

斯特林机与热声发动机——让声波做热机

第 43 届决赛短训讲义组

2026 年 10 月

目录

1 导读	2
2 名词与符号表	4
3 前置模块	4
3.1 热力学工具箱	4
3.2 回热：热量的“暂存”	7
3.3 复振幅与时间平均	8
3.4 一维线性声学	9
3.5 热扩散与热穿透深度	12
4 斯特林循环与 Schmidt 分析	13
4.1 理想斯特林循环	13
4.2 不完全回热	14
4.3 Schmidt 等温模型	15
5 热声发动机之一：驻波机制	17
5.1 气团的功：瑞利判据的定量形式	17
5.2 驻波中的气团与临界温度梯度	18
5.3 气团模型：为什么热接触要“不完美”	20
5.4 边界层理论：板叠的声功率与热流	22
5.5 起振的能量判据	23
6 热声发动机之二：行波机制与脉管制冷机	24
6.1 行波中的气团：没有活塞的斯特林循环	24
6.2 回热器中的声功率放大	25

1 导读	2
6.3 能流分析：为什么效率是卡诺效率	26
6.4 Backhaus-Swift 热声斯特林发动机	26
6.5 脉管制冷机：能流分析	28
7 决赛风格例题	29
8 实验与数据处理：热声管起振温差与板叠位置	35
9 小结：推导链	38
A 边界层热声学的推导	40
B 非线性 Schmidt 模型的精确解	41
C 最小二乘直线拟合	42
D 名词解释	42

1 导读

一台热机要做的事情只有一件：让工质在高压时吸热、低压时放热。蒸汽机和内燃机用阀门与活塞安排这件事；1816 年苏格兰牧师 Robert Stirling 发明的斯特林机用两个按一定相位差运动的活塞和一块“回热器”安排它；而本讲的主角——热声发动机——干脆连活塞也不要了，让管子里的声波本身去推动气体、安排压强与传热的时机。这三种机器的物理内核是同一个：气体微团在压强振荡与温度振荡之间的相位关系。本讲从普通物理出发，把这条线索完整地走一遍。

背景：从斯特林的“节热器”到太空核电源

- **1816 年专利。**Robert Stirling 的英国专利 (No. 4081) 题为“减少燃料消耗的改进……”，其核心是一种称为 economiser (节热器) 的换热装置：气体由热端流向冷端时把热量存入多孔金属填料，返回时再取回。这正是今天所说的回热器 (regenerator, 后来通行的名称)。1818 年一台这样的机器曾在苏格兰艾尔郡的采石场抽水 [1]。
- **飞利浦的复兴。**荷兰飞利浦公司的实验室从 1930 年代后期起系统研究斯特林机，1951 年前后推出约 200 W 的 MP1002CA 小型发电机组 [2]；把斯特林循环逆向运行，飞利浦又做出了气体制冷机，用于液化空气 [3]。
- **太空核电源。**2017 年 11 月至 2018 年 3 月，美国 NASA 与能源部在内华达国家安全场完成了 KRUSTY (Kilopower Reactor Using Stirling TechnologY) 核试验：高浓铀钼合金堆芯产生的热量由钠热管导出，驱动 2 台 Sunpower 公司额定 80 W 的自由活塞斯特林转换器 (其余 6 个位置为热模拟器)。两台转换器合计最大稳定输出约 183 W (电功率)，转换器热效率 30%–34%，约为相应卡诺效率的 50% [4, 5]，见图 1。

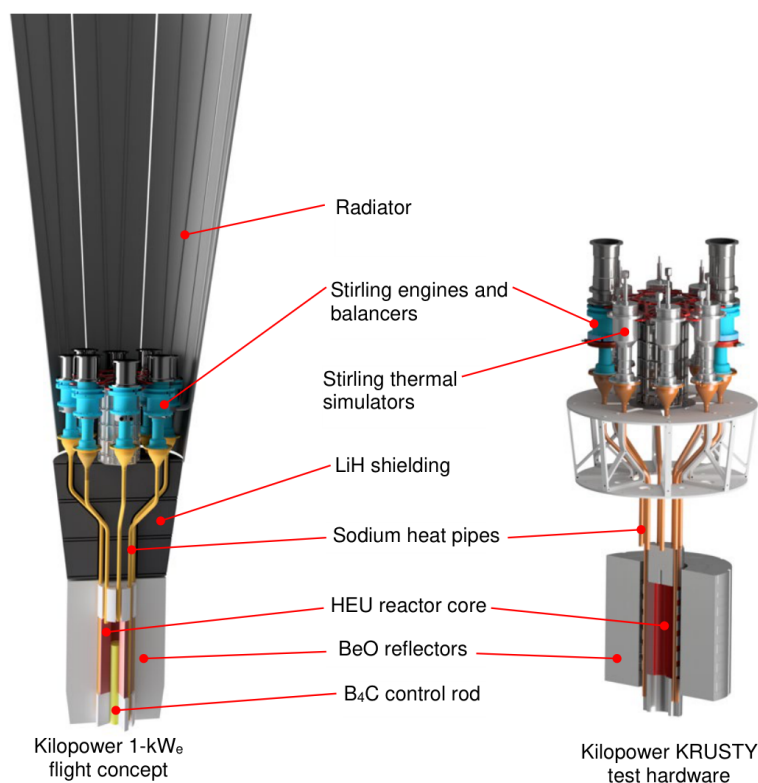


图 1 左: Kilopower 1 kW 级空间核电源的设计概念; 右: KRUSTY 地面核试验硬件构型 (渲染图; 上部为 2 台斯特林发动机与 6 台热模拟器, 下方为钠热管与高浓铀堆芯)。 (图源: M. A. Gibson et al., NASA/TM-2018-219941 (2018), Fig. 1; NASA 技术报告, 美国政府作品, 公有领域)

背景：会唱歌的热：热声现象简史

- 1777 年 Higgins 发现管中的氢气火焰会“唱歌” (1802 年发表) [6]; 吹玻璃工人早就知道, 一端封闭的玻璃泡在热端吹制时会自发鸣响, Sondhauss 于 1850 年系统研究了这种现象 [7]; 1859 年 Rijke 发现在竖直管下部放一块加热的金属网, 管子会发出强烈声音 (Rijke 管) [8]。
- 1878 年瑞利勋爵给出了此类现象的判据 [9, 10]: “如果在空气压缩到最紧的时刻给它热量, 或在最稀疏的时刻从它取走热量, 振动就会被加强。”第 5.1 节将把这句话写成公式。
- 1949 年 Taconis 等人在低温实验中注意到, 从室温插入液氮的细管会自发产生强烈的气柱振荡 (Taconis 振荡) [11]。1969 至 1980 年间 Rott 建立了线性热声理论 [12, 13]; 1979 年 Ceperley 指出斯特林机回热器中压强与速度的相位正是行波的相位, 提出“无活塞斯特林机” [14]; 洛斯阿拉莫斯国家实验室的 Swift 等人把这一领域发展为系统的工程学科 [15, 16]。
- 1999 年 Backhaus 与 Swift 在 *Nature* 发表“热声斯特林发动机” [17]: 没有任何运动部件, 用约 30 个大气压的氦气、约 80 Hz 的声波工作 [18], 热效率达到 0.30, 其详细研究给出此时声功率 710 W、约为卡诺效率的 41% [19]。
- 同一物理也被用于制冷: 1964 年 Gifford 与 Longsworth 提出脉管制冷机 [20], 1984 年 Mikulin 等引入小孔后性能大增 [21]; 它在低温端没有运动部件、振动小、寿命长, 已成

为空间红外探测器的主力制冷机之一 [22, 23]，例如詹姆斯·韦布空间望远镜中红外仪器 MIRI 的制冷机即以三级脉管预冷加焦耳-汤姆孙级达到约 6 K[24]。

学习目标。 学完本讲，你应当能够：

1. 用复振幅处理一维小振幅声波，写出驻波与行波中压强 p_1 、速度 u_1 、位移 ξ_1 的相位关系，计算时间平均声功率；
2. 推导理想斯特林循环效率等于卡诺效率，以及回热不完善时的效率公式；
3. 用线性化的 Schmidt 模型求斯特林机的压强振荡与每循环功 $W \propto \sin \alpha$ ，解释 90° 相位差的意义；
4. 推导驻波热声机的临界温度梯度 ∇T_{crit} ，判断板叠是发动机还是热泵，并理解“不完美热接触”的必要性；
5. 理解行波热声机为什么本质上是无活塞的斯特林机、能逼近卡诺效率；能对脉管制冷机做能流分析；
6. 用能量判据估算热声管的起振温差，并处理相应的实验数据。

前置知识清单。 理想气体状态方程与热力学第一定律、卡诺定理与熵；牛顿第二定律；简单的偏导数与常微分方程；复数运算。本讲需要而普通物理课程通常不讲的内容——复振幅与时间平均、一维声学方程、热扩散方程与热穿透深度、开口系统的焓流——都在第 3 节从头给出。

建议学时与阅读路线。 约 2 学时。第 1 学时：第 3 节（前置模块）与第 4 节（斯特林循环与 Schmidt 分析）；第 2 学时：第 5 节（驻波热声）、第 6 节（行波热声与脉管制冷）及例题。实验题（第 8 节）可课后完成。推导链的总览见第 9 节。

2 名词与符号表

注：两个容易混的记号

本讲用 k 表示波数，热导率改记为 K ；用 u_1 表示气体速度，比内能在不致混淆处记为 u 并随即说明。“超前 α ”指某量比参考量早 α/ω 时间达到极大。

3 前置模块

3.1 热力学工具箱

理想气体与比热。 对质量为 m 、摩尔数为 n 的理想气体， $pV = nRT = mR_sT$ ，其中 $R_s = R/M$ 是比气体常数（ M 为摩尔质量；氮 $R_s = 2077 \text{ J}/(\text{kg K})$ ，空气 $R_s \approx 287 \text{ J}/(\text{kg K})$ ）。写成单位质量

表 1 本讲主要符号（下标 m 表示时间平均值，下标 1 表示一阶振荡量；带 “^” 者为复振幅）

符号	含义	单位
p_m, ρ_m, T_m	平均压强、密度、温度	Pa, kg/m ³ , K
p_1, u_1, ξ_1, T_1	压强、速度、位移、温度的一阶振荡	Pa, m/s, m, K
$\hat{p}, \hat{u}, \hat{\xi}, \hat{T}$	对应的复振幅: $p_1(t) = \text{Re}[\hat{p}e^{i\omega t}]$	同上
$\omega = 2\pi f$	角频率	rad/s
$c, k = \omega/c, \lambda$	声速、波数、波长	m/s, 1/m, m
$\gamma = c_p/c_v$	比热比	1
c_p, c_v	单位质量的定压、定容比热	J/(kg·K)
C_V	摩尔定容热容	J/(mol·K)
$R, R_s = R/M$	摩尔气体常数、比气体常数	J/(mol·K), J/(kg·K)
K	热导率	W/(m·K)
$\kappa = K/(\rho_m c_p)$	热扩散率	m ² /s
$\nu = \mu/\rho_m$	运动粘度 (μ 为粘度)	m ² /s
$\delta_\kappa = \sqrt{2\kappa/\omega}$	热穿透深度	m
$\delta_\nu = \sqrt{2\nu/\omega}$	粘性穿透深度	m
$\sigma = \nu/\kappa$	普朗特数	1
T_H, T_C	热端、冷端温度	K
η, η_C	热机效率、卡诺效率	1
ε	回热有效度	1
α	Schmidt 模型中热腔体积超前冷腔的相位	rad
$\nabla T \equiv dT_m/dx$	板叠/回热器中的平均温度梯度	K/m
$T_{ad} = \hat{p}/(\rho_m c_p)$	绝热温度振荡幅	K
∇T_{crit}	临界温度梯度	K/m
$\Gamma = \nabla T/\nabla T_{crit}$	归一化温度梯度	1
τ	气团与壁面的热弛豫时间	s
$\dot{W}, \dot{H}, \dot{Q}$	时间平均的声功率、总能流（焓流）、热流	W
$I = \langle p_1 u_1 \rangle$	声强（单位面积声功率）	W/m ²
$h = u + p/\rho$	单位质量的焓 (u 为比内能)	J/kg
$\hat{T}_L, \hat{T}_E$	跟随气团、固定点的温度振荡	K
$\hat{U} = A\hat{u}$	体积流速复振幅 (A 为截面积)	m ³ /s
L (集总)	惯性 $\rho_m \Delta x/A$ (仅第 6.4 节)	kg/m ⁴
C (集总)	柔度 $V/(\gamma p_m)$ (仅第 6.4 节)	m ³ /Pa
R_v	集总流阻 (仅第 6.4 节)	Pa·s/m ³
$C = \dot{m}c_p$	热容流量 (仅第 3.2 节)	W/K
r_v	回热器粘性阻力系数, $dp/dx = -r_v u$	Pa·s/m ²
r_h	水力半径 (气体体积/湿面积)	m
$z = \hat{p}/\hat{u} $	比声阻抗的模	Pa·s/m
L, L_{eff}, R_t	管长、有效长度、管内半径	m
X, X_s	到封闭端的距离、板叠中心位置	m
$\varphi = kX_s$	板叠处的相位	rad
$y_0, \Pi, \Delta x$	板间半距、单位长度湿周、板叠长	m, m, m
$B, a = \sqrt{\sigma}/(\gamma - 1)$	无量纲损耗参数、粘性参数 (第 5.5 节)	1
R (反射系数)	仅在第 3.4 节: $\hat{p} = P(e^{-ikx} + Re^{ikx})$	1

形式: $pv = R_s T$, $v = 1/\rho$ 为比体积。理想气体的比内能只与温度有关, $du = c_v dT$, 并有迈耶关系 $c_p - c_v = R_s$ 。记 $\gamma = c_p/c_v$, 则

$$c_p = \frac{\gamma R_s}{\gamma - 1}, \quad c_v = \frac{R_s}{\gamma - 1}. \quad (3.1)$$

