \approx U^2/4 \propto d^{-6}$, 效率急剧下降。

图 8 把这一套理论用于 Kurs 的实验 (细节与分项数字见例题 1): 按原文的准静态模型 (它复现了原文的理论谐振频率) 算出的 U 比实验值系统地偏大约 10% (最大约 30%), $\eta_{\max}$ 与实验的差别在 0.1 以内。注意 2 m 处 $\omega D/c = 0.41$ 已不算很小: 严格的偶极场中近场项的修正因子 $\sqrt{1 + (\omega D/c)^2} \approx 1.08$, 所以准静态近似在最远的几个点上有 10% 量级的误差。

7.2 为什么是“磁”共振: 近场中的电场与磁场

一个尺度远小于波长的电流环, 在 $r \ll c/\omega$ 的近场区, 磁场基本就是静磁偶极场; 电场则完全由变化的磁通感应产生。

推导：近场中 $E/(cB) \approx \omega r/c$

取线圈 (磁偶极矩 m , 沿 z 轴) 的赤道面, 在其中以轴为心取半径为 r ($a \ll r \ll c/\omega$) 的圆。由法拉第定律 $2\pi r E_\varphi = -\frac{d}{dt}\Phi(r)$, $\Phi(r)$ 是穿过此圆的磁通。

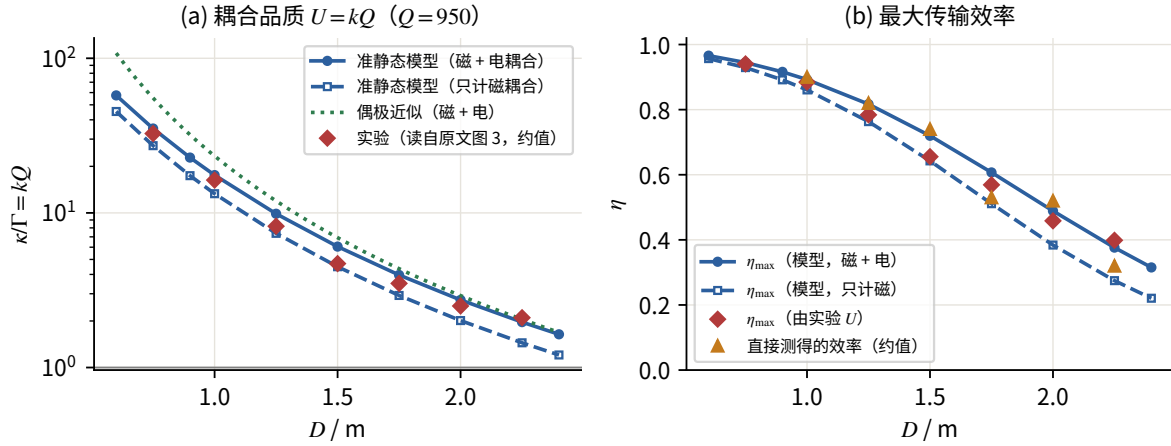


图 8 复算 Kurs 等人的实验 [3]。(a) $U = \kappa/\Gamma = kQ$ 随两线圈中心距 D 的变化, $Q = 950$ (实测); (b) 最大效率 $\eta_{\max}(U)$ 。实线: 本讲按原文的准静态模型 (螺旋线上余弦分布的电流与正弦分布的电荷, 数值计算 L 与 M , `scripts/helix_kurs.py`) 得到的结果, 计入磁耦合与电耦合; 虚线: 只计磁耦合; 点线: 例题 1 的偶极近似。菱形与三角形是从原文图 3、图 4 读出的实验值 (约值, 读数误差约 ± 0.3 与 ± 0.02), 只用于对照。

第一步, 求 $\Phi(r)$ 。赤道面上远离线圈处, 偶极场垂直于该面, $B_z(s) = -\mu_0 m / (4\pi s^3)$ (与 m 反向)。磁感线是闭合的, 穿过整个赤道面的总磁通为零, 所以圆内的磁通等于圆外回流磁通的反数:

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= - \int_r^\infty B_z(s) 2\pi s \, ds \\ &= \int_r^\infty \frac{\mu_0 m}{4\pi s^3} 2\pi s \, ds = \frac{\mu_0 m}{2r}.\end{aligned}$$

(若粗略地取 $\Phi \sim \pi r^2 B(r)$, 会低估一半: 圆内靠近线圈处的场远比 $B(r)$ 强。)

第二步, 交变时 $|E_\varphi| = \omega\Phi/(2\pi r) = \mu_0\omega m/(4\pi r^2)$, 而该处 $|B| = \mu_0 m/(4\pi r^3)$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{|E|}{c|B|} &= \frac{\omega r}{c}, \\ \frac{\text{电场能密度}}{\text{磁场能密度}} &= \frac{\varepsilon_0 E^2/2}{B^2/2\mu_0} \\ &= \left(\frac{E}{cB}\right)^2 = \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2 \ll 1.\end{aligned}$$

这正是振荡磁偶极子近场的结果; 在其他方向上 $E \propto \sin\theta$ 更小、 B 更大 (轴线上 $E=0$), 比值更小, 所以赤道面上的值是上限。(辐射区的电磁波中 $E=cB$, 两种能量相等。) 10 MHz、 $r=1\text{ m}$ 时 $\omega r/c \approx 0.21$, 电场能不超过磁场能的约 4%。

所以, 只要谐振器的电场能被“关”在电容内部 (例如在单匝线圈上焊一个平板电容), 线圈周围的近场就几乎是纯磁场。这带来两点好处 [3, 4]:

- **与环境的相互作用弱:** 常见材料 (木材、塑料、水、人体) 是非磁性的 (相对磁导率 ≈ 1), 磁场几乎不受影响地穿过它们; 它们只通过感应涡流吸收能量, 而涡流损耗正比于 $\sigma\omega^2 B^2$, 对弱导电物体很小。若谐振器的电场伸到周围空间, 介电物体 (ε_r 大的水、人体) 会显著改变电容, 使谐振频率漂移。Kurs 等人观察到: 人、金属、木头等放在两线圈之间时, 传输“看

不出受影响”；只有放到距线圈几厘米以内时才有明显影响，其中铝箔、泡沫塑料、人体主要使频率移动，纸板、木头、PVC 则使 Q 下降 [3]。

- **安全：**人体组织吸收的功率主要由组织内的电场决定。外加电场在导电组织表面被大幅屏蔽，而外加磁场在组织内感应出的电场只有 $\sim \omega r B$ 。

Kurs 的自谐振线圈是一个反例：它的电场并没有关在电容里，而是分布在线圈两端之间。原文估算，以 60 W 传输 2 m 时，两线圈正中间的电场有效值约 210 V/m，磁场强度有效值约 1 A/m；近场中的电场主要来自线圈的电偶极矩（比磁偶极的贡献大一到两个数量级）。作者建议改用电容加载的单匝线圈并降低频率，以满足安全标准 [3]。作为对照，国际非电离辐射防护委员会 (ICNIRP) 2020 年导则对公众全身暴露、0.1 MHz–30 MHz 给出的参考水平为 $E = 300/f_M^{0.7}$ V/m、 $H = 2.2/f_M$ A/m (f_M 为以 MHz 为单位的频率，有效值，30 分钟平均)，在 9.9 MHz 分别为 60 V/m 与 0.22 A/m [16]。Kurs 装置中点的场强超过这两个参考水平数倍。参考水平是保守的“筛查值”，超过它并不意味着一定超过基本限值（比吸收率），但需要更细致的评估。

定义：比吸收率 (SAR)

单位质量组织吸收的电磁功率， $SAR = \sigma \overline{E_{in}^2} / \rho_m$ （单位 W/kg）， E_{in} 为组织内部的电场， ρ_m 为组织密度。ICNIRP 2020 对公众的基本限值：全身平均 0.08 W/kg（30 分钟平均），头部与躯干局部 2 W/kg（10 g 平均） [16]。

推导：均匀交变磁场中导电球的涡流损耗

半径为 R_b 、电导率为 σ 的球放在均匀磁场 $B_0 \cos \omega t \hat{z}$ 中。假设球远小于组织中的趋肤深度（涡流自身的磁场可忽略），并忽略位移电流。以 z 轴为轴、半径为 s 的圆上，由法拉第定律 $2\pi s E_\varphi = -\pi s^2 \dot{B}$ ，感应电场振幅 $E_\varphi = \frac{1}{2} \omega B_0 s$ 。它沿圆周方向，在球面上处处与球面相切，不需要表面电荷来阻止电流流出，所以这就是球内的电场。平均吸收功率

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \int \frac{1}{2} \sigma E_\varphi^2 dV = \frac{\sigma \omega^2 B_0^2}{8} \int s^2 dV \\ &= \frac{\sigma \omega^2 B_0^2}{8} \cdot \frac{8\pi R_b^5}{15} = \frac{\pi}{15} \sigma \omega^2 B_0^2 R_b^5, \end{aligned}$$

其中 $\int s^2 dV = \int (x^2 + y^2) dV = \frac{2}{3} \int r^2 dV = \frac{2}{3} \cdot \frac{4\pi R_b^5}{5}$ 。除以质量 $\frac{4}{3}\pi R_b^3 \rho_m$ ：

$$SAR = \frac{\sigma \omega^2 B_0^2 R_b^2}{20 \rho_m}. \quad (7.3)$$

注：与“导体球在交变磁场中的涡流”的区别

上面的公式适用于球远小于趋肤深度 ($R_b \ll \delta$) 的极限：涡流自身的磁场可以忽略，损耗 $\propto \sigma \omega^2 R_b^5$ 。第 40 届复赛中交变线圈下导体球的涡流与发热，处理的是良导体、 $\delta \ll R_b$ 的相反极限：涡流把磁场挡在球外，电流只在表层流动，损耗由表面电阻决定。两者不同构。人体在 10 MHz 附近 $\delta \sim 0.2$ m，与躯干尺寸相当，正处在两个极限之间，所以下面只能作量级估计。

检验：量级估算（只作定性参考）

取 Kurs 装置中点的 $H_{\text{rms}} = 1 \text{ A/m}$ ($B_0 = \sqrt{2}\mu_0 H_{\text{rms}} = 1.8 \times 10^{-6} \text{ T}$)， $f = 9.9 \text{ MHz}$ ，躯干用半径 0.15 m 的球代替， $\sigma \approx 0.6 \text{ S/m}$ （肌肉在 10 MHz 附近的电导率约 0.62 S/m [17, 18]）， $\rho_m = 1000 \text{ kg/m}^3$ ： $\text{SAR} \approx 8 \times 10^{-3} \text{ W/kg}$ ，约为全身限值的 $1/10$ 。组织在 10 MHz 的趋肤深度 $\sqrt{2/(\omega\mu_0\sigma)} \approx 0.2 \text{ m}$ ，与球的尺寸相当，所以这只是量级估计。外加电场 210 V/m 在人体内产生的电场约为 $3E_{\text{ext}} \cdot \omega\epsilon_0/\sigma \sim 1 \text{ V/m}$ （导体对外电场的屏蔽），由它造成的 SAR 比磁场感应的小一个量级以上。真实人体的 SAR 要用数值人体模型计算，并考虑电场集中的局部区域。

7.3 中继线圈

$k \propto d^{-3}$ 意味着：在两线圈中点再放一个相同的谐振线圈（不接电源和负载，只作“中继”），每段距离减半，耦合系数增大约 8 倍。中继线圈虽然多了一份损耗，但整体效率可以大幅提高。

推导：三线圈链的效率（只计相邻耦合）

三个相同线圈（电阻 R ）沿轴排列，1-2、2-3 的互感为 M ，忽略 1-3 的直接耦合，负载 R_L 接在线圈 3 上，都在 ω_0 谐振。从后往前用反射阻抗：线圈 3 反射到线圈 2 的电阻为 $\omega_0^2 M^2/(R+R_L)$ ；线圈 2（含 3）反射到线圈 1 的电阻为 $\omega_0^2 M^2/[R + \omega_0^2 M^2/(R+R_L)]$ 。每一级都按式 (5.7) 的方式分配功率。记 $u = \omega_0 M/R = kQ$ ， $x = R_L/R$ ， $r_2 = u^2/(1+x)$ ， $r_1 = u^2/(1+r_2)$ ：

$$\eta_{\text{relay}} = \frac{r_1}{1+r_1} \cdot \frac{r_2}{1+r_2} \cdot \frac{x}{1+x}. \quad (7.4)$$

三个因子依次是：功率从线圈 1 传入线圈 2 的比例、从 2 传入 3 的比例、在 3 中进入负载的比例。

$u \gg 1$ 时可以求出最优负载的渐近形式。令 $x = \alpha u$ （ α 为 1 的量级），则 $r_2 \approx u/\alpha$ ， $r_1 \approx \alpha u(1 - \alpha/u)$ ，三个因子分别约为 $1 - 1/(\alpha u)$ 、 $1 - \alpha/u$ 、 $1 - 1/(\alpha u)$ ：

$$1 - \eta_{\text{relay}} \approx \frac{1}{u} \left(\frac{2}{\alpha} + \alpha \right) \xrightarrow{\alpha=\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}}{u}.$$