单原子气体 (He) $\gamma = 5/3$, 空气 $\gamma \approx 1.40$ 。

推导: 第一定律的两种写法

单位质量气体吸热 δq , 第一定律给出 $\delta q = du + p dv = c_v dT + p dv$ 。对 $pv = R_s T$ 取微分: $p dv + v dp = R_s dT$, 即 $p dv = R_s dT - v dp$ 。代回:

$$\delta q = (c_v + R_s) dT - v dp = c_p dT - \frac{dp}{\rho}. \quad (3.2)$$

这一写法把“温度变化”和“压强变化”分开, 后文分析气团时总用它。

绝热过程。 令式 (3.2) 中 $\delta q = 0$: $c_p dT = dp/\rho = R_s T dp/p$, 即 $dT/T = (R_s/c_p) dp/p = \frac{\gamma-1}{\gamma} dp/p$ 。积分得

$$T \propto p^{(\gamma-1)/\gamma}, \quad p \propto \rho^\gamma. \quad (3.3)$$

(第二式由第一式与 $p = \rho R_s T$ 消去 T 得到。) **等温过程中** n 摩尔气体由 V_1 到 V_2 对外做功 $W = \int p dV = nRT \ln(V_2/V_1)$, 吸热等于做功 (内能不变)。

卡诺效率、熵产与损失功。 在 T_H 吸热 Q_H 、在 T_C 放热 Q_C 的任何热机, 做功 $W = Q_H - Q_C$ 。两个热源的总熵变——即这一循环的熵产——为

$$S_{\text{gen}} = \frac{Q_C}{T_C} - \frac{Q_H}{T_H} \geq 0 \quad (3.4)$$

(工质完成循环, 自身熵不变; 热力学第二定律要求总熵不减)。从中解出 Q_C 代入 W :

$$W = Q_H \left(1 - \frac{T_C}{T_H}\right) - T_C S_{\text{gen}} = \eta_C Q_H - T_C S_{\text{gen}}, \quad \eta_C \equiv 1 - \frac{T_C}{T_H}. \quad (3.5)$$

所以效率 $\eta = W/Q_H \leq \eta_C$, 等号当且仅当过程可逆 ($S_{\text{gen}} = 0$); 每产生 S_{gen} 的熵, 就少做 $T_C S_{\text{gen}}$ 的功 (“损失功”)。凡有限温差下的传热、摩擦、节流都产生熵, 因而都降低效率——这是后文比较各种机器的统一标尺。

定义: 焓与开口系统的能量方程

设一个固定或可变的空间 (“控制体”) 中有气体流入流出。质量 dm 的气体流入时, 除了带入自身内能 $u dm$, 后面的气体还要把它 “推” 进来, 做功 $p \cdot v dm$ (推动距离乘以截面积恰好是它所占的体积 $v dm$)。因此随流动带入的能量是

$$h dm, \quad h \equiv u + pv = u + \frac{p}{\rho},$$

h 称为单位质量的焓。理想气体 $h = c_v T + R_s T = c_p T$ (取 $T = 0$ 时为零), 只与温度有关。控制体的能量方程为

$$\frac{dU_{\text{cv}}}{dt} = \dot{Q} - p \frac{dV_{\text{cv}}}{dt} + h_{\text{in}} \dot{m}_{\text{in}} - h_{\text{out}} \dot{m}_{\text{out}}, \quad (3.6)$$

其中 $\dot{Q}$ 为由外界传入的热流, $p dV_{cv}/dt$ 为控制体边界 (如活塞) 移动时气体对外做功的功率。

例题：等温腔：吸热等于 $\oint p dV$

一个温度恒为 T_0 的腔体, 体积 $V(t)$ 周期变化, 理想气体通过一个开口以温度 T_0 进出。求一个周期内腔壁传给气体的热量。

解答

腔内气体内能 $U_{cv} = m_{cv} c_v T_0$, 进出气体的焓 $h = c_p T_0$ 都是常数。把式 (3.6) 对一个周期积分: 左边 $c_v T_0 \oint dm_{cv} = 0$ (周期性); 净流入的焓 $c_p T_0 \oint dm_{cv} = 0$ 。于是

$$Q_{\text{每周期}} = \oint p dV. \quad (3.7)$$

即: 等温腔每循环从壁面吸收的热量等于腔内气体在该循环对活塞做的净功。这是第 4.3 节 Schmidt 分析中 “热量 = 功” 的依据。

3.2 回热：热量的“暂存”

定义：回热器与回热有效度

回热器是一段填满细金属丝网或小颗粒的通道, 填料的热容远大于一次流过的气体的热容, 沿通道维持一个从 T_H 到 T_C 的温度分布。气体从热端流向冷端时, 每一处都把热量交给比它略冷的填料, 到冷端时已降到约 T_C ; 之后气体反向流动, 再一路从填料取回热量, 到热端时回升到约 T_H 。一个循环中填料净得热量为零, 它只是暂存热量。

设理想情形下一次流动应当交换的热量为 Q_R , 实际交换的为 εQ_R , 则 $\varepsilon \in [0, 1]$ 称为回热有效度。

为什么回热不违背第二定律、而且能提高效率? 因为在理想回热器的每一处, 气体与填料的温差都趋于零, 传热几乎可逆 (式 (3.4) 中对应的熵产趋于零); 否则这部分热量就得从 T_H 热源取、向 T_C 热源放, 跨越整个温差, 产生大量熵。

推导：有效度的一个模型：平衡逆流换热器

常用的近似模型是把回热器看作 “两股流动在同一时刻、反向流过” 的逆流换热器^a。设热流体以 $T_{h,in}$ 进入, 冷流体以 $T_{c,in}$ 从另一端进入, 两股流的热容流量相同, 都为 $C = \dot{m} c_p$ 。

1. 由于热容流量相同, 热流体每降温 dT 冷流体就升温 dT , 两条温度曲线平行, 温差 ΔT 沿换热器处处相同。
2. 总换热量 $\dot{Q} = UA \Delta T$ 。这里 U 由牛顿冷却定律定义: 面积元 dA 上两股流体之间的换热量 $d\dot{Q} = U(T_h - T_c) dA$, U 称为总传热系数, A 为总换热面积; 又 $\dot{Q} = C(T_{h,in} - T_{h,out})$ 。
3. 在冷端, 热流体出口与冷流体入口相邻, $T_{h,out} - T_{c,in} = \Delta T$ 。

记 $D = T_{h,in} - T_{c,in}$ 。由 2、3 得 $\dot{Q}/C + \dot{Q}/(UA) = D$, 故有效度 (实际换热量与最大可能换

热量 CD 之比) 为

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{CD} = \frac{NTU}{1 + NTU}, \quad NTU \equiv \frac{UA}{C}. \quad (3.8)$$

NTU (传热单元数) 衡量换热面积相对流量的充裕程度。 $\varepsilon \rightarrow 1$ 要求 $NTU \rightarrow \infty$: 极大的换热面积, 也就意味着极细的通道与较大的流阻。

^a等效的条件: 填料热容远大于一次流过的气体的热容, 于是半个周期内填料温度分布几乎“冻结”; 正、反两次流动看到的是同一条填料温度曲线, 与两股流体隔着同一壁面同时逆向流过等效。这是一个近似模型。

3.3 复振幅与时间平均

本讲所有振荡量都以同一角频率 ω 正弦变化。约定:

$$a(t) = \operatorname{Re} [\hat{a} e^{i\omega t}], \quad \hat{a} = |\hat{a}| e^{i\phi_a}, \quad (3.9)$$

即 $a(t) = |\hat{a}| \cos(\omega t + \phi_a)$ 。 $\hat{a}$ 称为 a 的复振幅, 它的模是振幅、辐角是相位。若 $\phi_a > \phi_b$ (差值在 0 到 π 之间), 称 a 超前 b 。

线性运算。 对线性运算 (相加、乘常数、求导、积分), 可以先对复振幅运算再取实部: $da/dt = \operatorname{Re}[i\omega \hat{a} e^{i\omega t}]$, 所以“求导”对应“乘 $i\omega$ ”。乘以 i 就是把相位超前 90° 。

乘积要小心。 两个振荡量的乘积不等于复振幅乘积的实部, 但它的时间平均有简单公式。

推导: 时间平均公式

记 $A = \hat{a} e^{i\omega t}$, $B = \hat{b} e^{i\omega t}$ 。利用 $\operatorname{Re} z = (z + z^*)/2$:

$$a(t)b(t) = \frac{(A + A^*)(B + B^*)}{4} = \frac{AB + A^*B^*}{4} + \frac{AB^* + A^*B}{4}.$$

第一组含 $e^{\pm 2i\omega t}$, 一个周期平均为零; 第二组 $AB^* = \hat{a}\hat{b}^*$ 与时间无关。因此

$$\langle a(t)b(t) \rangle = \frac{1}{4}(\hat{a}\hat{b}^* + \hat{a}^*\hat{b}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\hat{a}\hat{b}^*) = \frac{1}{2} |\hat{a}| |\hat{b}| \cos(\phi_a - \phi_b). \quad (3.10)$$

所以两个同频振荡的乘积平均值只取决于它们的“同相分量”: 相位差 90° 的两个量, 乘积平均为零。

推导: 一个循环的功 $\oint p dV$

设压强 $p = p_0 + p_1(t)$ 、体积 $V = V_0 + V_1(t)$ 。一个周期 $2\pi/\omega$ 内, $\oint p_0 dV = p_0 \oint dV = 0$, 所以 $\oint p dV = \int_0^{2\pi/\omega} p_1 \dot{V}_1 dt = \frac{2\pi}{\omega} \langle p_1 \dot{V}_1 \rangle$ 。由式 (3.10) 并用 $\dot{V}_1 \leftrightarrow i\omega \hat{V}$:

$$\langle p_1 \dot{V}_1 \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\hat{p}(i\omega \hat{V})^*] = \frac{\omega}{2} \operatorname{Re} [-i \hat{p} \hat{V}^*] = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} (\hat{p} \hat{V}^*).$$

于是

$$W = \oint p dV = \pi \operatorname{Im} (\hat{p} \hat{V}^*) = \pi |\hat{p}| |\hat{V}| \sin(\phi_p - \phi_V). \quad (3.11)$$

要点：一句话

压强与体积同相时 p - V 图退化为一 条线段，不做净功；压强超前体积 ($0 < \phi_p - \phi_V < \pi$) 时，气体在高压时膨胀，做正功； p 超前 V 恰为 90° 时同样振幅下功最大。

3.4 一维线性声学**假设：线性声学**

1. 一维：所有量只依赖于管轴坐标 x 和时间 t (管径远小于波长)。
2. 小振幅： $|p_1| \ll p_m$, $|\rho_1| \ll \rho_m$, $|u_1| \ll c$ 。小参量是 $|p_1|/p_m$ ；方程只保留一阶项，两个一阶量的乘积 (二阶) 舍去。
3. 无平均流动；平均态 p_m, ρ_m, T_m 均匀 (本小节)。
4. 远离管壁的气体既无粘性也不导热，振荡是绝热的。理由：热量在一个周期内扩散的距离 δ_κ (第 3.5 节) 远小于波长，例如 100 Hz 空气中 $\delta_\kappa \approx 0.27 \text{ mm}$ ，而 $\lambda \approx 3.5 \text{ m}$ 。

欧拉描述与拉格朗日描述。 $p_1(x, t)$ 、 $u_1(x, t)$ 是在固定位置 x 观察到的量 (欧拉描述)。另一种描述是跟着一团气体 (“气团”) 走：平衡位置为 x_0 的气团在 t 时刻位于 $x_0 + \xi(x_0, t)$ ， ξ 称为拉格朗日位移。气团速度为 $\partial \xi / \partial t$ ；它与固定点 x_0 处的流速 $u_1(x_0, t)$ 之差为 $u_1(x_0 + \xi) - u_1(x_0) \approx \xi \partial u_1 / \partial x$ ，是二阶小量。因此一阶近似下

$$u_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \hat{u} = i\omega \hat{\xi}. \quad (3.12)$$

推导：连续性方程、欧拉方程与波动方程

质量守恒。取截面积 A 、位于 $[x, x + dx]$ 的固定薄层。其中质量 $\rho A dx$ 的变化率等于流入减流出： $\frac{\partial}{\partial t}(\rho A dx) = A[(\rho u)_x - (\rho u)_{x+dx}]$ ，即 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$ 。线性化： $\rho u = (\rho_m + \rho_1)u_1 \approx \rho_m u_1$ ($\rho_1 u_1$ 为二阶)，得

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_m \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0. \quad (3.13)$$

牛顿第二定律。同一薄层受的合力为 $A[p(x) - p(x + dx)] = -A \frac{\partial p_1}{\partial x} dx$ ；其加速度 $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}$ 中第二项为二阶，舍去。于是

$$\rho_m \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}. \quad (3.14)$$

绝热关系。由式 (3.3)， $p \propto \rho^\gamma$ ，线性化： $p_1 = \frac{\gamma p_m}{\rho_m} \rho_1 \equiv c^2 \rho_1$ ，其中

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_m}{\rho_m}} = \sqrt{\gamma R_s T_m}. \quad (3.15)$$

合并。式 (3.13) 对 t 求导、式 (3.14) 对 x 求导，消去 $\partial^2 u_1 / \partial x \partial t$ ，再用 $\rho_1 = p_1 / c^2$ ：

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}. \quad (3.16)$$

这是以 c 传播的波动方程。

检验

量纲: $\gamma p_m / \rho_m$ 的单位为 $\text{Pa}/(\text{kg}/\text{m}^3) = \text{m}^2/\text{s}^2$ 。数值: 空气 300 K 时 $c = \sqrt{1.40 \times 287 \times 300} \approx 347 \text{ m/s}$; 300 K 氮气 $c = \sqrt{\frac{5}{3} \times 2077 \times 300} \approx 1019 \text{ m/s}$, 与 NIST 数据 (1 bar 时 1019.6 m/s) 相符 [25]。若误用等温关系 $p_1 = (p_m / \rho_m) \rho_1$, 会得到 $\sqrt{p_m / \rho_m}$, 对空气偏小约 15% (牛顿当年的错误)。

复振幅形式。 代入 $p_1 = \text{Re}[\hat{p}(x)e^{i\omega t}]$ 等, 式 (3.13)、(3.14) 化为

$$i\omega \frac{\hat{p}}{c^2} + \rho_m \frac{d\hat{u}}{dx} = 0, \quad i\omega \rho_m \hat{u} = -\frac{d\hat{p}}{dx}, \quad (3.17)$$

合并得 $d^2\hat{p}/dx^2 + k^2\hat{p} = 0$, $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ 。

驻波。 设管在 $x = 0$ 处封闭, 该处气体不能运动: $\hat{u}(0) = 0$, 由欧拉方程即 $d\hat{p}/dx|_0 = 0$ 。满足此条件的解为 (选时间原点使 P 为正实数)

$$\hat{p} = P \cos kx, \quad \hat{u} = -\frac{d\hat{p}/dx}{i\omega \rho_m} = -i \frac{P}{\rho_m c} \sin kx, \quad \hat{\xi} = \frac{\hat{u}}{i\omega} = -\frac{P}{\rho_m c \omega} \sin kx. \quad (3.18)$$

回到实数: $p_1 = P \cos kx \cos \omega t$, $u_1 = \frac{P}{\rho_m c} \sin kx \sin \omega t$, $\xi_1 = -\frac{P}{\rho_m c \omega} \sin kx \cos \omega t$ 。由此读出三条在后文反复使用的事实 (图 2):

1. **空间上:** 压强波腹 ($|\hat{p}|$ 最大) 处正是速度波节, 两者相隔 $\lambda/4$ 。
2. **时间上:** u_1 与 p_1 相差 90° 。在第一个压力波节以内 ($0 < kx < \pi/2$, 即四分之一波长管的全长) $\cos kx$ 与 $\sin kx$ 同号, u_1 比 p_1 滞后 90° ; 越过压力波节 ($\pi/2 < kx < \pi$) 后 $\cos kx < 0$, u_1 变为超前 p_1 90° 。
3. **位移与压强同相或反相:** $\hat{\xi}/\hat{p} = -\tan kx/(\rho_m c \omega)$ 为实数, 位移与压强同时达到极值。在 $0 < kx < \pi/2$ 内, $p_1 > 0$ (压缩) 时 $\xi_1 < 0$, 气团偏向封闭端; 在 $\pi/2 < kx < \pi$ 内, $p_1 > 0$ 时 $\xi_1 > 0$, 气团偏向 $kx = \pi$ 处的压力波腹。两种情形可以统一为一句**处处成立**的话: 驻波中, 气团朝最近的压力波腹运动时被压缩, 离开时膨胀。

行波。 $\hat{p} = P e^{-ikx}$ 代入欧拉方程得 $\hat{u} = \hat{p}/(\rho_m c)$: 压强与速度同相, $p_1 = P \cos(\omega t - kx)$ 。此时位移 $\hat{\xi} = \hat{u}/(i\omega)$ 比压强滞后 90° 。比值 $\hat{p}/\hat{u}$ 称为 (比) 声阻抗; 行波的声阻抗为实数 $\rho_m c$, 驻波的声阻抗为纯虚数。

推导: 声能量守恒与声强

用 u_1 乘欧拉方程 (3.14): $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_m u_1^2) = -u_1 \frac{\partial p_1}{\partial x}$ 。用 $p_1/(\rho_m c^2)$ 乘连续性方程 (并用 $\rho_1 = p_1/c^2$): $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{p_1^2}{2\rho_m c^2}) = -p_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}$ 。两式相加:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(p_1 u_1)}{\partial x} = 0, \quad E = \frac{1}{2}\rho_m u_1^2 + \frac{p_1^2}{2\rho_m c^2}. \quad (3.19)$$

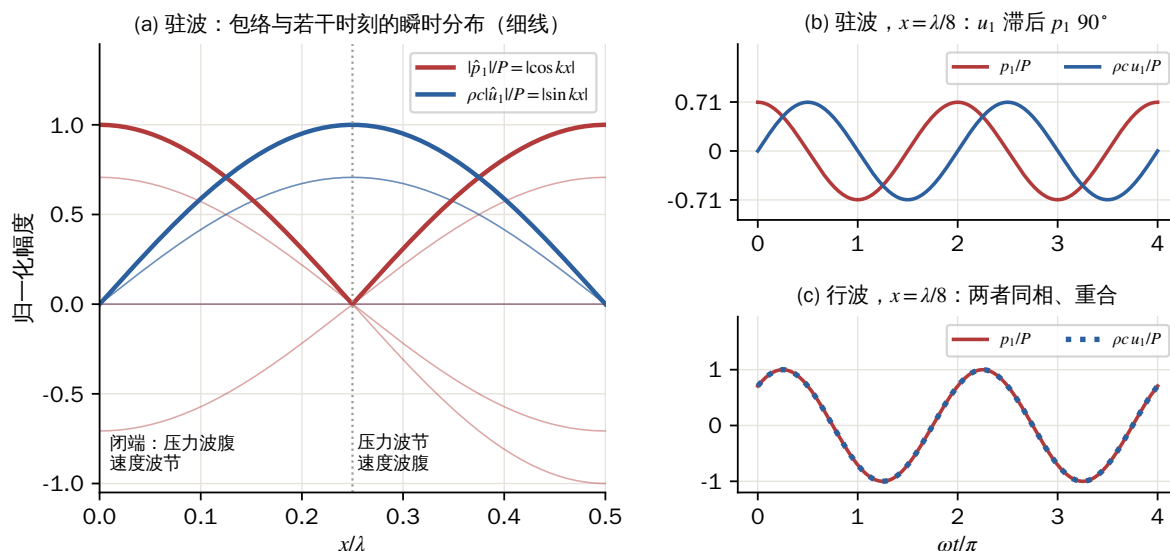


图 2 (a) 闭端 ($x=0$) 驻波的压强与速度包络及四个时刻的瞬时分布; (b) 驻波在 $x = \lambda/8$ 处的时间波形, u_1 滞后 p_1 90° ; (c) 行波在同一位置的时间波形, u_1 与 p_1 同相 (两条曲线重合)。

E 是单位体积声能 (动能 + 压缩势能), $p_1 u_1$ 是单位时间通过单位面积的声能, 即瞬时声强。其时间平均由式 (3.10):

$$I = \langle p_1 u_1 \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\hat{p} \hat{u}^*), \quad \dot{W} = AI. \quad (3.20)$$

对驻波 (3.18), $\hat{p} \hat{u}^*$ 为纯虚数, $I = 0$: 能量在动能与势能间来回倒腾, 没有净传输。对行波, $I = P^2/(2\rho_m c)$ 。一般地, 入射波加反射波 $\hat{p} = P(e^{-ikx} + R e^{ikx})$ (R 为实反射系数) 给出 $I = P^2(1 - R^2)/(2\rho_m c)$: 只有压强与速度的同相分量输运能量。

交互演示: 调节反射系数 R ($R=0$ 纯行波, $R=1$ 纯驻波), 观察 $p_1(x, t)$ 、 $u_1(x, t)$ 的动画、两者的相位差与时间平均声强 $I = P^2(1 - R^2)/(2\rho_m c)$ 。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 thermoacoustic-wave)。

四分之一波长谐振管。 一端封闭 ($x=0$)、一端开口的管: 开口处管内压强几乎等于大气压, $\hat{p} \approx 0$ 。但开口外的空气也随之振动, 效果相当于管子略长: 有效长度 $L_{\text{eff}} = L + 0.61R_t$ (R_t 为管半径, 无法兰开口) [26]。条件 $\cos kL_{\text{eff}} = 0$ 给出基频

$$k = \frac{\pi}{2L_{\text{eff}}}, \quad f = \frac{c}{4L_{\text{eff}}}. \quad (3.21)$$

开口端还会向外辐射声能, 单位开口面积的辐射阻 ($\hat{p}/\hat{u}$ 的实部) 约为 $\rho_m c (kR_t)^2/4$ ($kR_t \ll 1$) [26], 后文估算损耗时要用。

3.5 热扩散与热穿透深度

推导：热扩散方程

设热流沿 y 方向。傅里叶定律：热流密度 $j = -K \frac{\partial T}{\partial y}$ 。对 $[y, y + dy]$ 的薄层（单位面积）写能量守恒（压强不变时吸热使温度升高，比热用 c_p ；有压强振荡时还要加上压缩项 $\partial p / \partial t$ ，见附录 A 式 (A.1))： $\rho_m c_p \frac{\partial T}{\partial t} dy = j(y) - j(y + dy) = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy$ ，即

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \kappa = \frac{K}{\rho_m c_p}. \quad (3.22)$$

推导：周期温度边界的解与 δ_κ

气体占据 $y > 0$ ，壁面 $y = 0$ 处温度为 $T_0 + \text{Re}[\Theta e^{i\omega t}]$ 。设 $T = T_0 + \text{Re}[\hat{T}(y)e^{i\omega t}]$ ，代入式 (3.22)： $i\omega \hat{T} = \kappa \hat{T}''$ 。试探 $\hat{T} = \Theta e^{-qy}$ 得 $q^2 = i\omega / \kappa$ 。因 $\sqrt{i} = (1 + i)/\sqrt{2}$ ，

$$q = \pm(1 + i)\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} = \pm \frac{1 + i}{\delta_\kappa}, \quad \delta_\kappa \equiv \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}.$$

远离壁面温度振荡不能无限增大，取正号：

$$\hat{T} = \Theta e^{-(1+i)y/\delta_\kappa}, \quad T_1(y, t) = \Theta e^{-y/\delta_\kappa} \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta_\kappa}\right). \quad (3.23)$$

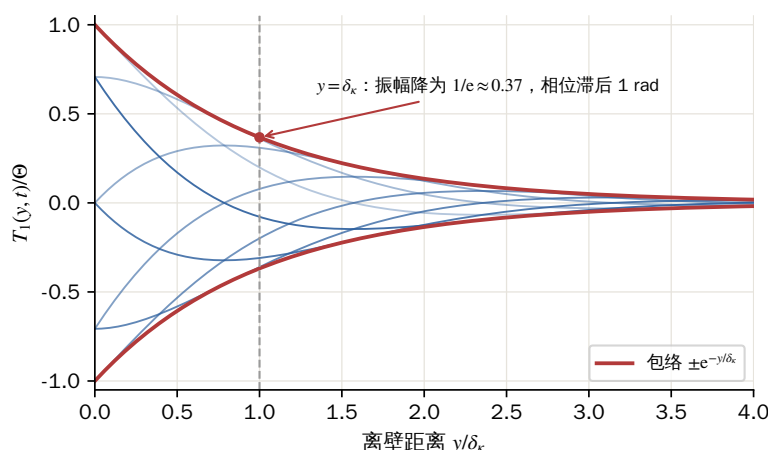


图 3 壁面温度周期振荡时气体中的温度波（式 (3.23)）：细线为一个周期内 8 个时刻的分布，粗线为包络。

要点：热穿透深度的物理意义

$\delta_\kappa = \sqrt{2\kappa/\omega}$ 是“一个振荡周期（更准确地说是 $1/\omega$ 时间）内热量能扩散到的距离”。离壁面 $y \ll \delta_\kappa$ 的气体与壁面热接触良好，近乎等温； $y \gg \delta_\kappa$ 的气体来不及与壁面换热，近乎绝热； $y \sim \delta_\kappa$ 处既有换热又有明显的时间滞后。热声学的全部奥妙都发生在这一层里。（一维热波已是第 42 届决赛亚尔科夫斯基题的内容，此处只取 δ_κ 的意义。）

粘性穿透深度与普朗特数。 动量的扩散完全类似。气体沿 x 平行于壁面振荡，远处速度 $U(t)$ ，壁面处速度为零（无滑移）。取 $[y, y + dy]$ 、沿 x 单位长度与单位宽度的薄层，它受两种力：压差 $-\frac{\partial p_1}{\partial x} dy$ ，以及上下两面的粘性切应力之差。牛顿粘性定律给出切应力 $\tau = \mu \partial u / \partial y$ ，故切应力合力

为 $\tau(y + dy) - \tau(y) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$ 。牛顿第二定律：

$$\rho_m \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

边界层很薄 ($\sim$ 亚毫米)，层内 $\partial p_1 / \partial x$ 与 y 无关，就等于远处无粘气体所受的压强梯度： $\rho_m \dot{U} = -\partial p_1 / \partial x$ 。两式相减，令 $u = U + w$ ： $\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ ($\nu = \mu / \rho_m$)，与式 (3.22) 同形，边界条件 $w(0) = -U$ 。照搬式 (3.23) 即得 $\hat{u} = U(1 - e^{-(1+i)y/\delta_\nu})$ ， $\delta_\nu = \sqrt{2\nu/\omega}$ 。两种穿透深度之比由普朗特数决定：

$$\sigma \equiv \frac{\nu}{\kappa} = \left(\frac{\delta_\nu}{\delta_\kappa} \right)^2. \quad (3.24)$$

气体的 σ 都接近 1 (氦约 0.66, 空气约 0.71[25])，所以粘性层与热层几乎一样厚——这意味着“只要换热、不要摩擦”是做不到的。

检验：数值

300 K、1 bar 空气： $K = 0.0264 \text{ W}/(\text{m K})$ ， $\rho_m = 1.16 \text{ kg}/\text{m}^3$ ， $c_p = 1006 \text{ J}/(\text{kg K})$ ， $\kappa = 2.26 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ，100 Hz 时 $\delta_\kappa = 0.27 \text{ mm}$ 。10 bar 氦气： $\kappa = 1.88 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ，100 Hz 时 $\delta_\kappa = 0.245 \text{ mm}$ ， $\delta_\nu = 0.199 \text{ mm}$ (例题 3)。

4 斯特林循环与 Schmidt 分析

4.1 理想斯特林循环

假设：理想斯特林循环

n 摩尔理想气体；两个等温过程 (T_H 、 T_C) 与两个等容过程 ($V_{\max}$ 、 $V_{\min}$ ，容积比 $r = V_{\max}/V_{\min}$)；等容过程的热量全部由理想回热器 ($\varepsilon = 1$) 提供与吸收；各过程准静态。