在 $U \gg 1$ （从而 $u \approx 8U \gg 1$ ，远场、同样的总距离）时，与两线圈的 $1 - \eta_{\text{max}} \approx 2/U$ 相比，中继后的损耗约为 $2\sqrt{2}/(8U) \approx 0.35/U$ ，比直接传输小约 6 倍。在 $U \lesssim 1$ 的远距离区，直接传输的效率按 $U^2/4 \propto d^{-6}$ 骤降，而中继的两段链路仍可处于 $u > 1$ 区，提升倍数可以大得多（例题 4 中从 4% 提高到约 50%）。图 9 是数值结果。远场中直接耦合 k_{13} 约为 k_{12} 的 $1/8$ （例题 4 的参数下为 $1/6.5$ ），对效率的影响很小（例题 4）。

交互演示：两相同单匝线圈的最大效率随距离的变化：可调线圈的 Q （指导线半径 $b = 0.01a$ 时的值；改变 b 时按 $Q \propto \Lambda b$ 自动换算，见式 (4.6)、(3.13)) 与导线粗细，比较直接传输与在中点加中继线圈两种方案，读出 $U = 1$ 对应的距离。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 wpt-distance）。

多个接收器 一个发射线圈同时给几个接收器供电时，若接收器之间的耦合可以忽略，每个接收器各自贡献一个反射电阻，它们串联相加： $Z_{\text{in}} = R_1 + \sum_i \omega_0^2 M_i^2/(R_{2i} + R_{Li})$ 。总效率为 $\eta =$

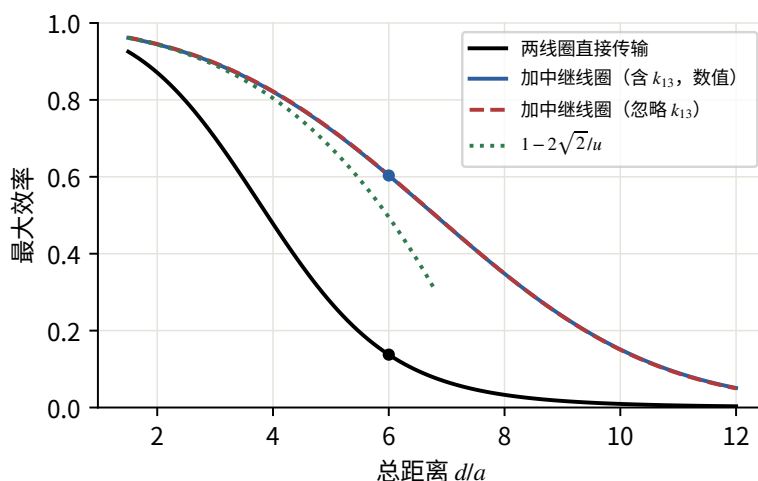


图 9 加中继线圈前后的最大效率 (单匝圆环 $a = 0.20 \text{ m}$, $b = 2 \text{ mm}$, $Q = 600$, 中继在中点; 互感用精确式)。实线: 完整 3×3 电路方程 (含 1-3 直接耦合) 对负载数值优化; 虚线: 式 (7.4) (忽略 k_{13}); 点线: 渐近式 $1 - 2\sqrt{2}/u$ 。

$\sum_i \frac{\text{Re } Z_{\text{ref},i}}{R_1 + \sum_j \text{Re } Z_{\text{ref},j}} \cdot \frac{R_{Li}}{R_{2i} + R_{Li}}$ 。对两个相同接收器, $\text{Re } Z_{\text{ref}}$ 加倍, 相当于把 U^2 换成 $2U^2$, 总效率可以高于单个接收器的效率。接收器之间若也有耦合, 会使谐振频率移动, 需要重新调谐。Kurs 等人 2010 年在实验上研究了一个发射线圈同时给多个接收器供电的问题 [19]。

要点: 距离与安全小结

- $U \propto Q(a/d)^3$, 有效距离 $d_1 \propto aQ^{1/3}$; 距离超过 d_1 后效率按 d^{-6} 下降。
- 近场中电场能与磁场能之比不超过 $(\omega r/c)^2$; 把电场关进电容, 可使谐振器与环境、人体的相互作用都很弱。组织中的涡流损耗 $\propto \sigma \omega^2 B^2 R_b^5$ 。
- 中继线圈把一段远距离拆成两段近距离: $U \gg 1$ 时损耗从 $2/U$ 降到 $2\sqrt{2}/u \approx 0.35/U$ (远场); $U \lesssim 1$ 时提升更大。

8 决赛风格例题

例题中的数值均由 `scripts/example_numbers.py` 计算并用 `assert` 交叉核对。常数取 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$, $Z_0 = \mu_0 c = 376.7 \Omega$, 铜的电阻率 $\rho = 1.68 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ (例题 1 按原文取 $\sigma = 5.9 \times 10^7 \text{ S/m}$)。

例题 1: 复算 Kurs 等人 2007 年的实验

两只相同的铜螺旋线圈: 半径 $a = 30 \text{ cm}$, 高 $h = 20 \text{ cm}$, $n = 5.25$ 匝, 导线截面半径 $b = 3 \text{ mm}$, 铜电导率 $\sigma = 5.9 \times 10^7 \text{ S/m}$ 。线圈两端开路, 靠分布电感与分布电容在 $f_0 = 9.90 \text{ MHz}$ 谐振, 实测品质因数 $Q = 950$ 。设导线总长为 l , 以导线中点为原点沿导线取弧长坐标 $s \in [-l/2, l/2]$, 最低谐振模的电流分布为 $I(s, t) = \text{Re}[I_0 \cos(\pi s/l) e^{i\omega t}]$ (两端电流为零)。按这一电流分布算得线圈的有效电感 (定义为使磁能等于 $\frac{1}{2} L |I_0|^2$) $L = 10.34 \mu\text{H}$ 。两线圈同轴放置, 中心距 $D = 2.0 \text{ m}$ 。

1. 求导线长度 l 与趋肤深度 δ 。证明在上述电流分布下, 导线的平均欧姆功率可写成

$\frac{1}{2}R_{\Omega}|I_0|^2$, 并求 R_{Ω} 。

2. 把螺旋线看成 n 个半径为 a 的圆环, 每一小段导线对磁偶极矩的贡献正比于该处的电流。求线圈的磁偶极矩振幅 m (用 I_0 表示) 与相应的辐射电阻 $R_{\text{rad},m}$ 。
3. 由电荷守恒求导线上的线电荷密度, 进而求线圈沿轴向的电偶极矩振幅 p (设螺距均匀) 与相应的辐射电阻 $R_{\text{rad},e}$ 。
4. 求理论品质因数, 并与实测值 950 比较。若差别全部归因于导线表面氧化层使有效电导率降低, 估计有效电导率。
5. 求 $D = 2.0 \text{ m}$ 时两线圈的磁耦合互感 M_m (偶极近似)。自谐振线圈还有电偶极矩, 两线圈之间也有电耦合。由 Kurs 等人原文式 (8) 的远场极限可得, 电耦合使等效互感增加 $M_e = -\frac{2p_{S,D}p_D}{4\pi\epsilon_0 D^3 I_{S,D}}$, 其中 $p_{S,D}$ 、 $I_{S,D}$ 是两线圈电偶极矩与电流 (I_0) 的复振幅。求 M_e/M_m , 并求耦合系数 k 、 U 与最大效率。
6. 实验中负载是一只灯泡 (设额定亮度时电阻 $R_b = 240 \Omega$), 接在一个半径 15 cm 、导线半径 1 mm 的单匝环上, 该环靠近接收线圈, 二者互感为 M_B 。要使效率最大, M_B 应为多少? 这个负载环还会给接收线圈带来什么副作用?
7. 灯泡得到 60 W 时, 估算两线圈中点处磁场强度的有效值, 与原文的计算值 1 A/m 及 ICNIRP 公众参考水平 0.22 A/m (9.9 MHz) 比较。

解答

(1) 每匝长 $2\pi a$, 再计入螺距: $l = \sqrt{(2\pi an)^2 + h^2} = 9.90 \text{ m}$ 。 $\omega = 2\pi f_0 = 6.22 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$, $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu_0\sigma)} = 20.8 \mu\text{m} \ll b$, 可用式 (4.6)。长 ds 的一小段导线电阻为 $dR = \rho ds/(2\pi b\delta)$, 平均功率 $\frac{1}{2}|I_0|^2 \cos^2(\pi s/l) dR$ 。沿导线积分, $\cos^2$ 的平均值为 $\frac{1}{2}$:

$$R_{\Omega} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho l}{2\pi b\delta} = 0.214 \Omega. \quad (8.1)$$

这与原文式 (6) $R_{\Omega} = \sqrt{\mu_0\omega/2\sigma} l/(4\pi b)$ 相同。

(2) 弧长 ds 对应的角度为 ds/a (忽略螺距), 所以一小段导线贡献的磁矩为 $dm = I(s) \cdot \pi a^2 \cdot \frac{ds}{2\pi a}$ 。积分:

$$\begin{aligned} m &= \frac{a}{2} I_0 \int_{-l/2}^{l/2} \cos \frac{\pi s}{l} ds = \frac{a}{2} I_0 \frac{2l}{\pi} \\ &= \frac{al}{\pi} I_0 \approx 2na^2 I_0, \end{aligned}$$

最后一步用了 $l \approx 2\pi an$ 。相当于 n 匝线圈通以平均电流 $\frac{2}{\pi} I_0$ 。由式 (4.8), $\frac{1}{2} R_{\text{rad},m} |I_0|^2 = \mu_0 m^2 \omega^4 / (12\pi c^3)$:

$$\begin{aligned} R_{\text{rad},m} &= \frac{\mu_0 \omega^4 (2na^2)^2}{6\pi c^3} \\ &= \frac{2Z_0}{3\pi} n^2 \left(\frac{\omega a}{c} \right)^4 \\ &= 0.0331 \Omega \end{aligned} \quad (8.2)$$

($\omega a/c = 0.0622$)。原文用“电流平方的平均值 $\frac{1}{2}$ ”代替 $(2/\pi)^2$ ，得到 $\frac{\pi Z_0}{12} n^2 (\omega a/c)^4 = 0.0408 \Omega$ ；两者之比为 $8/\pi^2 = 0.81$ 。辐射是各段电流相干叠加的结果，应当先求总偶极矩再平方，所以本讲的写法更合理；这一差别对 Q 的影响不到 3%。

(3) 电荷守恒（一维连续性方程）： $\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial s} = 0$ 。用复振幅， $i\omega\lambda = -\frac{\partial I}{\partial s} = \frac{\pi I_0}{l} \sin \frac{\pi s}{l}$ ，所以

$$\lambda(s) = -i \frac{\pi I_0}{\omega l} \sin \frac{\pi s}{l}.$$

上半段 ($s > 0$) 带一种符号的电荷，下半段带相反电荷；电荷比电流落后 90° 。螺距均匀时导线一点的高度 $z = hs/l$ ，电偶极矩（沿轴向）

$$\begin{aligned} p &= \int_{-l/2}^{l/2} \lambda(s) z ds = -i \frac{\pi I_0 h}{\omega l^2} \int_{-l/2}^{l/2} s \sin \frac{\pi s}{l} ds \\ &= -i \frac{\pi I_0 h}{\omega l^2} \cdot \frac{2l^2}{\pi^2} = -i \frac{2h I_0}{\pi \omega}. \end{aligned}$$

(积分 $\int_{-1/2}^{1/2} x \sin(\pi x) dx = 2/\pi^2$ ，分部积分可得。) 由式 (4.7)， $\frac{1}{2} R_{\text{rad,e}} |I_0|^2 = |p|^2 \omega^4 / (12\pi \epsilon_0 c^3)$ ：

$$\begin{aligned} R_{\text{rad,e}} &= \frac{4h^2 \omega^2}{6\pi^3 \epsilon_0 c^3} \\ &= \frac{2Z_0}{3\pi^3} \left(\frac{\omega h}{c} \right)^2 = 0.0140 \Omega, \end{aligned} \quad (8.3)$$

与原文式 (7) 的第二项完全相同。

(4) 总电阻 $R = R_\Omega + R_{\text{rad,m}} + R_{\text{rad,e}} = 0.261 \Omega$ ， $\omega L = 643 \Omega$ ， $Q_{\text{th}} = \omega L / R \approx 2470$ （用原文的 $R_{\text{rad,m}}$ 则为 2400），与原文“约 2500”一致。实测 $Q = 950$ 对应 $R = \omega L / Q = 0.677 \Omega$ ，多出 0.42Ω 。若全部归因于欧姆损耗，需要 $R'_\Omega = 0.677 \Omega - R_{\text{rad,m}} - R_{\text{rad,e}} = 0.630 \Omega$ 。由 $R_\Omega \propto \sigma^{-1/2}$ ($\delta \propto \sigma^{-1/2}$ ， $R_\Omega \propto \rho/\delta$)， $\sigma_{\text{eff}} = \sigma(0.214/0.630)^2 \approx 6.8 \times 10^6 \text{ S/m}$ ，只有铜的约 12%。原文认为主要原因是表面导电性差的氧化铜层：电流被趋肤效应限制在约 $20 \mu\text{m}$ 的表层，正好受表面状况影响 [3]。