循环如图 4：1→2 在 T_C 等温压缩，放热 $Q_C = nRT_C \ln r$ ；2→3 等容升温，气体从回热器吸热 $Q_R = nC_V(T_H - T_C)$ ；3→4 在 T_H 等温膨胀，从热源吸热 $Q_H = nRT_H \ln r$ ；4→1 等容降温，把 Q_R 还给回热器。

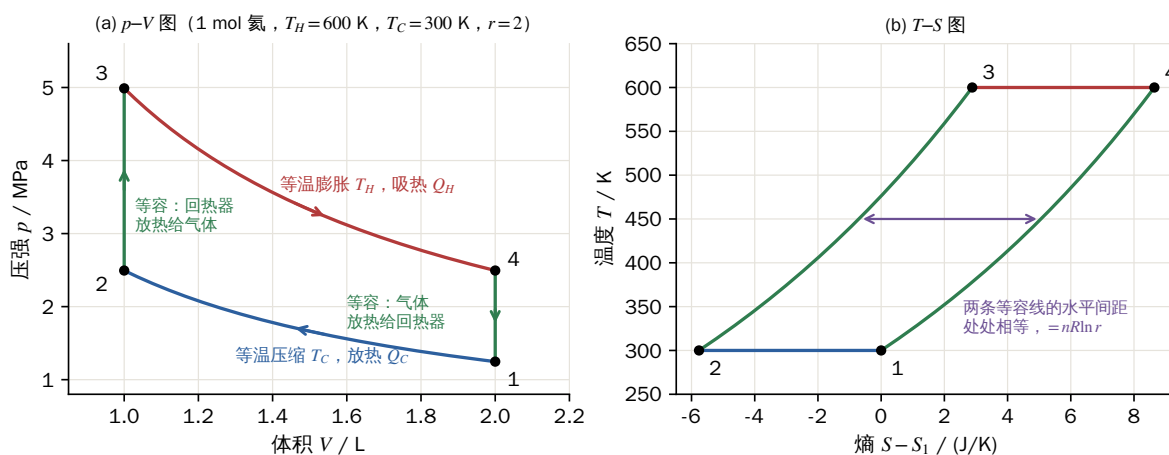


图 4 理想斯特林循环。(a) p - V 图，所围面积为每循环净功；(b) T - S 图：两条等容线在每个温度处的熵差都等于 $nR \ln r$ ，因而 2→3 吸收的热与 4→1 放出的热在每个温度上一一对应，可以由回热器内部交换。

推导：理想斯特林循环的效率

净功 $W = Q_H - Q_C = nR(T_H - T_C) \ln r$ 。回热器内部交换的 Q_R 不来自外界热源，所以外界热源只提供 Q_H ：

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{nR(T_H - T_C) \ln r}{nRT_H \ln r} = 1 - \frac{T_C}{T_H} = \eta_C. \quad (4.1)$$

注：为何能等于卡诺效率

与外界热源的换热只发生在两条等温线上，且温度相同（可逆）；两条等容线上的热量在回热器内部于同一温度下交换（图 4(b) 中同一高度的两段），熵产为零。由式 (3.5)， $\eta = \eta_C$ 。同样的容积比与温度下，斯特林循环 p - V 图的面积比卡诺循环大得多（卡诺循环的两条绝热线很陡），单位体积功率更大——这是它的工程价值。

4.2 不完全回热

实际回热器 $\varepsilon < 1$ 。2→3 中回热器只提供 εQ_R ，余下 $(1 - \varepsilon)Q_R$ 必须由加热器 (T_H 热源) 补足；4→1 中气体离开回热器时仍偏热，多出的 $(1 - \varepsilon)Q_R$ 交给冷却器。功不变，热源供热增加：

$$\eta = \frac{nR(T_H - T_C) \ln r}{nRT_H \ln r + (1 - \varepsilon)nC_V(T_H - T_C)} = \frac{\eta_C}{1 + (1 - \varepsilon)\eta_C X}, \quad X \equiv \frac{C_V}{R \ln r} = \frac{1}{(\gamma - 1) \ln r}. \quad (4.2)$$

(第二个等号：分子分母同除以 $nRT_H \ln r$ ，并用 $C_V = R/(\gamma - 1)$ 。)

检验：极限与数量级

$\varepsilon = 1$ 回到 η_C ； $\varepsilon = 0$ （无回热）时 $\eta = \eta_C/(1 + \eta_C X)$ 。 X 恰为“回热器每循环搬运的热 Q_R 与净功 W 之比”： $Q_R/W = C_V(T_H - T_C)/[R(T_H - T_C) \ln r] = X$ 。氦气、 $r = 1.6$ 时 $X = 3.19$ ——回热器每循环暂存的热是净功的三倍多，所以哪怕 5% 的回热损失也代价可观（例题 1）。

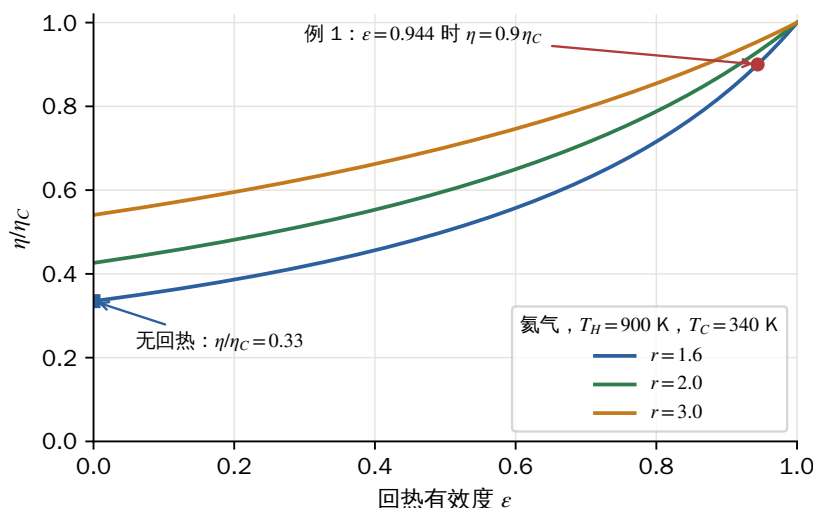


图 5 不完全回热时的效率（式 (4.2)，氦气， $T_H/T_C = 3$ ）。容积比 r 越小，回热器负担 X 越重，效率对 ε 越敏感。

交互演示：调节回热有效度 ε 、温比 T_H/T_C 、容积比 r 与工质 γ ，观察 p - V 循环与效率 η/η_C (式 (4.2)) 的变化。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 thermoacoustic-stirling）。

4.3 Schmidt 等温模型

实际斯特林机的活塞并不走“两等温两等容”的折线，而是近似正弦运动。1871 年 Gustav Schmidt 提出了至今仍是斯特林机设计起点的等温模型 [27, 28]。我们研究最简单的 α 型机 (图 6)：热缸（膨胀腔 E ）与冷缸（压缩腔 C ）各有一个活塞，两缸之间依次是加热器、回热器、冷却器。

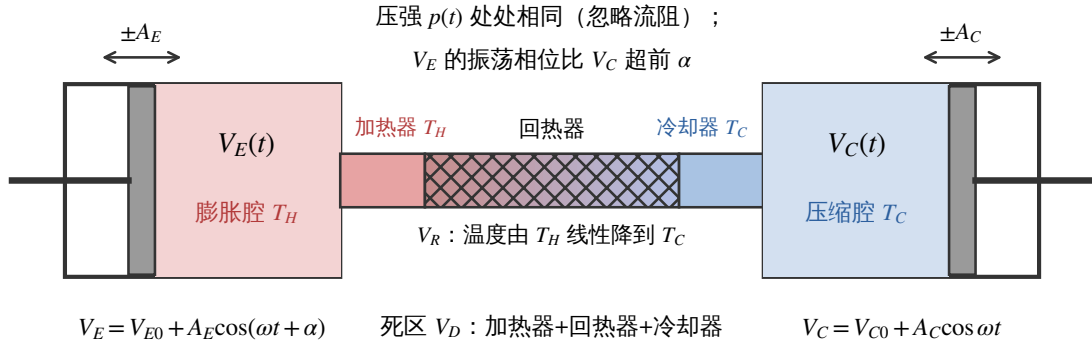


图 6 α 型斯特林机的 Schmidt 模型。

假设：Schmidt 模型

1. 膨胀腔与加热器中的气体温度恒为 T_H ，压缩腔与冷却器中恒为 T_C （换热无穷快，“等温”）；
2. 回热器理想，内部温度分布不随时间变化，由 T_H 线性降到 T_C ；
3. 无流阻，全机压强 $p(t)$ 处处相同；理想气体，总质量 m 不变；
4. 体积正弦变化： $V_E = V_{E0} + A_E \cos(\omega t + \alpha)$ ， $V_C = V_{C0} + A_C \cos \omega t$ ，即 $\hat{V}_E = A_E e^{i\alpha}$ ， $\hat{V}_C = A_C$ ；加热器、冷却器容积并入死区 V_D 。

推导：质量守恒给出压强

各部分质量之和不变： $\frac{pV_E}{R_s T_H} + \frac{pV_C}{R_s T_C} + \frac{pV_D}{R_s T_D} = m$ ，其中死区写成等效温度 T_D 。对回热器（容积 V_R 、温度沿长度线性分布 $T(s) = T_C + (T_H - T_C)s$ ， $s \in [0, 1]$ ），其中质量为 $\frac{p}{R_s} \int_0^1 \frac{V_R ds}{T_C + (T_H - T_C)s} = \frac{pV_R}{R_s} \frac{\ln(T_H/T_C)}{T_H - T_C}$ ，所以回热器的等效温度是对数平均温度

$$T_D = \frac{T_H - T_C}{\ln(T_H/T_C)}. \quad (4.3)$$

于是精确地有

$$p(t) = \frac{m R_s}{V_E/T_H + V_C/T_C + V_D/T_D}. \quad (4.4)$$

线性化。记 $S \equiv V_{E0}/T_H + V_{C0}/T_C + V_D/T_D$ (单位 m^3/K) , $p_0 \equiv mR_s/S$ 。分母 $= S + \text{Re}[(\hat{V}_E/T_H + \hat{V}_C/T_C)e^{i\omega t}]$; 小参量为 $\delta \equiv |\hat{V}_E/T_H + \hat{V}_C/T_C|/S$ 。用 $1/(1+z) \approx 1-z$ 保留一阶:

$$\hat{p} = -\frac{p_0}{S} \left(\frac{\hat{V}_E}{T_H} + \frac{\hat{V}_C}{T_C} \right). \quad (4.5)$$

舍去的是 $\mathcal{O}(\delta^2)$ 项; δ 不小时用附录 B 的精确解。

推导：两腔的热与功

由例题“等温腔”的结论 (式 (3.7)), 膨胀腔每循环从加热器吸热 $Q_E = W_E = \oint p dV_E$, 压缩腔 $Q_C^{\text{in}} = W_C = \oint p dV_C$ (理想回热器在一个循环内净换热为零)。用式 (3.11) 与式 (4.5):

$$W_E = \pi \text{Im}(\hat{p}\hat{V}_E^*) = -\frac{\pi p_0}{S} \text{Im} \left(\frac{A_E^2}{T_H} + \frac{A_C A_E e^{-i\alpha}}{T_C} \right) = \frac{\pi p_0 A_E A_C \sin \alpha}{S T_C},$$

$$W_C = \pi \text{Im}(\hat{p}\hat{V}_C^*) = -\frac{\pi p_0}{S} \text{Im} \left(\frac{A_E A_C e^{i\alpha}}{T_H} + \frac{A_C^2}{T_C} \right) = -\frac{\pi p_0 A_E A_C \sin \alpha}{S T_H}.$$

净功与效率:

$$W = W_E + W_C = \frac{\pi p_0 A_E A_C \sin \alpha}{S} \left(\frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_H} \right), \quad \eta = \frac{W}{Q_E} = 1 - \frac{T_C}{T_H}. \quad (4.6)$$

要点：为什么 $W \propto \sin \alpha$ 、为什么约 90° 最优

1. 每个腔的“自身项” $\text{Im}(|\hat{V}|^2) = 0$: 一个腔自己压缩自己, 压强与自身体积反相, 不做净功。净功全来自另一个腔造成的压强振荡。
2. 冷腔中单位体积的气体更多 ($1/T_C > 1/T_H$) , 压强振荡主要由冷腔决定: $\hat{p} \approx -p_0 \hat{V}_C/(S T_C)$, 即 p 与 V_C 反相。 V_E 比 V_C 超前 α , 于是 p 比 V_E 超前 $\pi - \alpha$, 由式 (3.11), $W_E \propto \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ 。
3. $\alpha = 90^\circ$ 时: 热腔膨胀最快的时刻恰是冷腔最小、压强最高的时刻——高压时在热端膨胀, 正是瑞利判据的斯特林版本。线性理论中最优相位严格为 90° ; 有限振幅时 (附录 B) 最优相位稍有偏离, 例题 2 参数下为 88° (图 7(b))。
4. $\alpha < 0$ (冷腔超前) 时 $W < 0$: 外界做功, T_C 腔吸热 $|W_C|$, T_H 腔放热——同一台机器成了制冷机, $\text{COP} = |W_C|/|W| = T_C/(T_H - T_C)$, 恰为卡诺值。哪个腔体积超前, 哪个腔就吸热。

功率的标度。 输出功率 $P_{\text{out}} = fW$ 。由式 (4.6), $P_{\text{out}} \propto p_0 f A_E A_C/(ST)$ 。三条设计启示: (i) 功率正比于平均压强——所以实用斯特林机充以数十个大气压的氦或氢; (ii) 正比于频率——但频率越高回热器与换热器的流阻损失越大; (iii) 死区 V_D 增大 S , 削弱压强振荡与功 (例题 2 中死区加倍使功降到 72% (线性近似; 精确模型 70.5%)), 而回热器又必须有足够的换热面积 (式 (3.8)), 二者需要折中。

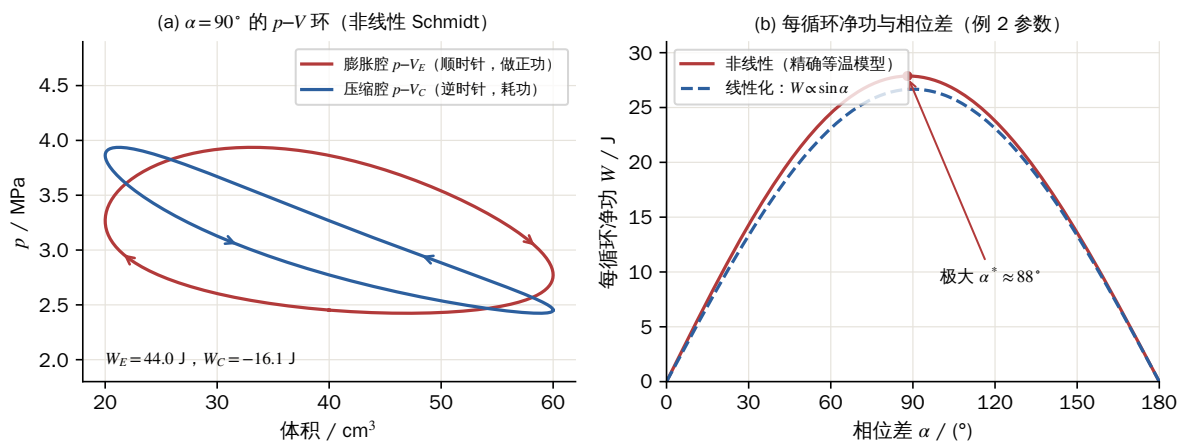


图 7 Schmidt 模型（例题 2 参数，按精确式 (4.4) 计算）。(a) $\alpha = 90^\circ$ 时膨胀腔与压缩腔的 p - V 环；(b) 每循环净功随 α 的变化，虚线为线性化结果式 (4.6)。

交互演示：Schmidt 等温模型：调节相位差 α 、温比 T_C/T_H 、死区容积与振幅，观察两腔 p - V 环与每循环功（精确数值积分与线性公式 (4.6) 对比）。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 thermoacoustic-schmidt）。

5 热声发动机之一：驻波机制

斯特林机里，两个活塞负责制造压强振荡、推动气体在冷热之间往返，回热器负责与气体换热。现在设想把活塞拿走，换成一个谐振管里的声波：声波自己就会让每一团气体同时经历压强振荡（第 3.4 节）和往返位移。若在管中放一叠沿管轴方向的薄板（“板叠”，stack），并在板上维持一个沿轴向的温度梯度，气团就会一边被压缩膨胀、一边与板换热。问题变成：什么条件下气团对声波做正功？

5.1 气团的功：瑞利判据的定量形式

推导：气团每循环对外做的功

取质量为 m 的气团，体积 $V = mR_sT/p$ （精确）。取对数微分： $\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} - \frac{dp}{p}$ 。由式 (3.2)，单位质量吸热 δq 时 $c_p dT = \delta q + dp/\rho$ ，故 $\frac{dT}{T} = \frac{\delta q}{c_p T} + \frac{R_s dp}{c_p p}$ 。代入并用 $1 - R_s/c_p = 1/\gamma$ ：

$$\frac{dV}{V} = \frac{\delta q}{c_p T} - \frac{dp}{\gamma p}. \quad (5.1)$$

第二项是绝热压缩，第一项是吸热引起的膨胀。线性化： $p = p_m + p_1$ ， $V \approx V_m$ ， $T \approx T_m$ 处的系数取平均值。一个循环的功 $W = \oint p dV = \oint p_1 dV$ ($p_m \oint dV = 0$):

$$W = \frac{V_m}{c_p T_m} \oint p_1 \delta q - \frac{V_m}{\gamma p_m} \oint p_1 dp_1.$$

第二项 $\oint p_1 dp_1 = \frac{1}{2} \oint d(p_1^2) = 0$ 。记气团吸热 $\delta Q = m \delta q = \rho_m V_m \delta q$ ，并用 $\rho_m c_p T_m = \gamma p_m / (\gamma - 1)$ （由式 (3.1) 与 $p_m = \rho_m R_s T_m$ ）：

$$W = \frac{\gamma - 1}{\gamma p_m} \oint p_1 \delta Q \quad (5.2)$$

式 (5.2) 就是瑞利判据： $W > 0$ 要求热量在 $p_1 > 0$ （压缩）时加入、在 $p_1 < 0$ （稀疏）时放出。 W 是两个一阶小量之积的平均，属于二阶量，所以只需要一阶的 p_1 与 δQ 就能算出来。

5.2 驻波中的气团与临界温度梯度

绝热温度振荡。 若气团不与外界换热，由式 (3.3) 线性化， $T_1/T_m = \frac{\gamma-1}{\gamma} p_1/p_m$ 。利用 $\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T_m}{p_m} = \frac{R_s}{c_p} \frac{1}{\rho_m R_s} = \frac{1}{\rho_m c_p}$ ，

$$\hat{T} = T_{\text{ad}} \equiv \frac{\hat{p}}{\rho_m c_p}. \quad (5.3)$$

例：10 bar 氮气中 $|\hat{p}| = 0.3 \text{ bar}$ 时 $T_{\text{ad}} \approx 3.6 \text{ K}$ 。

假设：板叠的“短板叠”近似

1. 板叠长度 $\Delta x \ll \lambda$ ，板叠内 $\hat{p}$ 、 $\hat{\xi}$ 可视为常数；温差 $\Delta T \ll T_m$ ，平均温度梯度 ∇T 均匀。
2. 板的热容远大于相邻气体，板温不随时间振荡，只有沿轴向的平均分布 $T_m(x)$ 。
3. 板叠不改变谐振管的声场分布。
4. **坐标约定**：在板叠处取局部坐标 x ，正方向指向较近的压力波腹（对图 8 的管即指向封闭端）。由第 3.4 节驻波的第 3 条事实（气团朝最近的压力波腹运动时被压缩），在这一坐标下 $\hat{\xi}$ 与 $\hat{p}$ 同相： $\hat{\xi} = \xi_1 > 0$ （取 $\hat{p} = P$ 为正实数）。这一约定对板叠位于驻波的任何位置都适用。对四分之一波长管（ $0 < kX < \pi/2$ ），距封闭端 X 处 $\hat{p} = P_0 \cos kX$ ， $\xi_1 = P_0 \sin kX / (\rho_m c \omega)$ ， P_0 为封闭端压强振幅。
5. 忽略板与气体沿 x 方向的导热（否则能流中多出导热项 $-(A_g K + A_s K_s) \nabla T$ ， A_g 、 A_s 为气体与板的截面积， K_s 为板的热导率，它把热直接从热端“短路”到冷端，降低效率）。

注：两种“温度振荡”：跟着气团看与站在原地看

本节起要区分两种温度振荡。**拉格朗日温度** $\hat{T}_L$ ：跟随平衡位置为 x_0 的气团测得的温度减去 $T_m(x_0)$ ，绝热时 $\hat{T}_L = T_{\text{ad}}$ （式 (5.3) 就是这种量）。**欧拉温度** $\hat{T}_E$ ：固定在 x_0 的温度计读数减去 $T_m(x_0)$ 。 t 时刻位于 x_0 的气体来自平衡位置 $x_0 - \xi$ ，其平均温度本来就是 $T_m(x_0) - \xi \nabla T$ ，所以一阶近似下

$$\hat{T}_E = \hat{T}_L - \hat{\xi} \nabla T. \quad (5.4)$$

例如，绝热气团在 $\nabla T = T_{\text{ad}}/\xi_1$ （即下文定义的临界温度梯度）的梯度中运动时， $\hat{T}_E = 0$ ：固定点的气温不随时间变化，尽管每个气团的温度都在振荡。由于 $\text{Re}(\hat{\xi} \hat{u}^*) = \text{Re}(\hat{\xi}(\hat{\xi}(\hat{\omega} \hat{\xi})^*)^*) = 0$ ，时间平均 $\langle T_L u_1 \rangle = \langle T_E u_1 \rangle$ ，计算能流时用哪种温度结果相同。

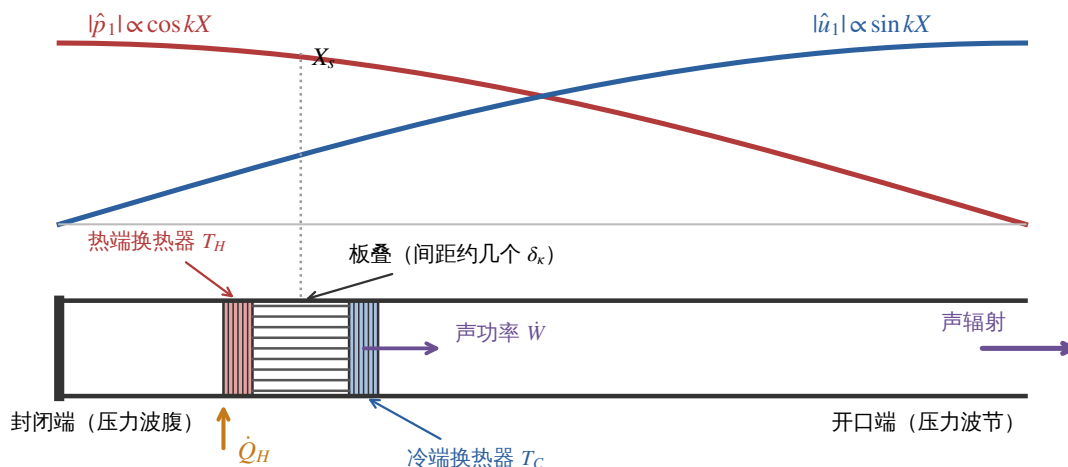


图 8 四分之一波长驻波热声发动机示意图。板叠的热端换热器朝向封闭端（压力波腹），冷端朝向开口端；上方为按式 (3.18) 计算的压强与速度振幅包络。

比较两个温度。 平衡位置在 x_0 的气团运动到 $x_0 + \xi_1$ 时，若它与板没来得及换热，其温度为 $T_m(x_0) + T_{ad}$ ；而它旁边的板温是 $T_m(x_0) + \xi_1 \nabla T$ 。两者之差 $T_{ad} - \xi_1 \nabla T$ 的符号决定热量流向。定义临界温度梯度

$$\nabla T_{crit} \equiv \frac{T_{ad}}{\xi_1} = \frac{\hat{p}}{\rho_m c_p \hat{\xi}}, \quad \Gamma \equiv \frac{\nabla T}{\nabla T_{crit}}. \quad (5.5)$$

代入驻波的 $\hat{p}$ 、 $\hat{\xi}$ ：

$$\nabla T_{crit} = \frac{P_0 \cos kX}{\rho_m c_p} \cdot \frac{\rho_m c \omega}{P_0 \sin kX} = \frac{\omega c}{c_p} \cot kX.$$

再用 $\omega c = kc^2 = k\gamma R_s T_m$ 与 $c_p = \gamma R_s / (\gamma - 1)$ ：

$$\boxed{\nabla T_{crit} = (\gamma - 1) T_m k \cot kX} \quad (5.6)$$

检验

量纲： $T_m k$ 为 K/m。极限： $kX \rightarrow 0$ （压力波腹）处 $\xi_1 \rightarrow 0$ ， $\nabla T_{crit} \rightarrow \infty$ ； $kX \rightarrow \pi/2$ （速度波腹）处 $T_{ad} \rightarrow 0$ ， $\nabla T_{crit} \rightarrow 0$ 。**与振幅无关**： T_{ad} 与 ξ_1 都正比于 P_0 。数值：10 bar、300 K 氮气，100 Hz， $X = 0.40$ m 处 $\nabla T_{crit} = 490$ K/m（例题 3）。**温度不均匀时**（板叠及热端一侧比管内其余气体热），模式形状由管内大部分气体（温度 T_0 、密度 ρ_0 、声速 c_0 、波数 $k_0 = \omega/c_0$ ）决定， $\xi_1 = P_0 \sin k_0 X / (\rho_0 c_0 \omega)$ ；而 T_{ad} 用板叠当地的 $\rho_m c_p = \gamma p_m / [(\gamma - 1) T_m]$ 。于是 $\nabla T_{crit} = \frac{(\gamma - 1) T_m}{\gamma p_m} \rho_0 c_0 \omega \cot k_0 X = (\gamma - 1) T_m k_0 \cot k_0 X$ （用了 $\rho_0 c_0^2 = \gamma p_m$ ）：式 (5.6) 仍成立，其中 k 是决定模式形状的那段气体的波数， T_m 是板叠当地温度。例题 4 与实验题正是这样使用的。当 $\nabla T = \nabla T_{crit}$ 时，气团的温度振荡恰好被位移“抵消”，固定点 x_0 处的气温不随时间变化。

两种情形与气团的四步循环。 设热接触“适中”：气团运动途中来不及换热，在两端停留时换热（这是理想化的极限，第 5.3 节给出连续模型）。于是一次往返近似为“绝热—等压—绝热—等压”的循环，与燃气轮机所用的布雷顿循环（两条绝热线 + 两条等压线）同构：

- $\Gamma < 1$ ($\nabla T < \nabla T_{\text{crit}}$, 温度梯度平缓): (1) 气团向波腹移动 $2\xi_1$, 绝热压缩升温 $2T_{\text{ad}}$, 到达时比当地板热; (2) 在高压下把热交给板, 等压收缩; (3) 返回途中绝热膨胀降温; (4) 到另一端比板冷, 在低压下从板吸热, 等压膨胀。净效果: 热量被逆着温度梯度搬向压力波腹; 按瑞利判据, 热在低压时加入, 气团消耗声功——**热泵/制冷机**。
- $\Gamma > 1$ ($\nabla T > \nabla T_{\text{crit}}$, 温度梯度陡): 到达波腹端时板比气团更热, 气团在高压下吸热膨胀; 在另一端比板热, 在低压下放热收缩。热在高压时加入: 气团对声波做正功——**发动机**; 热量顺着梯度从热端流向冷端。