(5) 磁偶极-偶极耦合：线圈 1 的磁矩在轴线远处产生 $B = \mu_0 m_1 / (2\pi D^3)$ ，穿过线圈 2 的磁链等于 $B \cdot (m_2 / I_2)$ (m_2 / I_2 为线圈 2 的“有效匝数 $\times$ 面积”)，所以

$$M_{\text{m}} = \frac{\mu_0}{2\pi D^3} \frac{m_1}{I_1} \frac{m_2}{I_2} = \frac{\mu_0 (2na^2)^2}{2\pi D^3} = 22.3 \text{ nH}.$$

电耦合： $p_{\text{SPD}} = (-i)^2 \left(\frac{2h}{\pi\omega} \right)^2 I_{\text{S}} I_{\text{D}} = - \left(\frac{2h}{\pi\omega} \right)^2 I_{\text{S}} I_{\text{D}}$ ，所以

$$\begin{aligned} M_{\text{e}} &= \frac{2}{4\pi\epsilon_0 D^3} \left(\frac{2h}{\pi\omega} \right)^2 > 0, \\ \frac{M_{\text{e}}}{M_{\text{m}}} &= \frac{8h^2 / (4\pi^3 \epsilon_0 \omega^2)}{2\mu_0 n^2 a^4 / \pi} = \left(\frac{ch}{\pi n a^2 \omega} \right)^2 = 0.42. \end{aligned}$$

(M_{e} 的来源：线圈 S 在 D 处产生的电场 $\mathbf{E}_{\text{S}} = -i\omega \mathbf{A}_{\text{S}} - \nabla \phi_{\text{S}}$ 有两部分。电流感应的部分对 D 中电流的作用 $\int (-i\omega \mathbf{A}_{\text{S}}) \cdot \mathbf{J}_{\text{D}} dV = -i\omega M_{\text{m}} I_{\text{S}} I_{\text{D}}$ 给出通常的互感；电荷产生的部分，用分部积分与电荷守恒 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -i\omega \rho$ ，化为 $\int (-\nabla \phi_{\text{S}}) \cdot \mathbf{J}_{\text{D}} dV = \int \phi_{\text{S}} \nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{D}} dV = -i\omega \int \phi_{\text{S}} \rho_{\text{D}} dV$ ，形式与前者相同，其中的积分就是两组电荷的静电相互作用能。远处这个相互作用能就是两个电偶极子

的相互作用能 $-2p_S p_D / (4\pi\epsilon_0 D^3)$ (偶极子 p_S 在自身轴线上距离 D 处产生 $E = 2p_S / (4\pi\epsilon_0 D^3)$, 另一偶极子其中的能量为 $-p_D E$ 。) 两个因子 $-i$ 相乘给出 -1 , 使电偶极之间的“吸引型”相互作用能表现为正的等效互感, 与磁耦合同号相加。 M_e/M_m 与 D 无关 (两者都按 D^{-3} 衰减)。总互感 $M = M_m(1 + 0.42) = 31.7 \text{ nH}$,

$$k = \frac{M}{L} = 3.07 \times 10^{-3},$$

$$U = kQ = 2.92,$$

$$\eta_{\max} = \frac{U^2}{(1 + \sqrt{1 + U^2})^2} = 0.51.$$

比较: 原文由频率分裂测得 $D = 2 \text{ m}$ 处 $\kappa/\Gamma \approx 2.5$, 直接测得的效率约 $0.4\text{--}0.5$ (图 8)。用原文的准静态模型对真实螺旋线做数值积分 (scripts/helix_kurs.py), 得 $k = 2.88 \times 10^{-3}$, $U = 2.74$, $\eta_{\max} = 0.49$ 。偶极近似高估约 6%。分项看: 数值模型给出 $M_m = 21.9 \text{ nH}$ 、 $M_e = 7.9 \text{ nH}$ ($M_e/M_m = 0.36$), 而点偶极近似为 22.3 与 9.4 nH 。磁部分只差 2%, 误差主要来自电偶极部分: 线圈两半的电荷沿螺旋分布在半径 0.3 m 的圆周上、轴向跨度 $\pm h/2$, 把它当成点电偶极子高估了电耦合。

(6) 最优负载条件 (式 (5.10)): 负载在接收线圈中引起的等效串联电阻应为 $R_W = \sqrt{1 + U^2} R_D$, 其中 $R_D = \omega L/Q = 0.677 \Omega$, 所以 $R_W = 3.08 \times 0.677 = 2.09 \Omega$ 。负载环的自感由式 (3.13): $L_B = \mu_0(0.15)[\ln 1200 - 2] = 0.96 \mu\text{H}$, 电抗 $X_B = \omega L_B = 59.7 \Omega$ 。负载环 (灯泡 + 环) 反射到接收线圈的阻抗为

$$\frac{\omega^2 M_B^2}{R_b + iX_B} = \frac{\omega^2 M_B^2 (R_b - iX_B)}{R_b^2 + X_B^2}.$$

令实部等于 R_W : $\omega^2 M_B^2 = R_W(R_b^2 + X_B^2)/R_b = 533 \Omega^2$, $M_B = 0.37 \mu\text{H}$, 对应耦合系数 $M_B/\sqrt{LL_B} = 0.12$ 。可见用一个“稍微靠近”的负载环, 就把 240Ω 的灯泡变换成了 2.09Ω 的等效负载: 互感耦合本身就是一个阻抗变换器。原文正是靠改变灯泡环与接收线圈的距离来调节 Γ_W/Γ 的 [3]。

副作用: 反射阻抗还有虚部 $-\omega^2 M_B^2 X_B / (R_b^2 + X_B^2) = -0.52 \Omega$, 相当于在接收线圈中串入一个小电容, 使谐振频率升高 $\delta f = 0.52 / (4\pi L) \approx 4.0 \text{ kHz}$ (由 $X \approx 2L\Delta$), 与半线宽 $f_0 / (2Q) = 5.2 \text{ kHz}$ 相当, 必须重新调谐 (原文正是“稍微调节线圈”来补偿这一电抗 [3])。

(7) 负载功率 $\frac{1}{2} R_W |I_D|^2 = 60 \text{ W}$, $|I_D| = 7.58 \text{ A}$ 。由式 (5.4), $|I_S| = |I_D|(R_D + R_W) / (\omega M) = 10.6 \text{ A}$ ($\omega M = 1.97 \Omega$)。中点到两线圈中心各 $z = 1.0 \text{ m}$, 用圆环轴线场公式 $H = m / [2\pi(a^2 + z^2)^{3/2}]$: $H_S = 1.40 \text{ A/m}$, $H_D = 1.00 \text{ A/m}$ (振幅)。谐振时由式 (5.4), 两线圈电流相差 90° , 场在时间上正交叠加, 有效值 $H_{\text{rms}} = \sqrt{(H_S^2 + H_D^2)/2} = 1.2 \text{ A/m}$, 与原文的 1 A/m 同量级, 约为 ICNIRP 参考水平的 5 倍。

评分要点 (共 40 分): (1) l 、 δ 2 分, 余弦分布下的 $\frac{1}{2}$ 因子与 R_Ω 2 分; (2) 按局部电流加权求 $m = 2na^2 I_0$ 3 分, $R_{\text{rad},m}$ 3 分; (3) 连续性方程求 λ 2 分, p 的积分 2 分, $R_{\text{rad},e}$ 2 分; (4) Q_{th} 2 分, σ_{eff} 及 $R_\Omega \propto \sigma^{-1/2}$ 2 分; (5) M_m 3 分, M_e 的符号与比值 4 分, k 、 U 、 $\eta_{\max}$ 3 分; (6) 反射阻抗实部条件与 M_B 4 分, 虚部引起的失谐 2 分; (7) 电流 2 分, 正交叠加求 H_{rms} 并与参考水平比较 2 分。

例题 2：手机无线充电——过耦合与频率分叉

Qi 低功率参考设计的发射线圈是 20 匝（两层）、内外径 19/40 mm 的扁平线圈 [7]。把发射线圈与手机中的接收线圈都简化为 $N = 12$ 匝、平均半径 $a = 15$ mm 的扁平线圈，绕组的等效截面半径 $b = 0.5$ mm，两线圈同轴，间距 $z = 5$ mm（真实产品还在线圈背面加铁氧体片，这里不计）。两线圈各串联电容，都调谐到 $f_0 = 100$ kHz；在 100 kHz 附近线圈的品质因数 $Q = 80$ （利兹线）。电源可视为振幅 V 固定、频率可调的理想电压源。手机的整流与电池等效为负载电阻 R_L ：轻载 $R_L = 4 \Omega$ ，重载 $R_L = 1 \Omega$ 。

1. 估算线圈自感 L 、损耗电阻 R 与耦合系数 k 。
2. 工作在 f_0 ，轻载。求链路效率；求负载功率随 k 的变化，说明存在使负载功率最大的耦合 k_P ，并比较 $k = 0.355$ 与 k_P 时的负载功率。
3. 从电源看进去的输入阻抗 $Z_{in}(\omega)$ 为纯电阻（零相位）的频率，是电源控制电路锁定的工作点。设两回路 L 、 C 相同，记次级负载品质因数 $Q_{2L} = \omega_0 L / (R + R_L)$ 。证明除 ω_0 外，还可能有另外两个零相位频率，它们满足 $y = (\omega/\omega_0)^2$ 的二次方程

$$(1 - k^2)y^2 - \left(2 - \frac{1}{Q_{2L}^2}\right)y + 1 = 0,$$

并求出出现这两个额外频率（“频率分叉”）的条件。

4. 分别判断轻载、重载时是否发生分叉；对发生分叉的情形，求零相位频率，并比较这些频率与 f_0 处的链路效率与负载功率。

解答

(1) 式 (3.13) 乘 N^2 : $\Lambda = \ln(8a/b) - 2 = \ln 240 - 2 = 3.48$, $L = N^2 \mu_0 a \Lambda = 9.45 \mu\text{H}$, $\omega_0 L = 5.94 \Omega$, $R = \omega_0 L / Q = 0.074 \Omega$, $C = 1/(\omega_0^2 L) = 0.268 \mu\text{F}$ 。两线圈间距 $z = a/3$ ，用近距离公式 (3.12)（每匝对每匝）：

$$k \approx \frac{\ln(8a/z) - 2}{\ln(8a/b) - 2} = \frac{\ln 24 - 2}{3.48} = 0.34.$$

$z/a = 0.33$ 时近距离公式已有约 5% 误差，用精确式 (3.8) 得 $k = 0.355$ 。下面取 $k = 0.355$ 。这比 Kurs 实验大两个数量级：手机充电是“强几何耦合”，靠的不是很高的 Q 。

(2) $U = kQ = 28.4$, $x = R_L/R = 54$ ，由式 (5.9), $\eta = 0.919$ （最优负载 $x = \sqrt{1 + U^2} = 28.4$ 时为 0.932）。负载功率：由式 (5.6) ($\omega = \omega_0$, $Z_1 = R$, $Z_2 = R + R_L \equiv R'_2$),

$$P_L = \frac{1}{2} R_L |I_2|^2 = \frac{V^2 R_L}{2} \cdot \frac{\omega_0^2 M^2}{(RR'_2 + \omega_0^2 M^2)^2}.$$

记 $y = \omega_0^2 M^2$, $y/(RR'_2 + y)^2$ 在 $y = RR'_2$ 处取极大，所以

$$k_P = \frac{\sqrt{RR'_2}}{\omega_0 L} = \frac{1}{\sqrt{Q Q_{2L}}} = 0.093,$$

$$Q_{2L} = \frac{\omega_0 L}{R'_2} = 1.46.$$

（它与第 6.2 节的临界耦合 $k_c = 1/Q_L$ 含义相近，但那里两端都接匹配电阻，这里是理想电压源、两端电阻不同，所以公式不同。） $k = 0.355 \approx 3.8 k_P$ 时， P_L 只有 k_P 时的 24%：手机放

得越近, 固定频率、固定电压下得到的功率反而越少。原因是反射电阻 $\omega_0^2 M^2 / R'_2$ 随 k^2 增大, 在电压不变时初级电流减小。效率却随 k 单调增加。所以充电器必须有功率控制: Qi 系统中接收端不断把功率需求发回发射端, 发射端据此调节工作频率或驱动电压 [7]。

(3) 由式 (5.5), $Z_{\text{in}} = R + \mathrm{i}X + \frac{\omega^2 M^2}{R'_2 + \mathrm{i}X}$ (两回路 X 相同),

$$\operatorname{Im} Z_{\text{in}} = X \left[1 - \frac{\omega^2 M^2}{R'^2_2 + X^2} \right].$$