单个气团只把热搬运 $2\xi_1$ 的距离; 但沿板排着一长串气团, 前一个在右端放下的热正好被后一个在其左端拾起, 像传水桶一样接力, 把热量运过整个板叠。图 9 是按第 5.3 节模型算出的气团温度-位置环。

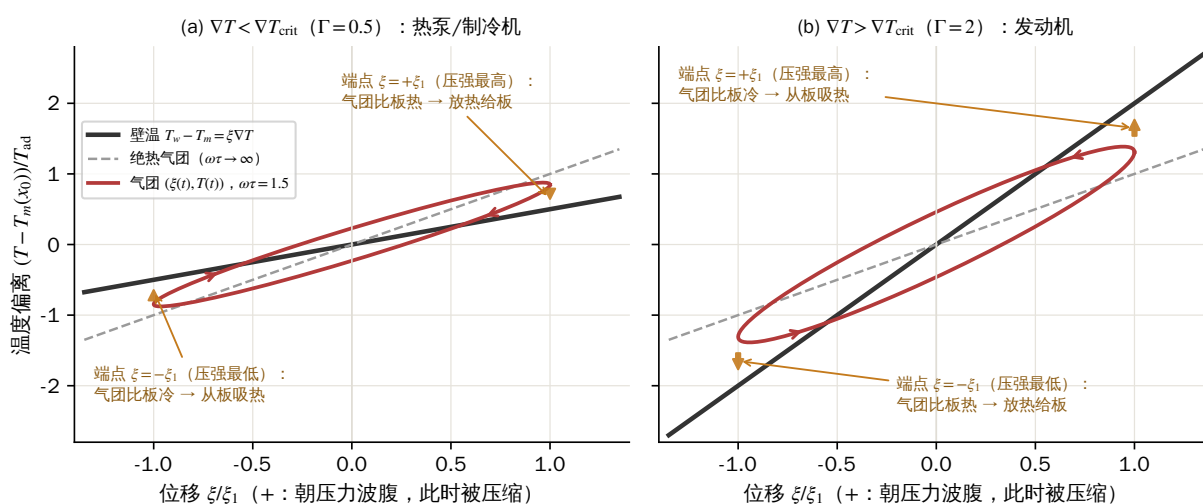


图 9 驻波中气团温度随位置的变化 (按式 (5.7), $\omega\tau = 1.5$) 与相邻板温 (黑线, 斜率 Γ) 比较; 虚线为绝热气团 (斜率 1, 即 ∇T_{crit})。 (a) $\Gamma < 1$: 在高压端气团比板热、放热, 在低压端吸热——热泵; (b) $\Gamma > 1$: 换热方向全部反转——发动机。

交互演示：驻波中板叠旁一个气团的动画：调节 $\Gamma = \nabla T / \nabla T_{\text{crit}}$ 与 $\omega\tau$, 观察气团温度与板温的比较、换热方向 (跨过 $\Gamma = 1$ 时反转) 以及气团的 p - V 小循环与每循环功 (式 (5.8))。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 thermoacoustic-parcel)。

5.3 气团模型：为什么热接触要“不完美”

假设：牛顿换热的气团模型

气团与相邻板之间的换热率正比于温差：单位质量吸热率 $\dot{q} = c_p(T_w - T)/\tau$, $T_w = T_m(x_0) + \xi(t)\nabla T$ 为气团所在处的板温, τ 为热弛豫时间。由热穿透深度的意义 (第 3.5 节), 热量扩散距离 y 需时 $\sim y^2/(2\kappa)$, 所以距板 y 的气团 $\omega\tau \sim (y/\delta_\kappa)^2$ ——这只是量级对应, 精确的连续介质处理见第 5.4 节。允许 $\hat{\xi}$ 为任意复数: $\hat{\xi} = \xi_s - i\xi_t$ (ξ_s, ξ_t 为实数, $\hat{p} = P$ 为正实数)。 ξ_s 是与压强同相的“驻波分量”; $-i\xi_t$ 比压强滞后 90° , 对应速度 $\hat{u} = i\omega\hat{\xi} = \omega\xi_t + i\omega\xi_s$ 中与压强同相的部分, 是“行波分量”。

推导：气团温度、吸热与功

第 1 步：能量方程。由式 (3.2), $c_p \dot{T} - \dot{p}/\rho = \dot{q} = c_p(T_w - T)/\tau$ 。线性化并写复振幅 ($\hat{T}$ 为气团温度相对 $T_m(x_0)$ 的振荡, $\dot{p}/\rho \rightarrow i\omega P/\rho_m$), 两边除以 c_p :

$$i\omega \hat{T} - i\omega T_{ad} = \frac{\hat{\xi} \nabla T - \hat{T}}{\tau}.$$

第 2 步：解出温度。

$$\hat{T} = \frac{\hat{\xi} \nabla T + i\omega \tau T_{ad}}{1 + i\omega \tau}. \quad (5.7)$$

两个极限: $\omega \tau \rightarrow \infty$ (绝热) $\hat{T} \rightarrow T_{ad}$; $\omega \tau \rightarrow 0$ (完美接触) $\hat{T} \rightarrow \hat{\xi} \nabla T$, 气团温度紧跟板温。

第 3 步：吸热率。 $\hat{q} = c_p(\hat{\xi} \nabla T - \hat{T})/\tau$, 代入第 2 步:

$$\hat{q} = c_p \frac{i\omega(\hat{\xi} \nabla T - T_{ad})}{1 + i\omega \tau}.$$

第 4 步：功。由式 (5.2), 单位体积每循环 $w = \frac{\gamma-1}{\gamma p_m} \oint p_1 \rho_m \dot{q} dt = \frac{\gamma-1}{\gamma p_m} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{1}{2} \text{Re}(P \rho_m \hat{q}^*)$ 。记 $a \equiv \xi_s \nabla T - T_{ad}$, $b \equiv \xi_t \nabla T$, 则 $\hat{\xi} \nabla T - T_{ad} = a - ib$,

$$P \rho_m \hat{q}^* = P \rho_m c_p \frac{-i\omega(a + ib)}{1 - i\omega \tau} = P \rho_m c_p \omega \frac{-i(a + ib)(1 + i\omega \tau)}{1 + \omega^2 \tau^2},$$

分子 $-i(a + ib)(1 + i\omega \tau) = (b + a\omega \tau) + i(b\omega \tau - a)$, 实部为 $a\omega \tau + b$ 。于是 $\text{Re}(P \rho_m \hat{q}^*) = P \rho_m c_p \omega (a\omega \tau + b)/(1 + \omega^2 \tau^2)$ 。再用 $\rho_m c_p T_{ad} = P$ (故 $\rho_m c_p a = P(\Gamma - 1)$) 与 $\rho_m c_p \frac{\gamma-1}{\gamma p_m} = \frac{1}{T_m}$ (sympy 核对见 `verify_sympy.py`):

$$w = \underbrace{\frac{\pi(\gamma-1)P^2}{\gamma p_m} (\Gamma-1) \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}}_{\text{驻波分量}} + \underbrace{\frac{\pi P \xi_t \nabla T}{T_m} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2}}_{\text{行波分量}}, \quad \Gamma = \frac{\xi_s \nabla T}{T_{ad}}. \quad (5.8)$$

推导：热流与短板叠效率

只考虑驻波分量 ($\xi_t = 0$)。理想气体比焓 $h = c_p T$, 气体沿 $+x$ 携带的总能流 (单位气体截面积, 时间平均, 即第 6.3 节的焓流) 为 $q_x = \rho_m c_p \langle T E u_1 \rangle = \rho_m c_p \langle T_L u_1 \rangle = \frac{1}{2} \rho_m c_p \text{Re}(\hat{T} \hat{u}^*)$ (两种温度给出同一结果, 见式 (5.4) 后的说明)。它是总能流; 纯驻波中 $\langle p_1 u_1 \rangle = 0$, 没有声功率运输, 所以这里的总能流就是热流。代入式 (5.7) 与 $\hat{u} = i\omega \xi_s$:

$$q_x = \frac{1}{2} \omega \xi_s P (1 - \Gamma) \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (5.9)$$

$\Gamma < 1$ 时 $q_x > 0$, 热流指向压力波腹; $\Gamma > 1$ 时热流由波腹端 (热端) 流向冷端。对 $\Gamma > 1$ 的发动机, 热端每单位截面输入 $-q_x$, 长 Δx 的板叠每单位截面输出声功率 $\frac{\omega}{2\pi} w \Delta x$ 。二者之比 ($\omega \tau$ 因子相消):

$$\eta = \frac{\omega w \Delta x / (2\pi)}{-q_x} = \frac{(\gamma-1)P \Delta x}{\gamma p_m \xi_s} = \frac{T_{ad} \Delta x}{T_m \xi_s} = \frac{\nabla T_{crit} \Delta x}{T_m}.$$

板叠两端温差 $\Delta T = \nabla T \Delta x \ll T_m$, 卡诺效率 $\eta_C = \Delta T / T_H \approx \nabla T \Delta x / T_m$ 。所以

$$\boxed{\frac{\eta}{\eta_C} = \frac{1}{\Gamma}} \quad (\text{制冷时 } \text{COP} / \text{COP}_C = \Gamma). \quad (5.10)$$

要点：驻波机制的三个结论

1. **需要不完美热接触。**驻波分量的功正比于 $\omega\tau/(1+\omega^2\tau^2)$ ： $\omega\tau \rightarrow 0$ （完美接触，气团温度紧跟板温、换热与压强相差 90° ）和 $\omega\tau \rightarrow \infty$ （绝热，不换热）都不做功， $\omega\tau = 1$ 最佳（图 10）。所以驻波板叠的板间距取几个 δ_κ （Swift 的实验装置约为 1 mm [18]）。
2. **本质上不可逆。** $\eta = \eta_C/\Gamma < \eta_C$ ：气团与板之间始终存在有限温差 $T_{\text{ad}}|1-\Gamma|$ ，换热产生熵。只有 $\Gamma \rightarrow 1$ 才逼近卡诺效率，但此时功率趋于零。
3. **行波分量不同。**它的功正比于 $1/(1+\omega^2\tau^2)$ ，完美接触时最大——这正是斯特林机回热器的工作方式（第 6 节）。

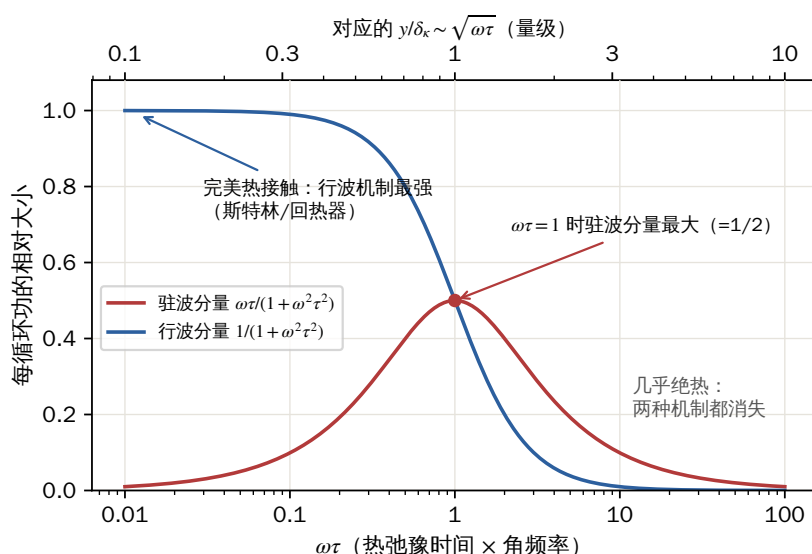


图 10 式 (5.8) 中驻波分量与行波分量对 $\omega\tau$ 的依赖。上轴为对应的气团离壁距离 $y/\delta_\kappa \sim \sqrt{\omega\tau}$ （量级）。

检验：数值积分交叉检验

不作线性化，直接用龙格-库塔法积分气团的非线性能量方程 $c_p \dot{T} - \dot{p}/\rho = c_p(T_w - T)/\tau$ （ $\rho = p/R_s T$ 取瞬时值）与 $v = R_s T/p$ ，数值计算 $\oint p dv$ ：在 $\Gamma = 0.5, 2$ 、 $\omega\tau = 0.3, 1$ 及行波 $\omega\tau = 0.01, 0.2$ 五种情形下，与式 (5.8) 的相对偏差均小于 10^{-4} （scripts/verify_numeric.py）。

5.4 边界层理论：板叠的声功率与热流

气团模型中的 τ 是唯象参数。用热扩散方程处理板附近的连续气体，可以去掉它。

假设：无粘边界层近似

单块平板位于 $y = 0$ ，板间距 $2y_0 \gg \delta_\kappa$ （每块板只“看到”自己的热边界层）；暂时忽略粘性对速度剖面的影响（ $\hat{u}$ 与 y 无关），粘性耗散单独计算；板温为 $T_m(x)$ ，不振荡；与短板叠近似相同，忽略沿 x 方向的导热。

在附录 A 中，由气体的能量方程解出板附近的温度振荡 $\hat{T}(y) = (T_{\text{ad}} - \hat{\xi} \nabla T)(1 - e^{-(1+i)y/\delta_\kappa})$ ——远离板的部分是绝热的，板附近一个 δ_κ 厚的层里温度被板“拉住”。再由式 (5.2) 与焓流的定

义，对驻波 ($\hat{\xi} = \xi_1$ 实) 得到：

$$\dot{W}'' = \frac{1}{4} \delta_\kappa \frac{(\gamma - 1) \omega |\hat{p}|^2}{\rho_m c^2} (\Gamma - 1) \quad (\text{单位板面积产生的声功率}) \quad (5.11)$$

$$\dot{H}' = \frac{1}{4} \delta_\kappa |\hat{p}| |\hat{u}| (1 - \Gamma) \quad (\text{单位板宽度、沿 } +x \text{ 的能流}) \quad (5.12)$$

$$\dot{E}_\nu'' = \frac{1}{4} \rho_m \omega \delta_\nu |\hat{u}|^2 \quad (\text{单位板面积的粘性耗散}) \quad (5.13)$$

检验：与气团模型一致

(1) 符号结构相同：功正比于 $\Gamma - 1$ ，热流正比于 $1 - \Gamma$ 。(2) 效率： $\eta = \dot{W}'' \Delta x / (-\dot{H}') = \frac{(\gamma - 1) |\hat{p}| \Delta x}{\rho_m c^2 |\hat{\xi}|} = \nabla T_{\text{crit}} \Delta x / T_m$ ，与式 (5.10) 相同。(3) 量纲： $\delta_\kappa \omega |\hat{p}|^2 / (\rho_m c^2)$ 为 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Pa} = \text{W}/\text{m}^2$ 。(4) $\Gamma = 0$ (无温度梯度的普通管壁) 时 $\dot{W}'' < 0$ ：这是声波在管壁上的热弛豫损耗，后面估算谐振管损耗时直接使用。

粘性的代价。 在驻波中距封闭端 X 处，把式 (5.13) 与式 (5.11) 相比，并用 $|\hat{u}| = |\hat{p}| \tan kX / (\rho_m c)$ 、 $\delta_\nu / \delta_\kappa = \sqrt{\sigma}$ ：

$$\frac{\dot{E}_\nu''}{\dot{W}''} = \frac{\sqrt{\sigma} \tan^2 kX}{(\gamma - 1)(\Gamma - 1)}. \quad (5.14)$$

越靠近速度波腹，粘性越占上风；越靠近压力波腹， ∇T_{crit} 越大 (需要的温差越大)。板叠只能放在两者之间。计入粘性对边界层温度场的修正后，Swift 的完整理论给出的“发动机/热泵”分界不再严格位于 $\Gamma = 1$ ，但 ∇T_{crit} 仍是有用的基准 [15, 18]。

5.5 起振的能量判据

热声发动机没有启动装置：只要温差足够大，管中的微小扰动就会自发增长成声音。“足够大”的判据是：板叠每周期产生的声能大于整个谐振管每周期耗散的声能。因为增益和损耗都正比于 $|\hat{p}|^2$ ，这个判据与振幅无关，是一个明确的阈值。

假设：起振估算模型

四分之一波长管 (封闭端 $X = 0$ ，有效长度 L_{eff})，模式形状 $\hat{p} = P_0 \cos kX$ 不受板叠影响；板叠中心在 X_s ，长 $\Delta x \ll \lambda$ ，由间距 $2y_0$ 的平行薄板组成，板的总湿周 (单位长度上的板面积，两面都算) 为 Π ；记 $\varphi \equiv kX_s$ 。损耗包括：板叠中的粘性、管壁的热弛豫与粘性、开口端辐射。

推导：起振条件

板叠净增益 (式 (5.11)、(5.13) 乘以面积 $\Pi \Delta x$)：

$$\dot{W}_{\text{stack}} = G_0 \cos^2 \varphi (\Gamma - 1) - \Pi \Delta x \frac{\rho_m \omega \delta_\nu}{4} \frac{P_0^2 \sin^2 \varphi}{\rho_m^2 c^2}, \quad G_0 \equiv \frac{\Pi \Delta x \delta_\kappa (\gamma - 1) \omega P_0^2}{4 \rho_m c^2}.$$

把谐振管的所有损耗记为 $\dot{W}_{\text{loss}} \equiv B G_0$ ， B 是无量纲损耗参数 (例题 4 由第一性原理计算它)。起振条件 $\dot{W}_{\text{stack}} = \dot{W}_{\text{loss}}$ ，两边除以 $G_0 \cos^2 \varphi$ ，并用 $\delta_\nu / \delta_\kappa = \sqrt{\sigma}$ ：

$$\Gamma_{\text{on}} = 1 + a \tan^2 \varphi + \frac{B}{\cos^2 \varphi}, \quad a \equiv \frac{\sqrt{\sigma}}{\gamma - 1}. \quad (5.15)$$

所需温差 $\Delta T_{\text{on}} = \Gamma_{\text{on}} \nabla T_{\text{crit}} \Delta x$ ，代入式 (5.6)，并用 $\cot \varphi / \cos^2 \varphi = \cot \varphi + \tan \varphi$ ：

$$\frac{\Delta T_{\text{on}}}{T_m} = (\gamma - 1) k \Delta x \left[(1 + B) \cot \varphi + (a + B) \tan \varphi \right] \quad (5.16)$$

要点：最优板叠位置

方括号内是 $\cot \varphi$ 与 $\tan \varphi$ 的正系数组合：靠近封闭端 $\cot \varphi$ 发散（ ∇T_{crit} 太大），靠近开口端 $\tan \varphi$ 发散（粘性与“增益太小”）。由均值不等式，最小值在

$$\tan \varphi^* = \sqrt{\frac{1+B}{a+B}}, \quad \left[\dots \right]_{\min} = 2\sqrt{(1+B)(a+B)}. \quad (5.17)$$

式 (5.16) 两边乘以 $\tan \varphi$ 就成为 $\tan^2 \varphi$ 的线性函数——这是实验题数据处理的出发点。

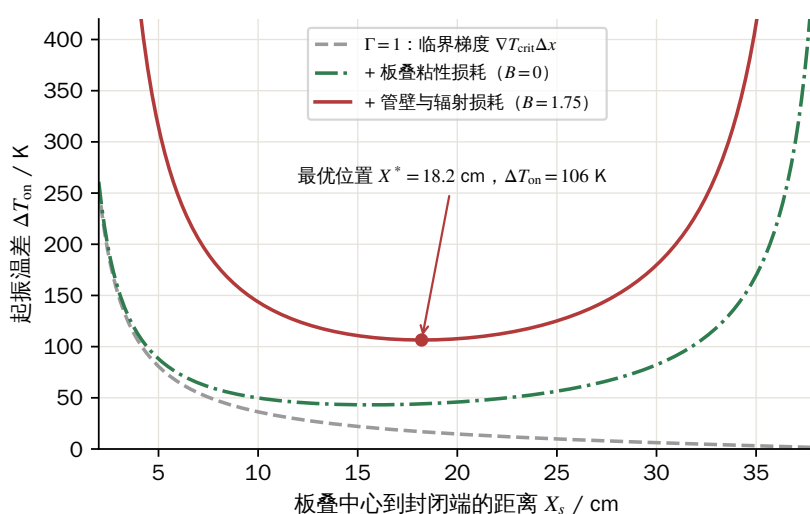


图 11 例题 4 的热声管（空气， $L = 0.40 \text{ m}$ ）起振温差随板叠位置的理论曲线（式 (5.16)， $T_m = T_C + \Delta T/2$ ）。三条曲线依次加入板叠热弛豫（ $\Gamma = 1$ 基线）、板叠粘性、管壁与辐射损耗。

交互演示：热声管起振温差随板叠位置的变化：调节管长、管半径、板叠长度与板间距（损耗参数 B_{wall} 、 B_{rad} 按例题 4 的公式随之计算），以及附加损耗 B_{extra} 与普朗特数 σ ，观察式 (5.16) 曲线和最优位置 X^* ；可叠加实验题数据。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 thermoacoustic-onset）。

6 热声发动机之二：行波机制与脉管制冷机

6.1 行波中的气团：没有活塞的斯特林循环

在式 (5.8) 中只保留行波分量（ $\xi_s = 0$ ），并让热接触完美（ $\omega\tau \rightarrow 0$ ）。要做到这一点，通道必须足够细：通道的水力半径 $r_h \equiv (\text{气体体积}) / (\text{与气体接触的固体面积})$ ，衡量气体到最近固体表面的典型距离（间距 $2y_0$ 的平行板 $r_h = y_0$ ），要求 $r_h \ll \delta_\kappa$ ——这正是回热器中细丝网的情形：

$$w = \frac{\pi P \xi_t \nabla T}{T_m} = \frac{\pi P |\hat{u}|}{\omega} \frac{\nabla T}{T_m}, \quad |\hat{u}| = \omega \xi_t. \quad (6.1)$$

以 $p_1 = P \cos \omega t$ 、 $u_1 = |\hat{u}| \cos \omega t$ (同相)、 $\xi = \xi_t \sin \omega t$ 跟踪一个气团 (x 轴正向指向热端):

1. $\omega t = -\pi/2$: 气团在最冷处 ($\xi = -\xi_t$), 压强正经过平均值快速上升——在冷端被压缩, 温度紧跟板温, 放热;
2. $\omega t = 0$: 压强最高, 气团以最大速度向热端移动, 一路被更热的填料加热——高压下吸热膨胀;
3. $\omega t = \pi/2$: 气团在最热处, 压强下降——在热端膨胀;
4. $\omega t = \pi$: 压强最低, 气团返回冷端, 一路把热交给填料——低压下放热收缩。

这正是斯特林循环的四步 (冷端压缩、回热升温、热端膨胀、回热降温), 只是活塞换成了声波, 回热器就是机器本身。由于气体与填料处处温差趋于零, 换热可逆——行波热机可以逼近卡诺效率。

6.2 回热器中的声功率放大

推导：回热器内的连续性方程

完美热接触下, 固定位置处的气温就是该处填料温度 $T_m(x)$, 不随时间变化: 欧拉温度振荡 $\hat{T} = 0$ 。于是由 $\rho = p/(R_s T)$, $\hat{\rho} = \hat{p}/(R_s T_m)$ 。平均密度随位置变化: $d\rho_m/dx = -\rho_m \nabla T/T_m$ (p_m 均匀)。连续性方程 $\partial \rho / \partial t + \partial(\rho u) / \partial x = 0$ 的一阶部分为 $i\omega \hat{\rho} + \rho_m d\hat{u}/dx + \hat{u} d\rho_m/dx = 0$, 即

$$\frac{d\hat{u}}{dx} = -\frac{i\omega \hat{p}}{p_m} + \frac{\nabla T}{T_m} \hat{u}. \quad (6.2)$$

第一项是等温压缩性 (不是绝热的 $1/(\gamma p_m)$); 第二项说明: 气体流向更热处时受热膨胀, 体积流量随之增大。动量方程中细小通道的粘性阻力占主导: $d\hat{p}/dx = -i\omega \rho_m \hat{u} - r_v \hat{u}$ (r_v 为单位长度的粘性阻力系数)。

推导：声功率的变化

单位面积声功率 $I = \frac{1}{2} \text{Re}(\hat{p} \hat{u}^*)$, 求导: $\frac{dI}{dx} = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{d\hat{p}}{dx} \hat{u}^* + \hat{p} \frac{d\hat{u}^*}{dx} \right)$ 。第一项 $= \frac{1}{2} \text{Re} [(-i\omega \rho_m - r_v) |\hat{u}|^2] = -\frac{1}{2} r_v |\hat{u}|^2$; 第二项 $= \frac{1}{2} \text{Re} [\hat{p} (i\omega \hat{p}^*/p_m + \hat{u}^* \nabla T/T_m)] = \frac{\nabla T}{T_m} I$ ($i|\hat{p}|^2$ 为纯虚数)。于是

$$\frac{dI}{dx} = \frac{\nabla T}{T_m} I - \frac{1}{2} r_v |\hat{u}|^2. \quad (6.3)$$

忽略粘性, $d \ln I / dx = d \ln T_m / dx$, 即

$$I \propto T_m(x), \quad \frac{\dot{W}_H}{\dot{W}_C} = \frac{T_H}{T_C}. \quad (6.4)$$

声波从冷端穿过回热器到达热端, 声功率被放大 T_H/T_C 倍——这是行波热声发动机的“增益”。式 (6.3) 单位体积的增益 $\frac{\nabla T}{T_m} I$ 与式 (6.1) 乘以 $\omega/2\pi$ 完全一致 (数值验证见 `verify_numeric.py`: 无粘回热器中 $\dot{W}_H/\dot{W}_C$ 与 T_H/T_C 相差 $< 10^{-6}$)。粘性耗散正比于 $|\hat{u}|^2$, 增益正比于 $|\hat{p}| |\hat{u}|$, 所以回热器应工作在高声阻抗 ($|\hat{p}/\hat{u}| \gg \rho_m c$, 大压强、小速度) 下 [19]: 由式 (6.3), 粘性耗散与增益之比为 $r_v T_m / (|\hat{p}/\hat{u}| \nabla T)$, 例题 5 的估算表明, 要把它压到 10% 以下, 回热器中点处的 $|\hat{p}/\hat{u}|$ 需达约 20 倍 ρc (ρc 取 300 K 值); 热端要求更高 (约 38 倍)。

6.3 能流分析：为什么效率是卡诺效率

行波发动机的热端换热器之外还要接一段热缓冲管（thermal buffer tube）：一段管径远大于 δ_κ 的空管，把 T_H 的高温气体与下游室温部件隔开，管内温度沿轴向由 T_H 逐渐降到室温，气体与管壁几乎不换热（绝热区）。脉管制冷机中的“脉管”起同样的作用。

推导：两种区域里的总能流

声场中通过某截面的时间平均总能流（忽略固体导热）是焓流 $\dot{H} = \langle \dot{m} h \rangle$ 。无平均流动时 $\langle \dot{m} \rangle = 0$ ，保留到二阶： $\dot{H} = \frac{1}{2} \text{Re}(\dot{m} \hat{h}^*)$ ， $\dot{m} = \rho_m A \hat{u}$ ，理想气体 $\hat{h} = c_p \hat{T}$ （欧拉温度振荡）。

- **绝热区**（宽管、热缓冲管、谐振管）：气团绝热，拉格朗日温度 $\hat{T}_L = T_{\text{ad}}$ ，由式 (5.4)，欧拉温度 $\hat{T} = T_{\text{ad}} - \xi \nabla T$ 。于是

$$\dot{H} = \frac{1}{2} \rho_m c_p A \text{Re} \left[\left(\frac{\hat{p}}{\rho_m c_p} - \xi \nabla T \right) \hat{u}^* \right] = \frac{1}{2} A \text{Re}(\hat{p} \hat{u}^*) = \dot{W}, \quad (6.5)$$