零点为 $X = 0$ (即 ω_0), 或 $R'^2_2 + X^2 = \omega^2 M^2$ 。令 $\nu = \omega/\omega_0$, $X = \omega_0 L(\nu - 1/\nu)$, $\omega M = \nu k \omega_0 L$, 两边除以 $(\omega_0 L)^2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_{2L}^2} + \frac{(\nu^2 - 1)^2}{\nu^2} &= k^2 \nu^2 \\ \Rightarrow (1 - k^2)y^2 - \left(2 - \frac{1}{Q_{2L}^2}\right)y + 1 &= 0, \\ y &= \nu^2. \end{aligned}$$

注意初级电阻 R 不出现。有两个正实根的条件是判别式非负: $(2 - Q_{2L}^{-2})^2 \geq 4(1 - k^2)$, 即

$$k \geq k_{\text{bif}} = \frac{1}{Q_{2L}} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_{2L}^2}} \approx \frac{1}{Q_{2L}}.$$

两根之积为 $1/(1 - k^2) > 0$, 两根之和为 $(2 - Q_{2L}^{-2})/(1 - k^2)$, 只有 $Q_{2L} > 1/\sqrt{2}$ 时才为正。所以分叉的完整条件是 $Q_{2L} > 1/\sqrt{2}$ 且 $k \geq k_{\text{bif}}$: 次级负载品质因数太低 ($Q_{2L} < 1/\sqrt{2}$) 时, 次级回路对频率几乎没有选择性, 根本不会分叉。物理意义: 次级负载品质因数越高、耦合越强, 越容易分叉。分叉时零相位点不再唯一, 控制电路可能锁在“错误”的频率上, 或在负载变化时在不同工作点之间跳变。这是感应输电设计中的一个经典问题 [20]。

(4) 轻载: $Q_{2L} = 1.46$, $k_{\text{bif}} = 0.64 > k$, 不分叉, 唯一的零相位频率就是 f_0 。重载: $Q_{2L} = \omega_0 L / (R + 1 \Omega) = 5.53$, $k_{\text{bif}} = 0.18 < k$, 发生分叉。解二次方程: $y = 0.775, 1.476$, 零相位频率 $f = 88.0 \text{ kHz}, 121.5 \text{ kHz}$ (再加 f_0 共三个; 数值求 $\operatorname{Im} Z_{\text{in}} = 0$ 核对无误)。无损简正模 (6.1) 给出 85.9、124.6 kHz, 损耗把两个频率向 f_0 拉近了。用式 (5.6) 计算:

频率	88.0 kHz	100 kHz	121.5 kHz
链路效率 η	0.871	0.915	0.871
负载功率 P_L/V^2 (W/V ²)	0.379	0.108	0.379

在分叉频率上, 负载功率是 f_0 处的 3.5 倍 (负载功率谱的两个峰在 86.9、123.0 kHz, 靠近零相位频率), 效率却低约 4 个百分点。这就是第 6.2 节“过耦合时传输谱分裂”在固定电源、固定负载条件下的表现: **过耦合时, 功率最大与效率最高发生在不同的频率。**

评分要点 (共 30 分): (1) L 、 R 2 分, 近距离公式求 k 2 分; (2) 效率 2 分, $P_L(k)$ 的表达式 3 分, 极值条件与 24% 3 分; (3) 写出 $\operatorname{Im} Z_{\text{in}}$ 并因式分解 3 分, 化成 y 的二次方程 3 分, 判别式与正根条件 (含 $Q_{2L} > 1/\sqrt{2}$) 4 分; (4) 两种负载的判断 2 分, 零相位频率 3 分, 效率与功率的比较及结论 3 分。

例题 3：植入器件——线圈尺寸与最优频率

一个植入式器件的接收线圈： $N_2 = 10$ 匝，半径 $a_2 = 5$ mm，导线半径 $b_2 = 0.1$ mm，位于皮下，线圈中心在体外发射线圈平面下方 $d = 20$ mm 处，两线圈同轴。发射线圈： $N_1 = 5$ 匝，导线半径 $b_1 = 0.5$ mm，半径 a_1 待定，平放在皮肤上方 $h = 2$ mm 处。组织可视为电导率 $\sigma_t = 0.6$ S/m 的非磁性导体，占据皮肤以下的半空间。导线为铜。多匝线圈按紧绕处理： $L = N^2 \mu_0 a \Lambda$ ， $\Lambda = \ln(8a/b) - 2$ 。忽略邻近效应。

1. 用式 (3.11) 求互感。忽略 Λ_1 随 a_1 的缓慢变化，求使 k 最大的发射线圈半径，并求此时的 k 。
2. 证明接收线圈的品质因数（只计欧姆损耗）为 $Q_2 = 2N_2 \Lambda_2 b_2 / \delta \propto \sqrt{f}$ 。
3. 发射线圈的交变磁场在组织中感应涡流，等效于在发射线圈中串联一个电阻 R_t 。用法拉第定律论证 $R_t \propto \sigma_t \mu_0^2 \omega^2 N_1^2 a_1^3$ 。附录 D 求得比例系数： $R_t = c_t N_1^2 \sigma_t \mu_0^2 \omega^2 a_1^3$ ， $h/a_1 = 0.1$ 时 $c_t = 0.271$ 。求 10 MHz 时发射线圈的欧姆电阻与组织电阻。
4. 求使发射线圈 Q_1 最大的频率，以及使 $U = k\sqrt{Q_1 Q_2}$ 最大的频率，并求后者对应的 U 与 $\eta_{\max}$ 。
5. 检验：(a) 接收线圈本身也浸在组织中，其涡流电阻可用系数 2/3（线圈处在均匀导电介质内部，附录 D）估算，它对结果影响多大？(b) 最优负载下，组织吸收的功率是负载功率的百分之几？

解答

(1) $M = \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 a_1^2 a_2^2}{2(a_1^2 + d^2)^{3/2}}$ ， $L_1 = N_1^2 \mu_0 a_1 \Lambda_1$ ， $L_2 = N_2^2 \mu_0 a_2 \Lambda_2$ ，匝数在 k 中相消：

$$k = \frac{\pi a_2^{3/2}}{2\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \cdot \frac{a_1^{3/2}}{(a_1^2 + d^2)^{3/2}} \\ = \frac{\pi a_2^{3/2}}{2\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \left(\frac{a_1}{a_1^2 + d^2} \right)^{3/2}.$$

$a_1/(a_1^2 + d^2)$ 在 $a_1 = d$ 时最大（对 a_1 求导： $d^2 - a_1^2 = 0$ ）。物理图像：线圈太小，磁场伸不到深处；线圈太大，轴线上的场被摊薄，且自感增大。取 $a_1 = d = 20$ mm： $\Lambda_1 = \ln 320 - 2 = 3.77$ ， $\Lambda_2 = \ln 400 - 2 = 3.99$ ，

$$k = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left(\frac{a_2}{d} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} = 0.0179.$$

计入 Λ_1 随 a_1 的变化后，数值求得最优 $a_1 = 18.3$ mm， k 几乎不变。（只在发射端电流固定时求轴线上 B 的最大值，会得到 $a_1 = \sqrt{2}d$ ；这里优化的是 k ，自感也随 a_1 增大，所以结果不同。）

(2) 接收线圈导线总长 $N_2 \cdot 2\pi a_2$ ，由式 (4.6)， $R_2 = \frac{\rho N_2 \cdot 2\pi a_2}{2\pi b_2 \delta} = \frac{N_2 a_2 \rho}{b_2 \delta}$ 。于是 $Q_2 = \frac{\omega N_2^2 \mu_0 a_2 \Lambda_2}{N_2 a_2 \rho / (b_2 \delta)} = N_2 \Lambda_2 b_2 \delta \cdot \frac{\omega \mu_0}{\rho}$ 。由式 (4.5)， $\omega \mu_0 / \rho = 2/\delta^2$ ，所以 $Q_2 = 2N_2 \Lambda_2 b_2 / \delta \propto \sqrt{f}$ 。

(3) 发射线圈电流 I_1 在组织中产生的磁场 $B \sim \mu_0 N_1 I_1 / a_1$ ，分布在尺度 a_1 的区域。由法拉第定律，感应电场 $E \sim \omega B a_1 \sim \omega \mu_0 N_1 I_1$ ，涡流功率 $\sim \sigma_t E^2 a_1^3 \sim \sigma_t \omega^2 \mu_0^2 N_1^2 a_1^3 I_1^2$ 。令其等于

$\frac{1}{2}R_t I_1^2$, 即得 $R_t \propto \sigma_t \mu_0^2 \omega^2 N_1^2 a_1^3$ 。

数值 ($\delta = 20.6 \mu\text{m}$): $R_{\Omega 1} = N_1 a_1 \rho / (b_1 \delta) = 0.163 \Omega$; $R_t = 0.271 \times 25 \times 0.6 \times \mu_0^2 \omega^2 a_1^3 = 0.203 \Omega$ 。组织损耗已与导线损耗相当。

(4) 记 $R_{\Omega 1} = A\sqrt{f}$, $R_t = Bf^2$, 则

$$Q_1 = \frac{2\pi f L_1}{A\sqrt{f} + Bf^2}.$$

对 f 求导并令其为零, 得 $\frac{1}{2}A\sqrt{f} = Bf^2$, 即 $R_t = \frac{1}{2}R_{\Omega 1}$ 。于是 $f = (A/2B)^{2/3} = 5.4 \text{ MHz}$, $Q_1 = 449$ 。

$U^2 \propto Q_1 Q_2 \propto f^{3/2} / (A\sqrt{f} + Bf^2)$ 。求导: $\frac{3}{2}(A\sqrt{f} + Bf^2) = f(\frac{1}{2}Af^{-1/2} + 2Bf)$, 化简得 $Af^{1/2} = \frac{1}{2}Bf^2$, 即 $R_t = 2R_{\Omega 1}$:

$$f_{\text{opt}} = \left(\frac{2A}{B}\right)^{2/3} = 13.7 \text{ MHz},$$

$$Q_1 = 357, \quad Q_2 = 453,$$

$$U = k\sqrt{Q_1 Q_2} = 7.2, \quad \eta_{\text{max}} = 0.76.$$

接收端的 Q_2 随频率增大, 所以最优频率比单看 Q_1 时高。作为对照, 1 MHz 时 $U = 3.3$, 100 MHz 时 $U = 5.3$ 。数值扫描频率的结果与上述解析最优点一致 (误差 $< 0.1\%$)。

(5) (a) 接收线圈: $R_{t2} = \frac{2}{3}N_2^2\sigma_t\mu_0^2\omega^2a_2^3 = 0.059 \Omega$, 欧姆电阻 $R_2 = 0.477 \Omega$, 比值 12% 。 Q_2 降低约 11% , U 降到 6.8 , η_{max} 降到 0.75 。小线圈的组织损耗按 a^3 减小, 所以影响不大, 最初忽略它是合理的。(b) 最优负载 $x = \sqrt{1 + U^2} = 7.27$ 时, 反射电阻与 R_1 之比为 $U^2/(1+x) = 6.27$, 所以输入功率中有 $1/(1+6.27) = 13.8\%$ 消耗在发射端, 其中 $R_t/(R_{\Omega 1} + R_t) = 2/3$ 进入组织, 即输入功率的 9.2% , 约为负载功率的 12% 。若植入器件需要 20 mW , 组织吸收约 2.4 mW , 损耗集中在发射线圈导线附近 (A_ϕ 在导线处最大), 不一定均匀分布。取最不利的情形: 2.4 mW 全部被 ICNIRP 规定的 10 g 平均质量吸收, 局部 SAR 也只有 0.24 W/kg , 仍低于 2 W/kg 的局部限值。(以上忽略了组织的位移电流。按 Gabriel 等人的参数化模型, 肌肉在 10 MHz 附近 $\sigma \approx 0.62 \text{ S/m}$ 、相对介电常数约 170 [17, 18], 14 MHz 时相对介电常数约 136 , $\omega\varepsilon \approx 0.11 \text{ S/m}$, 约为 σ 的 $1/6$, 所以这只是量级上的近似。组织中的趋肤深度为 0.18 m , 远大于 a_1 , 忽略涡流自身磁场的近似成立。)

评分要点 (共 30 分): (1) k 的表达式 3 分, 最优 $a_1 = d$ 3 分; (2) $Q_2 = 2N_2\Lambda_2b_2/\delta$ 4 分; (3) 标度论证 3 分, 两个电阻的数值 2 分; (4) Q_1 的最优条件 4 分, U 的最优条件与数值 6 分; (5) 接收线圈组织损耗 2 分, 组织吸收占比与 SAR 上界 3 分。

例题 4: 中继线圈放在哪里

三个单匝铜环: 半径 $a = 0.20 \text{ m}$, 导线半径 $b = 2 \text{ mm}$, 同轴排列, 都调谐到同一频率 ω_0 。发射线圈 1 与接收线圈 3 相距 $d = 1.2 \text{ m}$ 。发射线圈和中继线圈 2 的品质因数 $Q_1 = Q_2 = 600$; 接收线圈装在设备里, 附近的金属使它的品质因数降为 $Q_3 = 150$ 。中继线圈不接电源与负载, 放在线圈 1、3 之间、距线圈 1 为 z 处, 负载 R_L 接在线圈 3 上。

1. 用式 (3.9) (含方括号中的修正项) 估算 k_{13} , 以及 $z = d/2$ 时的 k_{12} 。

2. 不用中继线圈时, 最大效率是多少?
3. 忽略 k_{13} 。证明三个线圈电阻不同时, 效率仍可写成式 (7.4) 的形式, 只需把 u 换成 $u_1 = k_{12}\sqrt{Q_1Q_2}$ (在 r_1 中) 与 $u_2 = k_{23}\sqrt{Q_2Q_3}$ (在 r_2 中), $x = R_L/R_3$ 。在 $u_1, u_2 \gg 1$ 时求最优负载与 $1 - \eta$ 的渐近式。
4. 用 (3) 的渐近式与远场 $k \propto (\text{距离})^{-3}$, 求中继线圈的最优位置 z 。中继应靠近哪个线圈? 为什么?
5. 用精确互感数值求: 中继在中点、在 (4) 的位置、在真正最优位置时的最大效率。(3) 的渐近式在本题参数下可靠吗? 为什么 (4) 的位置结论仍然好用?
6. 计入 k_{13} 后结果变化多大? 为什么影响这么小?

解答

(1) $L = \mu_0 a [\ln(8a/b) - 2] = 1.18 \mu\text{H}$ 。 $d = 1.2 \text{ m}$: $\mathcal{D}^2 = 2a^2 + d^2 = 1.52 \text{ m}^2$, 修正项 $\frac{15}{8}a^4/\mathcal{D}^4 = 0.0013$, $M_{13} = 1.69 \text{ nH}$, $k_{13} = 1.43 \times 10^{-3}$ 。 $d/2 = 0.6 \text{ m}$: $\mathcal{D}^2 = 0.44 \text{ m}^2$, 修正项 0.0155, $M_{12} = 11.0 \text{ nH}$, $k_{12} = 9.34 \times 10^{-3}$ 。两者与精确式的差别都小于 0.1%。 $k_{12}/k_{13} = 6.5$, 小于远场的 8, 因为 $d/2 = 3a$ 还不够远。

(2) $U = k_{13}\sqrt{Q_1Q_3} = 0.43$, $\eta_{\max} = 0.43^2/(1 + \sqrt{1 + 0.43^2})^2 = 4.2\%$ 。

(3) 从后往前用反射阻抗。线圈 3 反射到线圈 2 的电阻 $\omega_0^2 M_{23}^2/(R_3 + R_L)$, 以 R_2 为单位: $r_2 = \omega_0^2 M_{23}^2/[R_2 R_3(1+x)] = u_2^2/(1+x)$ 。线圈 2 (含 3) 反射到线圈 1 的电阻 $\omega_0^2 M_{12}^2/[R_2(1+r_2)]$, 以 R_1 为单位: $r_1 = u_1^2/(1+r_2)$ 。功率依次按比例分配, 所以 $\eta = \frac{r_1}{1+r_1} \cdot \frac{r_2}{1+r_2} \cdot \frac{x}{1+x}$, 形式不变。

渐近: 令 $x = \alpha u_2$ (α 为 1 的量级)。则 $r_2 \approx u_2/\alpha$, $r_1 \approx \alpha u_1^2/u_2$, 三个因子的损耗分别约为 $1/r_1 = u_2/(\alpha u_1^2)$ 、 $1/r_2 = \alpha/u_2$ 、 $1/x = 1/(\alpha u_2)$:

$$1 - \eta \approx \frac{\alpha}{u_2} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{u_2} + \frac{u_2}{u_1^2} \right).$$

对 α 求极小: $\alpha^2 = 1 + u_2^2/u_1^2$, 即 $x_{\text{opt}} \approx u_2\sqrt{1 + u_2^2/u_1^2}$,

$$1 - \eta_{\max} \approx 2\sqrt{\frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2}}.$$

$u_1 = u_2 = u$ 时回到第 7.3 节的 $2\sqrt{2}/u$ 。两段链路的损耗 $1/u_1$ 、 $1/u_2$ 像相互垂直的两个分量那样按平方和 (勾股) 合成, 较弱的一段起主导作用。

(4) 远场 $u_1 \propto \sqrt{Q_1Q_2}/z^3$, $u_2 \propto \sqrt{Q_2Q_3}/(d-z)^3$, 要使 $\frac{z^6}{Q_1Q_2} + \frac{(d-z)^6}{Q_2Q_3}$ 最小。对 z 求导:

$$\frac{z^5}{Q_1} = \frac{(d-z)^5}{Q_3},$$

$$\frac{z}{d-z} = \left(\frac{Q_1}{Q_3} \right)^{1/5} = 4^{1/5} = 1.32,$$

$$z = 0.569d = 0.68 \text{ m}.$$

中继应靠近 Q 较低的接收线圈: 低 Q 的一段链路需要更强的耦合来补偿。由于 k 按距离的三次方变化, 这个偏移只按 Q 之比的 $1/5$ 次方增长, 所以即使 Q_3 只有 Q_1 的 $1/4$, 中继也只需

离中点约 $0.07d$ (8 cm)。

(5) 精确互感、负载同时优化 (`scripts/example4_relay.py`):

中继位置	u_1	u_2	x_{opt}	η_{max}
中点 $z = 0.60\text{ m}$	5.60	2.80	3.32	45.5%
(4) 的位置 $z = 0.68\text{ m}$	4.03	4.03	5.78	49.7%
数值最优 $z = 0.70\text{ m}$	3.82	4.31	6.54	49.8%

与直接传输的 4.2% 相比，中继使效率提高十倍以上。渐近式在这里定量上不可靠： $u \approx 4$ 远不满足 $u \gg 1$ ，它在中点给出 $\eta \approx 1 - 0.80 = 0.20$ ，而精确值为 0.455 ($1 - \eta$ 被高估约一半；数值核对表明 $u \gtrsim 100$ 时渐近式误差才小于 2%)。但最优位置只取决于“两段链路怎样平衡”，即使用精确互感最小化 $1/u_1^2 + 1/u_2^2$ 也得到 $z = 0.696\text{ m}$ ，与真正的最优位置 0.697 m 几乎相同；在最优点附近 η 对 z 又很平坦 (0.68 m 与 0.70 m 只差 0.1 个百分点)，所以 (4) 的结论很实用。

(6) 在数值最优位置用完整的 3×3 复数电路方程 (含 $i\omega_0 M_{13}$ 项) 重新优化负载， $\eta = 49.80\%$ ，与忽略 k_{13} 时的 49.83% 只差 0.03 个百分点。 k_{13} 很小，而且直接通道 ($I_3 \propto -i\omega_0 M_{13} I_1$) 与经中继的通道 ($I_3 \propto (-i\omega_0 M)^2 I_1$) 相位相差 90° ，对 $|I_3|^2$ 的影响没有一阶交叉项，只是二阶的。
评分要点 (共 30 分): (1) 两个耦合系数 3 分; (2) 2 分; (3) 推广的效率式 3 分，渐近展开 4 分，最优 α 与 $1 - \eta$ 3 分; (4) 最优条件与数值 3 分，物理解释 3 分; (5) 数值结果 2 分，指出渐近式定量失效而位置结论仍成立并说明原因 4 分; (6) 数值 1 分，相位相差 90° 的论证 2 分。

练习：三线圈的简正模与能量转移

例题 4 中忽略损耗与 k_{13} ，中继在中点， $k = k_{12}$ 。(1) 由 $\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right) q_n = k(q_{n-1} + q_{n+1})$ 求简正模。(2) 用三谐振器耦合模方程 $\dot{A}_1 = -i\kappa A_2$, $\dot{A}_2 = -i\kappa(A_1 + A_3)$, $\dot{A}_3 = -i\kappa A_2$ ，求 $A(0) = (1, 0, 0)$ 时能量全部到达线圈 3 的时间，并与无中继时的 $\pi/(2\kappa_{13})$ 比较。

答案: (1) 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的本征值为 $0, \pm\sqrt{2}$ ，频率 ω_0 ($q \propto (1, 0, -1)$ ，中继中无电流) 与 $\omega_0/\sqrt{1 \pm \sqrt{2}k}$ ($q \propto (1, \pm\sqrt{2}, 1)$)，即 $0.9935\omega_0$ 、 ω_0 、 $1.0067\omega_0$ 。(2) $A_3 = (\cos \sqrt{2}\kappa t - 1)/2$ ， $t_{\text{relay}} = \pi/(\sqrt{2}\kappa)$ ， $t_{\text{relay}}/t_{\text{dir}} = \sqrt{2}k_{13}/k_{12} = 0.22$ 。若三个 Q 都为 600，转移期间储能分别保留 $e^{-\sqrt{2}\pi/u} = 0.45$ 与 $e^{-\pi/U} = 0.026$ ：中继转移快得多，所以总损耗小得多。

9 实验与数据处理：由频率分裂测耦合系数

例题：实验题：两线圈耦合系数随距离的变化 (本题使用模拟数据)

装置：两只相同的单匝铜环，半径 $a = 10.0\text{ cm}$ ，导线半径 $b = 1.0\text{ mm}$ ，各串联一只电容，调谐到同一频率 $f_0 = 5000.0\text{ kHz}$ (两者相差小于 0.2 kHz)。每个谐振环旁边放一个很小的耦合环，分别接网络分析仪 (扫频信号源与接收机合为一体的仪器，逐点测量输出与输入信号的功率比) 的输出端与输入端，测量功率传输谱 $T(f)$ 。两谐振环同轴放置，中心距为 d 。

- 标定：每个谐振环在工作状态（带着自己的耦合环）下，单独测得的共振曲线半高全宽为 $\Delta f_{1/2} = 17.8 \text{ kHz}$ ，读数误差 0.2 kHz 。在工作频率附近测得单个谐振环的高频电感 $L = 0.589 \text{ pH}$ （低频时电流遍布导线截面，导线内部也有磁能，电感约 0.620 pH ，大 5%，见式 (3.13) 后的说明）。
- 测量：改变 d ，记录传输谱两个峰的频率 f_- 、 f_+ （表 2）。峰位按读数确定：多次平均后传输系数的相对读数误差约为 $\varepsilon_T = 1 \times 10^{-3}$ ，两个频率处的传输系数相对差小于 ε_T 时无法区分。 d 的读数误差为 0.5 mm 。 $d \geq 42 \text{ cm}$ 时屏幕上只能看到一个平顶的峰，读不出两个峰位。

说明：本题数据由 `scripts/exp_data.py` 按上述装置的完整电路模型（精确互感、两串联谐振回路，负载品质因数取与标定相应的值）计算峰位，再按第 (3) 问推出的峰位误差与上述距离误差加入高斯随机误差生成，随机数种子事先固定为 20261017。

1. 忽略损耗，由两回路的简正模推出 k 与 $f_{\pm}$ 的关系式 (6.3)。说明为什么在 d 较大时必须考虑损耗，并写出修正公式。
2. 由标定数据求负载品质因数 Q_L 。
3. 峰位的读数误差。(a) 由式 (6.7) 证明峰顶附近 $T/T_{\text{peak}} \approx 1 - \frac{\Delta_p^2 (\Delta - \Delta_p)^2}{\Gamma^2 \kappa^2}$ ，其中 $\Delta_p = \sqrt{\kappa^2 - \Gamma^2}$ 为峰位。按上述分辨率判据估计峰位误差 σ_f ，并证明 $\sigma_f \approx \sigma_0 k/k_1$ ， $\sigma_0 = \sqrt{\varepsilon_T} \Delta f_{1/2}/2$ 。(b) 求中心凹陷 $T(0)/T_{\text{peak}}$ 的表达式，说明为什么 $d \geq 42 \text{ cm}$ 时读不出两个峰； $d = 46 \text{ cm}$ 时只有一个峰又说明什么？（可利用第 (4) 问 38 cm 处的结果。）
4. 计算各距离处的 k 及其不确定度（分别给出峰位、 Q_L 误差与距离误差的贡献）。
5. 在双对数坐标中作 $k-d$ 图。用 $d \geq 22 \text{ cm}$ 的点拟合 $k \propto d^{-n}$ ，求 n 。结果与偶极近似的 $n = 3$ 一致吗？为什么？
6. 由式 (3.9) 的首项， $k \approx K/(d^2 + s^2)^{3/2}$ ，其中 $s^2 = a_1^2 + a_2^2 = 2a^2$ ， $K = \mu_0 \pi a^4/(2L)$ 。把它线性化，用 $d \geq 15 \text{ cm}$ 的数据做加权最小二乘拟合，求 K 、 s 及其不确定度，与理论值比较。
7. 讨论系统误差与改进方案。

解答

- (1) 推导见第 6.1 节： $\omega_{\pm} = \omega_0/\sqrt{1 \mp k}$ ，故 $k_1 = (f_+^2 - f_-^2)/(f_+^2 + f_-^2)$ 。有损耗时，小 k 下峰间距为 $f_0 \sqrt{k^2 - 1/Q_L^2}$ （式 (6.8)），比无损值 $k f_0$ 小； $k \rightarrow 1/Q_L$ 时两峰合并。 d 大时 k 与 $1/Q_L$ 可比，不修正会低估 k 。用拼接公式 (6.10)： $k = \sqrt{k_1^2 + 1/Q_L^2}$ ，它在两个极限下都正确。
- (2) 单个谐振器的半高全宽 $\Delta f_{1/2} = f_0/Q_L$ （带宽定义），所以 $1/Q_L = 17.8/5000 = 3.56 \times 10^{-3}$ ， $\sigma_{1/Q} = 0.2/5000 = 4 \times 10^{-5}$ ， $Q_L = 281 \pm 3$ 。
- (3)(a) 式 (6.7) 的分母 $F(\Delta) = (\kappa^2 + \Gamma^2 - \Delta^2)^2 + 4\Gamma^2 \Delta^2$ 。求导： $F' = 4\Delta(\Delta^2 - \kappa^2 + \Gamma^2)$ ，在峰位 Δ_p 处为零； $F'' = 4(\Delta^2 - \kappa^2 + \Gamma^2) + 8\Delta^2$ ，在 Δ_p 处等于 $8\Delta_p^2$ 。又 $F(\Delta_p) = 4\Gamma^2 \kappa^2$ （第 6.2 节）。

表 2 传输谱两峰的频率（模拟数据）

d/cm	f_-/kHz	f_+/kHz	d/cm	f_-/kHz	f_+/kHz
4	4512.7	5688.7	18	4926.6	5076.2
5	4586.3	5550.5	22	4952.2	5048.8
6	4643.8	5453.2	26	4968.5	5032.3
8	4738.5	5310.8	30	4978.7	5021.8
10	4804.1	5222.5	34	4985.8	5014.2
12	4849.4	5166.0	38	4991.5	5008.8
15	4895.2	5111.6			

泰勒展开到二阶：

$$\begin{aligned}\frac{T}{T_{\text{peak}}} &= \frac{F(\Delta_{\text{p}})}{F(\Delta)} \\ &\approx 1 - \frac{4\Delta_{\text{p}}^2(\Delta - \Delta_{\text{p}})^2}{4\Gamma^2\kappa^2} \\ &= 1 - \frac{\Delta_{\text{p}}^2(\Delta - \Delta_{\text{p}})^2}{\Gamma^2\kappa^2}.\end{aligned}$$

按题设的分辨率判据，凡是 T/T_{peak} 下降不到 ε_T 的频率都与峰顶分辨不开，所以峰位误差约为 $|\Delta - \Delta_{\text{p}}| \sim \sqrt{\varepsilon_T} \Gamma \kappa / \Delta_{\text{p}}$ 。（这是“峰顶平坦区宽度”的估计。若改用宽窗口内许多点作最小二乘拟合，顶点误差会更小，且 $\propto \varepsilon_T$ 而不是 $\sqrt{\varepsilon_T}$ ，但仍 $\propto \kappa / \Delta_{\text{p}}$ ，所以误差随距离增大的趋势不变。）换成频率（ $\Gamma/2\pi = \Delta f_{1/2}/2$ ），并用 $\kappa/\Delta_{\text{p}} = k/\sqrt{k^2 - Q_{\text{L}}^{-2}} \approx k/k_1$ ：

$$\sigma_f \approx \sigma_0 \frac{k}{k_1}, \quad \sigma_0 = \sqrt{\varepsilon_T} \frac{\Delta f_{1/2}}{2} = 0.28 \text{ kHz}.$$

两峰分得很开时 $k/k_1 \approx 1$ ， $\sigma_f = \sigma_0$ ；两峰靠近时峰顶变平， σ_f 增大（38 cm 处 $k/k_1 = 1.43$ ， $\sigma_f = 0.40 \text{ kHz}$ ）。

(b) 中心凹陷 $T(0)/T_{\text{peak}} = F(\Delta_{\text{p}})/F(0) = 4\kappa^2\Gamma^2/(\kappa^2 + \Gamma^2)^2 = 4\xi^2/(1 + \xi^2)^2$ ， $\xi = \kappa/\Gamma = kQ_{\text{L}}$ 。用 38 cm 处的 $k = 4.96 \times 10^{-3}$ （第 (4) 问）与那里的局部幂次约 2.7 外推，42 cm 处 $k \approx 3.8 \times 10^{-3}$ ， $\xi \approx 1.06$ ， $T(0)/T_{\text{peak}} \approx 0.996$ ：凹陷只有 ε_T 的几倍，而由 (a)，峰位误差（约 0.8 kHz）已达两峰离中心距离（约 3 kHz）的四分之一，读出的峰位几乎不含信息。 $d = 46 \text{ cm}$ 只有一个峰，说明那里 $k < 1/Q_{\text{L}} = 3.6 \times 10^{-3}$ ，与外推值 $k(46) \approx 3.0 \times 10^{-3}$ 一致。

(4) k_1 对两个峰位的偏导数为 $\partial k_1 / \partial f_{\pm} = \pm 4f_{\pm} f_{\mp}^2 / (f_{+}^2 + f_{-}^2)^2$ ，两峰误差独立，所以 $\sigma_{k_1} = 4f_{+} f_{-} \sqrt{f_{+}^2 + f_{-}^2} \sigma_f / (f_{+}^2 + f_{-}^2)^2$ （ $k \ll 1$ 时约 $\sqrt{2} \sigma_f / f_0$ ）。再由 $k = \sqrt{k_1^2 + Q_{\text{L}}^{-2}}$ ：

$$\sigma_k^2(f, Q) = \left(\frac{k_1}{k}\right)^2 \sigma_{k_1}^2 + \left(\frac{Q_{\text{L}}^{-1}}{k}\right)^2 \sigma_{1/Q}^2.$$

Q_{L} 的误差对所有点同向，是系统性的，只在远处重要。距离误差 σ_d 使 k 变化 $\sigma_k(d) = n_{\text{loc}} k \sigma_d / d$ ，其中 $n_{\text{loc}} = -d \ln k / d \ln d$ 是由相邻数据点求得的局部幂次（近距离只有 0.8，不能用 3）。结果（`scripts/exp_fit.py`；峰位与 Q_{L} 部分用两万次蒙特卡洛抽样核对：按误差分布随机生成数据、重复计算 k 、统计 k 的离散）：

d/cm	k_1	k	$\sigma_k(f, Q)$	$\sigma_k(d)$	d/cm	k_1	k	$\sigma_k(f, Q)$	$\sigma_k(d)$
4	0.22753	0.22756	0.8	24.0	18	0.02990	0.03012	0.8	1.7
5	0.18853	0.18857	0.8	16.7	22	0.01932	0.01964	0.8	1.0
6	0.15930	0.15934	0.8	13.6	26	0.01276	0.01325	0.8	0.6
8	0.11353	0.11359	0.8	9.2	30	0.00862	0.00933	0.8	0.4
10	0.08331	0.08339	0.8	6.1	34	0.00568	0.00670	0.8	0.3
12	0.06316	0.06326	0.8	4.2	38	0.00346	0.00496	0.9	0.2
15	0.04323	0.04338	0.8	2.7					

(误差以 10^{-4} 为单位。) 近距离以 d 的读数误差为主, $d \geq 26$ cm 以峰位误差为主。38 cm 处 k_1 只有 k 的 70%, 损耗修正达 30%。下面拟合时取两者的合成误差。

(5) 令 $X = \ln d$, $Y = \ln k$, $\sigma_Y = \sigma_k/k$, 用加权最小二乘 (附录 E) 拟合 $d \geq 22$ cm 的 5 个点:

$$n = 2.47 \pm 0.02, \quad \chi^2/\nu = 9.3/3.$$

$\chi^2/\nu \approx 3.1$ ($p \approx 2.5\%$), 说明直线 (纯幂律) 模型本身不对。按附录 E 的约定 (与 (6) 相同), 把不确定度乘以 $\sqrt{\chi^2/\nu} = 1.76$, 得 $n = 2.47 \pm 0.04$, 仍偏离 3 约 13 倍标准差。 Q_L 的标定误差对所有点同向 (系统误差), 使 n 整体移动约 ± 0.01 , 小于上述统计误差。相邻两点的局部斜率从 4–5 cm 处的 0.84 一直增大到 34–38 cm 处的 2.70, 与精确互感给出的局部斜率 (0.87 到 2.63) 一致。原因是 d^{-3} 只在 $d \gg a$ 时成立; 本实验最远只到 $3.8a$, 局部幂次还没有到达 3。由式 (3.9), 局部幂次 $n_{\text{eff}} = -d \ln k / d \ln d \approx 3d^2/(d^2 + s^2)$, 取 $s = \sqrt{2}a$, $d = 3.8a$ 时只有 2.6, 要到 $d = 10a$ 才达到 2.94。近距离 ($d < a$) 时 k 随 $\ln(1/d)$ 变化 (式 (3.12)), 局部幂次远小于 1。

(6) 把 $k = K(d^2 + s^2)^{-3/2}$ 写成

$$k^{-2/3} = K^{-2/3}d^2 + K^{-2/3}s^2 \equiv p_1d^2 + p_0,$$

以 d^2 为自变量、 $k^{-2/3}$ 为因变量作直线拟合, 权重取 $1/\sigma_y^2$, $\sigma_y = \frac{2}{3}k^{-5/3}\sigma_k$ 。用 $d \geq 15$ cm 的 7 个点:

$$p_1 = (215.4 \pm 1.3) \text{ m}^{-2}, \quad p_0 = 3.29 \pm 0.05, \\ \chi^2/\nu = 3.8/5.$$

$s^2 = p_0/p_1$, $K = p_1^{-3/2}$ 。 p_1 、 p_0 的误差相关, 求 s 的误差要计入协方差 (附录 E)。 $\chi^2/\nu < 1$, 不需要放大不确定度:

$$s = (12.36 \pm 0.13) \text{ cm}, \\ K = (3.16 \pm 0.03) \times 10^{-4} \text{ m}^3.$$

理论值: $s = \sqrt{2}a = 14.1$ cm, $K = \mu_0\pi a^4/(2L) = 3.35 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ 。两者分别偏离了约 14 个与 7 个标准差。

这是模型误差, 不是测量出了问题: 把精确理论值 $k(d)$ (无噪声) 在相同的 d 与权重下做同样的拟合, 得到 $s = 12.59$ cm、 $K/K_{\text{th}} = 0.955$, 与实测拟合结果 ($s = 12.36 \pm 0.13$ cm, $K/K_{\text{th}} = 0.944 \pm 0.009$) 在 2 倍标准差内一致。原因是式 (3.9) 只保留到 $(a/d)^2$ 阶, 在 $d = 1.5a$ 到 $3.8a$ 的范围内, 被略去的高阶项被拟合吸收进了 K 与 s ; 在这个范围内 χ^2 还不足以把它

们识别出来。更直接的检验：把全部 13 个 k 与精确互感给出的 $k(d)$ （没有任何自由参数）比较， $\chi^2 = 8.1/13$ 。还要注意 K_{th} 必须用工作频率下的高频电感：若误用低频值 $0.620 \mu\text{H}$ ， K_{th} 小 5%， K/K_{th} 变成约 0.99，恰好与要识别的模型误差同量级，会得出相反的结论。结论：数据与精确互感理论一致；“ $s = \sqrt{2}a$ ”和“ $n = 3$ ”都只是 $d \gg a$ 的渐近性质。

(7) 系统误差与改进：

- 耦合环之间、耦合环与另一个谐振环之间的直接耦合，会在传输谱上叠加一个与谐振无关的背景，使峰位轻微移动。应让耦合环足够小、足够远，或先用“去掉一个谐振环”的测量扣除背景。
- 两谐振器的失谐 δf 使分裂变为 $\sqrt{(kf_0)^2 + \delta f^2}$ （式 (6.4)），在远处高估 k 。每次改变距离后应重新检查两者单独的谐振频率。
- 近距离的主要误差是 d 的读数（4 cm 处 0.5 mm 已使 k 有 1% 的误差），可改用定位夹具或测量两环导线中心的距离；远处的主要误差是峰顶变平，可以改为用整条谱线拟合式 (6.5)，而不只读峰位。
- 要检验 $n \rightarrow 3$ ，需要把测量推到 $d \gtrsim 10a$ ，那里 $k \sim 3 \times 10^{-4} \ll 1/Q_L$ ，频率分裂法失效。可以改用其他方法测 k ：例如测 f_0 处的传输系数 $T(0) = 4\Gamma_c^2 \kappa^2 / (\kappa^2 + \Gamma^2)^2$ ，它在 $\kappa \ll \Gamma$ 时正比于 k^2 。
- 环境中的金属物体（实验桌、仪器外壳）会改变互感与 Q 。

评分要点（共 40 分）：(1) 简正模频率与 k_1 公式 3 分，损耗修正及两个极限 3 分；(2) Q_L 及其误差 2 分；(3) 峰顶展开 4 分， $\sigma_f = \sigma_0 k / k_1$ 3 分，凹陷公式与 42/46 cm 的判断 4 分；(4) k 表 4 分，三种误差来源（含 n_{loc} ）4 分；(5) 拟合 n 与 χ^2 3 分，解释 $n < 3$ 3 分；(6) 线性化与拟合 3 分，协方差 1 分，识别模型误差 2 分；(7) 至少三条合理的系统误差及改进 1 分。

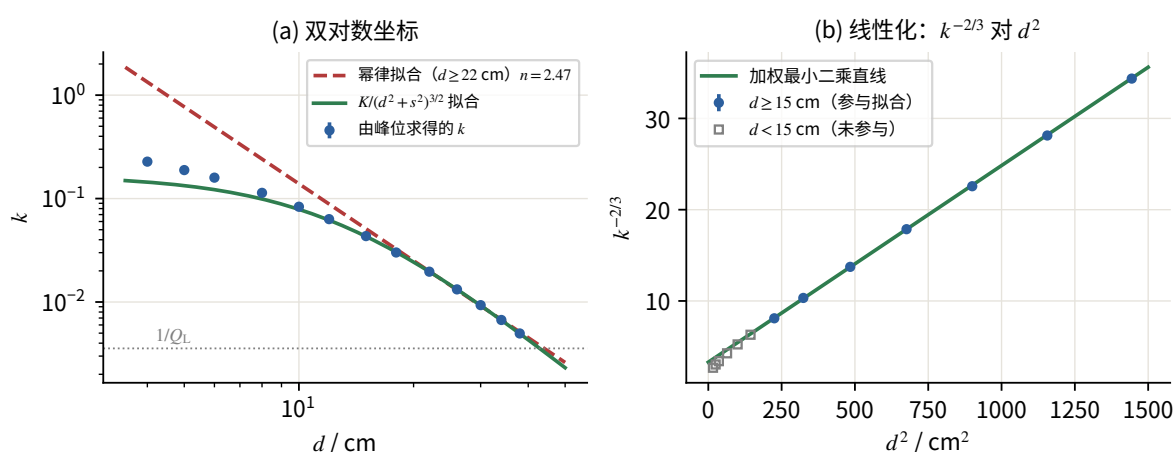


图 10 实验题的数据处理。(a) 双对数坐标： $d \geq 22$ cm 的幂律拟合给出 $n = 2.47$ ，明显小于 3； $K/(d^2 + s^2)^{3/2}$ 的拟合在 $d \geq 15$ cm 范围内与数据一致，近距离偏低（那里 k 按 $\ln(1/d)$ 变化）；点线为 $1/Q_L$ 。(b) 线性化 $k^{-2/3}$ — d^2 及加权最小二乘直线。

10 小结：推导链

1. **互感**: 毕奥–萨伐尔定律 $\Rightarrow$ 矢势 $\mathbf{A}$ (式 (3.6)) $\Rightarrow$ (斯托克斯定理) 诺依曼公式 (3.7) $\Rightarrow$ 同轴圆环 M 的积分式 (3.8) $\Rightarrow$ 远场 $M \approx \mu_0 \pi a_1^2 a_2^2 / (2d^3)$ (式 (3.10), 含首级修正的式 (3.9))、近距离 $\mu_0 a [\ln(8a/d) - 2]$ (式 (3.12)) $\Rightarrow$ 自感 $L = \mu_0 a \Lambda$ (式 (3.13)) $\Rightarrow k \propto d^{-3}$ (式 (3.14))。
2. **谐振与损耗**: 复阻抗 $\Rightarrow Q = \omega_0 L / R$ 的三种等价定义; 趋肤深度 (4.5) $\Rightarrow R_\Omega \propto \omega^{1/2}$ (式 (4.6)); 偶极辐射 $\Rightarrow R_{\text{rad}} \propto \omega^4$ (式 (4.9)) $\Rightarrow Q$ 的最优频率 (式 (4.10))。
3. **效率**: 两回路电路方程 (5.1)–(5.2) $\Rightarrow$ 反射阻抗 (5.5) $\Rightarrow$ 效率的分配式 (5.7) $\Rightarrow$ (谐振) $\eta(x, U)$ (式 (5.9)) $\Rightarrow$ 最优负载 $x = \sqrt{1 + U^2}$ 与 $\eta_{\max} = U^2 / (1 + \sqrt{1 + U^2})^2$ (式 (5.11)), $U = k\sqrt{Q_1 Q_2}$ 。
4. **频域与时域**: 无损简正模 $\omega_\pm = \omega_0 / \sqrt{1 \mp k}$ (式 (6.1)); 有损传输谱 $\Rightarrow$ 临界耦合 $k_c = 1/Q_L$ 与峰间距 $\omega_0 \sqrt{k^2 - 1/Q_L^2}$ (式 (6.8)); 慢变包络 $\Rightarrow$ 耦合模方程 (6.11) ($\kappa = k\omega_0/2$, $\Gamma = \omega_0/2Q$) $\Rightarrow$ 能量交换 (6.12) 与稳态效率 (与电路结果相同, $U = \kappa/\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2}$)。
5. **应用**: $U \propto Q(a/d)^3 \Rightarrow$ 有效距离 $\propto aQ^{1/3}$; 近场 $E/cB \lesssim \omega r/c \Rightarrow$ 磁谐振与环境、人体相互作用弱; 组织涡流损耗 (7.3); 中继线圈 $1 - \eta \approx 2\sqrt{2}/u$ 。

要点：一句话

两个谐振器之间能否高效传能，取决于“能量转移的速率 κ ”与“能量损失的速率 Γ ”之比 $U = \kappa/\Gamma = kQ$ 。几何决定 k ，材料与频率决定 Q ；谐振把很小的 k 放大成可用的 U 。

参考文献

- [1] Wardencllyffe Tower. Wikipedia, 2026. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Wardencllyffe_Tower. accessed 2026-10-17.
- [2] Nikola Tesla. Apparatus for transmitting electrical energy. U.S. Patent 1,119,732 (filed Jan. 18, 1902; granted Dec. 1, 1914), 1914. URL <https://patents.google.com/patent/US1119732A>.
- [3] André Kurs, Aristeidis Karalis, Robert Moffatt, J. D. Joannopoulos, Peter Fisher, and Marin Soljačić. Wireless power transfer via strongly coupled magnetic resonances. *Science*, 317 (5834):83–86, 2007. doi: 10.1126/science.1143254.
- [4] Aristeidis Karalis, J. D. Joannopoulos, and Marin Soljačić. Efficient wireless non-radiative mid-range energy transfer. *Annals of Physics*, 323:34–48, 2008. doi: 10.1016/j.aop.2007.04.017. arXiv:physics/0611063.
- [5] Wireless Power Consortium. Wikipedia, 2026. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Wireless_Power_Consortium. accessed 2026-10-17.
- [6] Dries van Wageningen and Toine Staring. The Qi wireless power standard. In *Proceedings of 14th International Power Electronics and Motion Control Conference (EPE-PEMC 2010)*, 2010. doi: 10.1109/EPEPEMC.2010.5606673.

- [7] Qi (standard). Wikipedia, 2026. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Qi_\(standard\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Qi_(standard)). accessed 2026-10-17.
- [8] SAE International. SAE J2954: Wireless power transfer for light-duty plug-in/electric vehicles and alignment methodology, 2020. URL https://www.sae.org/standards/content/j2954_202010/.
- [9] SAE J2954. Wikipedia, 2026. URL https://en.wikipedia.org/wiki/SAE_J2954. accessed 2026-10-17.
- [10] Kush Agarwal, Rangarajan Jegadeesan, Yong-Xin Guo, and Nitish V. Thakor. Wireless power transfer strategies for implantable bioelectronics. *IEEE Reviews in Biomedical Engineering*, 10:136–161, 2017. doi: 10.1109/RBME.2017.2683520.
- [11] Ada S. Y. Poon, Stephen O’Driscoll, and Teresa H. Meng. Optimal frequency for wireless power transmission into dispersive tissue. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 58:1739–1750, 2010. doi: 10.1109/TAP.2010.2044310.
- [12] F. E. Neumann. Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. *Annalen der Physik*, 143:31–44, 1846. doi: 10.1002/andp.18461430103.
- [13] Edward B. Rosa and Frederick W. Grover. Formulas and tables for the calculation of mutual and self-inductance (revised). *Bulletin of the Bureau of Standards*, 8:1–237, 1912. doi: 10.6028/bulletin.185.
- [14] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, 4th edition, 2017. Ch. 11 (dipole radiation, Larmor formula).
- [15] Hermann A. Haus and Weiping Huang. Coupled-mode theory. *Proceedings of the IEEE*, 79: 1505–1518, 1991. doi: 10.1109/5.104225.
- [16] International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection (ICNIRP). Guidelines for limiting exposure to electromagnetic fields (100 kHz to 300 GHz). *Health Physics*, 118:483–524, 2020. doi: 10.1097/HP.0000000000001210.
- [17] S. Gabriel, R. W. Lau, and C. Gabriel. The dielectric properties of biological tissues: II. measurements in the frequency range 10 hz to 20 ghz. *Physics in Medicine and Biology*, 41: 2251–2269, 1996. doi: 10.1088/0031-9155/41/11/002.
- [18] S. Gabriel, R. W. Lau, and C. Gabriel. The dielectric properties of biological tissues: III. parametric models for the dielectric spectrum of tissues. *Physics in Medicine and Biology*, 41: 2271–2293, 1996. doi: 10.1088/0031-9155/41/11/003.
- [19] André Kurs, Robert Moffatt, and Marin Soljačić. Simultaneous mid-range power transfer to multiple devices. *Applied Physics Letters*, 96:044102, 2010. doi: 10.1063/1.3284651.

- [20] Chwei-Sen Wang, Grant A. Covic, and Oskar H. Stielau. Power transfer capability and bifurcation phenomena of loosely coupled inductive power transfer systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 51:148–157, 2004. doi: 10.1109/TIE.2003.822038.

A 同轴圆环互感的精确式与两个极限

A.1 化为完全椭圆积分

定义：完全椭圆积分

对 $0 \leq k_e < 1$ (这里的 k_e 叫“模数”，与耦合系数无关)，第一类与第二类完全椭圆积分定义为

$$K(k_e) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k_e^2 \sin^2 \theta}},$$

$$E(k_e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k_e^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

它们是普通的定积分，可用数值积分或“算术–几何平均”迭代快速计算；科学计算软件中都有现成函数（注意有的软件以 $m = k_e^2$ 为自变量）。

推导：Maxwell 公式

从式 (3.8) 出发，作代换 $\varphi = \pi - 2\theta$ ： $\cos \varphi = -\cos 2\theta = 2\sin^2 \theta - 1$ ， $d\varphi = -2d\theta$ ， φ 从 0 到 2π 对应 θ 从 $\pi/2$ 到 $-\pi/2$ 。分母

$$\begin{aligned} & a_1^2 + a_2^2 + d^2 - 2a_1a_2 \cos \varphi \\ &= (a_1 + a_2)^2 + d^2 - 4a_1a_2 \sin^2 \theta \\ &= [(a_1 + a_2)^2 + d^2] (1 - k_e^2 \sin^2 \theta), \end{aligned}$$

其中 $k_e^2 = \frac{4a_1a_2}{(a_1 + a_2)^2 + d^2}$ 。被积式是 θ 的偶函数，于是

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\dots}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + d^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin^2 \theta - 1}{\sqrt{1 - k_e^2 \sin^2 \theta}} d\theta. \end{aligned}$$

把分子写成 $2\sin^2 \theta - 1 = \frac{2}{k_e^2} [1 - (1 - k_e^2 \sin^2 \theta)] - 1$ ，积分化为 $\left(\frac{2}{k_e^2} - 1\right) K - \frac{2}{k_e^2} E$ 。再用 $\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + d^2} = 2\sqrt{a_1a_2}/k_e$ ：

$$\begin{aligned} M = \mu_0 \sqrt{a_1a_2} & \left[\left(\frac{2}{k_e} - k_e \right) K(k_e) \right. \\ & \left. - \frac{2}{k_e} E(k_e) \right]. \end{aligned} \tag{A.1}$$

A.2 远场展开的核对

$d \gg a$ 时 $k_e \rightarrow 0$ 。把 K 、 E 的被积式按 $k_e^2 \sin^2 \theta$ 展开到三阶并逐项积分, 可得 $(2/k_e - k_e)K - (2/k_e)E = \frac{\pi}{16}k_e^3(1 + \frac{3}{4}k_e^2 + \dots)$, 代入式 (A.1) 得 $M \approx \frac{\pi}{16}\mu_0\sqrt{a_1a_2}k_e^3$, $d \gg a$ 时 $k_e^3 \approx 8(a_1a_2)^{3/2}/d^3$, 即回到式 (3.10)。(scripts/verify_sympy.py 对此做了符号展开核对, 并核对了式 (3.9) 中的系数 15/8。)

A.3 近距离极限

两等半径环 ($a_1 = a_2 = a$) 相距 $d \ll a$ 时, $k_e^2 = 4a^2/(4a^2 + d^2) \rightarrow 1$ 。记 $k'_e = \sqrt{1 - k_e^2} = d/\sqrt{4a^2 + d^2} \approx d/(2a)$ 。 $E(1) = \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 1$, 而 K 对数发散, 要求其渐近形式。

推导: $K \approx \ln(4/k'_e)$

令 $t = \cos \theta$, $K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k_e'^2 + k_e^2 t^2)}}$ 。 $k'_e \rightarrow 0$ 时, 发散只来自 $t \rightarrow 0$ 附近, 那里 $\sqrt{1-t^2} \approx 1$ 。拆成两部分:

$$K \approx \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{k_e'^2 + t^2}} + \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 1 \right) \frac{dt}{t}.$$

第一项 ($k_e \approx 1$) 等于 $\ln(1/k'_e + \sqrt{1+1/k_e'^2}) \approx \ln(2/k'_e)$; 第二项中已令 $k'_e \rightarrow 0$ (它是收敛积分), 令 $t = \sin u$, $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos u}{\sin u} du = \int_0^{\pi/2} \tan \frac{u}{2} du = \ln 2$ 。合起来 $K \approx \ln(4/k'_e)$, 误差 $\mathcal{O}(k_e'^2 \ln k'_e)$ 。

代入式 (A.1) ($2/k_e - k_e \rightarrow 1$, $2/k_e \rightarrow 2$):

$$M \approx \mu_0 a \left[\ln \frac{4}{k'_e} - 2 \right] = \mu_0 a \left[\ln \frac{8a}{d} - 2 \right],$$

即式 (3.12)。把导线轴线上的电流细线与导线表面上的细线之间的距离取为 b , 就得到式 (3.13) 的高频自感。

B 效率的一般公式

任意频率 由式 (5.7) 与 $\text{Re } Z_{\text{ref}} = \omega^2 M^2 (R_2 + R_L)/|Z_2|^2$:

$$\begin{aligned} \eta(\omega) &= \frac{\omega^2 M^2 R_L}{R_1 |Z_2|^2 + \omega^2 M^2 (R_2 + R_L)}, \\ |Z_2|^2 &= (R_2 + R_L)^2 + X_2^2. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

两点值得注意: (i) η 与初级电抗 X_1 无关——初级失谐只改变电源要提供的电压与无功功率, 不改变功率在各电阻间的分配; (ii) 次级失谐 $X_2 \neq 0$ 总是降低效率。所以“最大效率”的工作点要求次级谐振。例题 2 中分叉频率处效率较低, 就是因为那里 $X_2 \neq 0$ 。

两回路电感不同时的耦合模方程 对回路 n 定义能量振幅 $a_n = \sqrt{L_n/2} A_n$ ($|a_n|^2 = W_n$)。由正文的推导, $\dot{A}_1 = -\Gamma_1 A_1 - i\frac{\omega_0 M}{2L_1} A_2$, 乘以 $\sqrt{L_1/2}$:

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= -\Gamma_1 a_1 - i\frac{\omega_0 M}{2L_1} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} a_2 = -\Gamma_1 a_1 - i\kappa a_2, \\ \kappa &= \frac{\omega_0 M}{2\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{k\omega_0}{2}.\end{aligned}$$

回路 2 同理, 耦合率对称。这就是 Kurs 等人的 $\kappa = \omega M / (2\sqrt{L_S L_D})$ [3]。

电源内阻 电源内阻为 R_s 时, 谐振状态下电源看到的负载是纯电阻 $R_{in} = R_1 + \text{Re } Z_{\text{ref}}$, 内阻消耗的比例为 $R_s / (R_s + R_{in})$ 。“电源电动势 $\rightarrow$ 负载”的总效率为 $\eta \cdot R_{in} / (R_s + R_{in})$ 。负载得到的功率在 $R_{in} = R_s$ (匹配) 时最大, 此时总效率不超过 $\eta/2$ 。高效率的功率电子电源 (开关放大器) 内阻很小, 可以同时实现高效率与足够的功率。

C 磁偶极辐射功率

假设: 小电流环

边长为 s 的正方形电流环位于 xy 平面, 中心在原点, 电流 $I(t)$ (从 $+z$ 看逆时针), s 远小于辐射波长。磁偶极矩 $\mathbf{m} = Is^2 \hat{\mathbf{z}}$ 。观察点在远处, 方向 $\hat{\mathbf{n}}$, 距离 $r \gg s$ 。

推导: 两对反向电偶极子

第一步, 一段长 s 、载流 I 的短直导线, 其中电荷运动的效果相当于电偶极矩以 $\dot{\mathbf{p}} = Is\dot{\mathbf{l}}$ 变化 ($\hat{\mathbf{l}}$ 为电流方向; $\sum q\mathbf{v} = Is\dot{\mathbf{l}}$)。由拉莫尔公式对应的辐射场, 电偶极子在远处的辐射电场为

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \ddot{\mathbf{p}}) \Big|_{t-r'/c},$$

大小为 $\mu_0 \ddot{p} \sin \theta / (4\pi r)$, r' 是源到观察点的距离。

第二步, 正方形的下边 ($y = -s/2$) 电流沿 $+\hat{\mathbf{x}}$, 上边 ($y = +s/2$) 沿 $-\hat{\mathbf{x}}$: $\ddot{\mathbf{p}}_{\text{下}} = s\dot{I}\hat{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{p}}_{\text{上}} = -s\dot{I}\hat{\mathbf{x}}$ 。二者到观察点的距离相差 sn_y : 上边近, 信号早到 $\tau = sn_y/(2c)$, 下边晚到 τ 。电磁场以光速传播, 观察点在时刻 t 收到的是源在更早时刻 (“推迟时间”) 发出的信号; 以环中心的推迟时间 $t' = t - r/c$ 为准,

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{p}}_{\text{上}}(t' + \tau) + \ddot{\mathbf{p}}_{\text{下}}(t' - \tau) \\ = -s\hat{\mathbf{x}} \left[\dot{I}(t' + \tau) - \dot{I}(t' - \tau) \right] \approx -\frac{s^2 n_y}{c} \ddot{I} \hat{\mathbf{x}},\end{aligned}$$

展开到 τ 的一阶 (要求 $s \ll c/\omega$)。左右两边 ($x = \pm s/2$, 电流分别沿 $\pm \hat{\mathbf{y}}$) 同理给出 $+\frac{s^2 n_x}{c} \ddot{I} \hat{\mathbf{y}}$ 。合起来, 等效的 $\ddot{\mathbf{p}}$ 为

$$\ddot{\mathbf{p}}_{\text{eff}} = \frac{s^2 \ddot{I}}{c} (n_x \hat{\mathbf{y}} - n_y \hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{c} \ddot{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{n}}.$$

第三步, $\ddot{\mathbf{p}}_{\text{eff}} \perp \hat{\mathbf{n}}$, 所以 $\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \ddot{\mathbf{p}}_{\text{eff}}) = -\ddot{\mathbf{p}}_{\text{eff}}$, 辐射电场大小为 $\mu_0 |\ddot{\mathbf{m}}| \sin \theta / (4\pi r c)$ (θ 为 $\hat{\mathbf{n}}$ 与 $\hat{\mathbf{z}}$ 的夹角): 与电偶极子相比, 只是把 $\ddot{p}$ 换成了 $\ddot{m}/c$ 。

第四步, 辐射场中 $B = E/c$, 能流密度 $S = E^2 / (\mu_0 c)$, 对球面积分 ($\int \sin^2 \theta d\Omega = 8\pi/3$):

$$P_m = \frac{\mu_0^2 \ddot{m}^2}{16\pi^2 r^2 c^2} \cdot \frac{r^2}{\mu_0 c} \cdot \frac{8\pi}{3} = \frac{\mu_0 \ddot{m}^2}{6\pi c^3}.$$

$m(t) = m \cos \omega t$ 时 $\overline{\dot{m}^2} = \frac{1}{2}m^2\omega^2$, 得式 (4.8)。结果只依赖 m , 所以对任意形状的小电流环都成立。

D 线圈附近导电组织的涡流电阻

假设：准静态涡流模型

- 单匝圆环（半径 a , 电流 $I \cos \omega t$ ）平行放在导电半空间（电导率 σ , 非磁性）表面上方高 h 处；
- 组织中的趋肤深度远大于 a : 忽略涡流自身产生的磁场；忽略位移电流；
- 组织中的电场就是线圈矢势变化产生的感应电场 $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t$ 。

第三条需要说明。由轴对称，线圈的矢势只有方位分量 $A_\varphi(s, z)$ (s 为到轴的距离)，它产生的电场 $E_\varphi = -i\omega A_\varphi$ 沿圆周方向，处处与组织表面平行，而且散度为零。所以电流不会在表面积累电荷，不需要额外的静电场来修正，这就是组织中真实的电场（在上述近似下）。

推导：电阻系数

平均涡流功率 $\bar{P} = \int_{z>h} \frac{1}{2} \sigma \omega^2 A_\varphi^2 dV$ (以复振幅计)。令 $\bar{P} = \frac{1}{2} R_t I^2$, 并把长度以 a 为单位、 A_φ 以 $\mu_0 I$ 为单位无量纲化：

$$R_t = c_t \sigma \mu_0^2 \omega^2 a^3, \quad c_t \left(\frac{h}{a} \right) = \int_{\tilde{z} > h/a} \left(\frac{A_\varphi}{\mu_0 I} \right)^2 d\tilde{V}. \quad (\text{D.1})$$

A_φ 由式 (3.6) 对圆环积分得到（与互感的计算相同，结果也可写成椭圆积分）：

$$\frac{A_\varphi(s, z)}{\mu_0 I} = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\ell_\varphi^2}},$$

$$\ell_\varphi^2 = a^2 + s^2 + z^2 - 2as \cos \varphi$$

远处 $A_\varphi \approx \mu_0 m \sin \theta / (4\pi r^2)$, $A_\varphi^2 \propto r^{-4}$, 体积分在远处收敛；靠近导线处 A_φ 只有对数发散，平方后仍可积。所以 c_t 是有限的纯数。 N 匝紧绕线圈的 A_φ 乘 N , R_t 乘 N^2 。

`scripts/tissue_coeff.py` 用两种独立方法计算了 c_t : (i) 直接对上式做二维数值积分；(ii) 用矢势的另一种积分表示（贝塞尔函数展开）化成一维积分。两者的相对差约 10^{-4} :

h/a	0	0.05	0.1
c_t	1/3	0.299	0.271

$h = 0$ 时 c_t 恰好等于 $1/3$ （方法 (ii) 可以解析算出）。线圈完全浸在均匀导电介质中时，上下两个半空间各贡献 $1/3$ ，系数为 $2/3$ （例题 3 第 (5) 问）。

E 加权最小二乘

拟合直线 $y = \alpha + \beta x$, 数据 (x_i, y_i) , y_i 的标准误差 σ_i (x_i 的误差已折算进 σ_i)。令权重 $w_i = 1/\sigma_i^2$, 使 $\chi^2 = \sum_i w_i(y_i - \alpha - \beta x_i)^2$ 最小。对 α 、 β 求偏导并令其为零, 得两个线性方程, 记

$$\begin{aligned} S &= \sum w_i, & S_x &= \sum w_i x_i, & S_y &= \sum w_i y_i, \\ S_{xx} &= \sum w_i x_i^2, & S_{xy} &= \sum w_i x_i y_i, \\ \Delta &= SS_{xx} - S_x^2, \end{aligned}$$

解为

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{SS_{xy} - S_x S_y}{\Delta}, \\ \alpha &= \frac{S_{xx} S_y - S_x S_{xy}}{\Delta}. \end{aligned} \tag{E.1}$$

α 、 β 都是 y_i 的线性组合, 由误差传递:

$$\sigma_\beta^2 = \frac{S}{\Delta}, \quad \sigma_\alpha^2 = \frac{S_{xx}}{\Delta}, \quad \text{cov}(\alpha, \beta) = -\frac{S_x}{\Delta}.$$

- **拟合优度**: 若模型正确、误差估计合理, $\chi_{\min}^2$ 应在自由度 $\nu = N - 2$ 附近。 χ^2/ν 明显大于 1, 说明模型不完善或误差被低估; 常用做法是把 σ_α 、 σ_β 乘以 $\sqrt{\chi^2/\nu}$, 并在结论中说明。
- **导出量的误差**: 例如 $s^2 = \alpha/\beta$,

$$\begin{aligned} \sigma_{s^2}^2 &= \frac{\sigma_\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha^2 \sigma_\beta^2}{\beta^4} - \frac{2\alpha}{\beta^3} \text{cov}(\alpha, \beta), \\ \sigma_s &= \frac{\sigma_{s^2}}{2s}. \end{aligned}$$

截距与斜率通常强相关, 忽略协方差项会明显高估或低估误差。