因为 $\text{Re}(\xi \hat{u}^*) = \text{Re}(\xi (i\omega \xi)^*) = 0$ 。绝热区里总能流就是声功率。

- **理想回热器**： $\hat{T} = 0$ ，故

$$\dot{H} = 0. \quad (6.6)$$

推导：行波热机的效率

对热端换热器（左接回热器、右接绝热的热缓冲管）写能量守恒：输入热 $\dot{Q}_H$ + 从回热器流入的 $\dot{H} = 0$ = 流入热缓冲管的 $\dot{H} = \dot{W}_H$ ，故 $\dot{Q}_H = \dot{W}_H$ 。同理冷端换热器放热 $\dot{Q}_C = \dot{W}_C$ 。由式 (6.4)：

$$\eta = \frac{\dot{W}_H - \dot{W}_C}{\dot{Q}_H} = 1 - \frac{\dot{W}_C}{\dot{W}_H} = 1 - \frac{T_C}{T_H} = \eta_C. \quad (6.7)$$

注：与 Schmidt 结果对照

式 (6.7) 与式 (4.6) 的 $\eta = \eta_C$ 是同一件事：两者都假定等温换热与理想回热。热端换热器吸收的热等于“热端的 pV 功”（ $\dot{W}_H$ ），冷端放出的热等于“冷端的 pV 功”——与 Schmidt 分析中 $Q_E = W_E$ 完全对应。

6.4 Backhaus–Swift 热声斯特林发动机

要在回热器里得到“近似行波、且高阻抗”的声场，Backhaus 与 Swift 用一个环路（图 12）[17, 19]：回热器夹在室温换热器与热端换热器之间，热端之后是让高温气体与室温部件隔开的热缓冲管；声功率从热缓冲管出来，经“反馈惯性管”与“柔性容腔”绕回回热器冷端，一部分输出到谐振管。

集总参数：惯性与柔度。 当元件尺寸远小于波长时，可以只用两端的 $\hat{p}$ 与体积流速 $\hat{U} = A \hat{u}$ 描述它。(i) 长 Δx 、截面 A 的细管：把欧拉方程 (3.17) 写成 $d\hat{p}/dx = -i\omega(\rho_m/A)\hat{U}$ ，管内 $\hat{U}$ 近似不变，积分得

$$\Delta \hat{p} = -i\omega L \hat{U}, \quad L \equiv \frac{\rho_m \Delta x}{A} \quad (\text{惯性, 类比电感}).$$

(ii) 容积 V 的小腔（腔内 $\hat{p}$ 均匀）：腔内质量变化率 $i\omega\hat{p}V$ 等于净流入 $\rho_m(\hat{U}_{\text{in}} - \hat{U}_{\text{out}})$ ，用绝热关系 $\hat{\rho} = \hat{p}/c^2$ ：

$$\Delta\hat{U} \equiv \hat{U}_{\text{out}} - \hat{U}_{\text{in}} = -i\omega C\hat{p}, \quad C \equiv \frac{V}{\rho_m c^2} = \frac{V}{\gamma p_m} \quad (\text{柔度, 类比电容}).$$

(iii) 细通道（回热器）的粘性阻力 $\Delta\hat{p} = -R_v\hat{U}$ 类比电阻（这里的 L 、 C 、 R_v 都是集总元件，不要与管长、热容流量、气体常数混淆）。于是环路可以像交流电路一样分析。

怎样不耗能地调相位。 惯性与柔度都是“电抗”：流进柔性腔的流量 $i\omega C\hat{p}$ 比压强超前 90° ；流过惯性管的流量 $\Delta\hat{p}/(-i\omega L)$ 比它两端的压差滞后 90° 。由式 (3.10)，两者都只与压强交换能量、不消耗能量 ($\text{Re}[\hat{p}(i\omega C\hat{p})^*] = 0$)。在回热器冷端的结点上，体积流量守恒： $\hat{U}_{\text{reg}}$ 等于惯性管来的流量减去柔性腔分走的流量。选择 L 与 C ，使两个电抗性的流量中与 $\hat{p}$ 正交（相差 90° ）的部分正好相消，剩下的 $\hat{U}_{\text{reg}}$ 便与 $\hat{p}$ 接近同相，而这一过程几乎不耗散声功率。这就是反馈惯性管加柔性腔的作用，具体的网络计算见文献 [18, 19]。

注：一个反例：不能靠流阻来“调相位”

如果把柔度 C 与一个大流阻 R_v 串联，也能使 $\hat{U}$ 与 $\hat{p}$ 接近同相 ($\arg(\hat{U}/\hat{p}) = \arctan[1/(\omega R_v C)] \rightarrow 0$ ，阻抗 $\approx R_v$)。但 C 不耗能，输入声功率 $\frac{1}{2} \text{Re}(\hat{p}\hat{U}^*) = \frac{1}{2} R_v |\hat{U}|^2$ 全部耗散在流阻上。回热器要求的“高阻抗”指 $|\hat{p}/\hat{u}|$ 大，而回热器上的粘性压降小（第 6.2 节），与“大流阻”恰好相反。

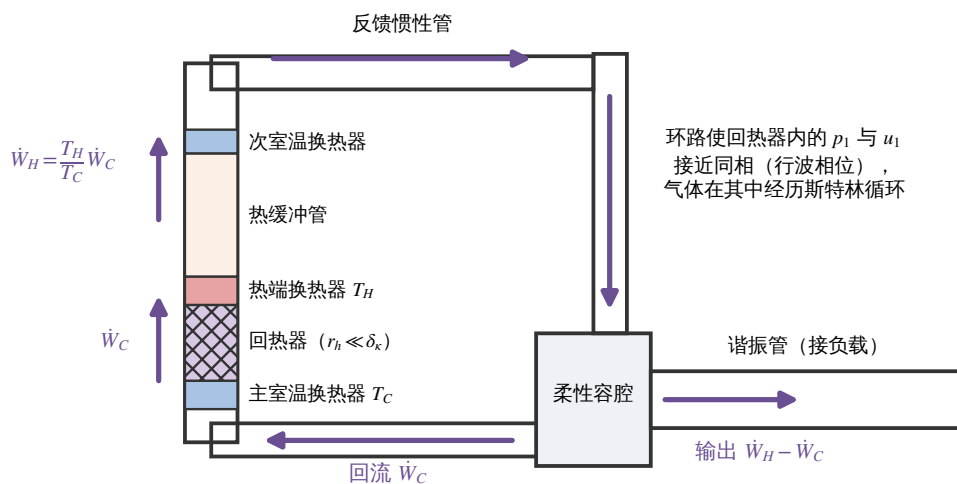


图 12 行波热声发动机的环路结构（据 Backhaus 与 Swift 的设计简化 [19]；尺寸非真实比例）。紫色箭头为声功率流：经过回热器放大 T_H/T_C 倍，大部分绕环路回到冷端，差额输出。

工程上还要解决两个问题：(i) 环路是闭合的，二阶效应 ($\langle \rho_1 u_1 \rangle \neq 0$ ，即密度与速度振荡的同相部分) 会使气体沿环路产生一股净平均质量流（Gedeon 流），它像对流一样把热端的热直接带到室温端；对策是在环路中加一个两向流阻不同的锥形收缩口（“喷射泵”），利用振荡流的不对称压降产生一个平均压差把这股流抵消；(ii) 热缓冲管里的对流损失。处理好之后，这台机器以约 30 个大气压的氦气、约 80 Hz 工作，声功率 710 W 时热效率 0.30，约为卡诺效率的 41% [18, 19]——比同期驻波热声发动机高出一半以上 [19]。

6.5 脉管制冷机：能流分析

把行波热机反过来用：外界（压缩机）输入声功率，回热器沿着“声功率从热到冷”的方向工作，便成为制冷机。脉管制冷机（图 13）把斯特林制冷机冷端的膨胀活塞换成一段空管——“脉管”：其中的气体像一个绝热的“气体活塞”，把冷端的 pV 功传到室温端，再在小孔阀中耗散掉；小孔与气库构成的阻性负载使冷端附近 $\hat{U}$ 与 $\hat{p}$ 接近同相，回热器中得到行波相位 [22]。

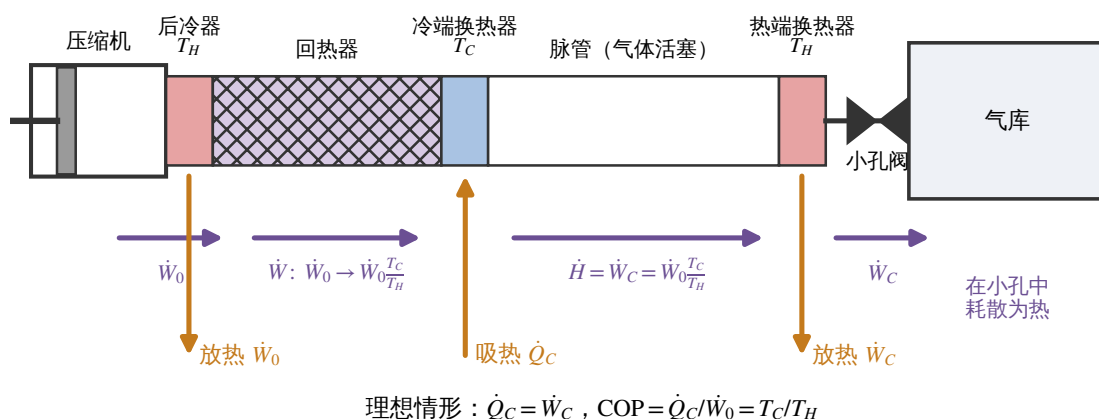


图 13 小孔型脉管制冷机及其理想能流。紫色为声功率/焓流，橙色为与外界交换的热。

推导：理想脉管制冷机的制冷量与 COP

设压缩机经后冷器（紧接压缩机、把压缩热排到室温 T_H 的换热器）向回热器输入声功率 $\dot{W}_0$ ，回热器理想。

1. 回热器中 $I \propto T_m$ （式 (6.4)），声功率从 T_H 端传到 T_C 端衰减为 $\dot{W}_C = \dot{W}_0 T_C / T_H$ ；减少的部分用于把热量从冷端“泵”到热端。
2. 冷端换热器的能量守恒：吸收的制冷量 $\dot{Q}_C$ + 从回热器流入的 $\dot{H} = 0$ （式 (6.6)）= 流入脉管的 $\dot{H}$ 。脉管是绝热区， $\dot{H} = \dot{W}_C$ （式 (6.5)）。故

$$\dot{Q}_C = \dot{W}_C = \dot{W}_0 \frac{T_C}{T_H}. \quad (6.8)$$

这与 Radebaugh 的表述“制冷量 = 脉管焓流 - 回热器焓流，理想时等于冷端声功率”一致 [22]。

3. 于是

$$COP = \frac{\dot{Q}_C}{\dot{W}_0} = \frac{T_C}{T_H} < COP_C = \frac{T_C}{T_H - T_C}. \quad (6.9)$$

注：COP 为何低于卡诺值

差别全在小孔：冷端声功率 $\dot{W}_C$ 被送到室温端白白耗散成热（熵产 $\dot{W}_C / T_H$ ），而斯特林制冷机的冷端膨胀活塞会把这份功回收给压缩机。代价换来的是冷端没有运动部件：振动小、可靠、寿命长——这正是空间探测器所需要的。若用“声功率回收”结构把 $\dot{W}_C$ 送回，COP 可回到卡

诺值。实际器件还有回热器不完善、脉管内对流与混合等损失，最好的脉管制冷机在 80 K 附近约达卡诺效率的 20%[22]。

7 决赛风格例题

例题：1. KRUSTY 斯特林转换器：效率差距从哪里来

KRUSTY 试验（第 1 节）中的自由活塞斯特林转换器以氦气为工质 ($\gamma = 5/3$)，运行时热端约 900 K (约 630 °C)、冷端约 340 K，测得热效率 (电功率/输入热功率) 约 31%，约为卡诺效率的 50%[4] (温度读自该文图 13，为约值；另一份报告给出一个明确工况点：电功率约 85 W、热输入约 265 W，即约 33%，热端约 640 °C、冷端约 60 °C[5])。“自由活塞”指活塞不连曲轴，靠气体弹簧与机械弹簧支撑、按共振频率往复运动；它直接带动直线发电机 (动子在线圈中直线往复，发电)。下面用斯特林循环逐步“解剖”这个差距。取容积比 $r = 1.6$ ，工质 1 mol。

1. 求热源 $T_H = 900$ K、冷源 $T_C = 340$ K 间的卡诺效率，即理想回热 ($\varepsilon = 1$) 斯特林循环的效率。
2. 推导回热有效度为 ε 时的效率 $\eta(\varepsilon)$ ，求 $\varepsilon = 0, 0.9, 0.98$ 时的 η 。若要求 $\eta \geq 0.9\eta_C$ ， ε 至少为多少？按平衡逆流换热器模型，相应的 NTU 至少多大？
3. 求每循环回热器暂存的热量与净功之比。取 $\varepsilon = 0.98$ ，求每循环的熵产 S_{gen} 与损失功，并验证式 (3.5)。
4. 若把实测效率与卡诺效率的差距全部归因于回热不完善，等效的 ε 是多少？这个结论可信吗？
5. 另一种不可逆来源是有限温差换热：设加热器、冷却器都需要温差 θ 才能传热，即气体实际在 $T_H - \theta$ 与 $T_C + \theta$ 之间循环。取 $\varepsilon = 0.98$ ，求使 $\eta = 0.31$ 的 θ ；若再计入直线发电机约 90% 的效率， θ 又是多少？由此对“差距从哪里来”作出判断。

解答

(1) 式 (4.1): $\eta_C = 1 - 340/900 = 0.622$ 。实测 $0.31/0.622 = 0.50$ ，与文献的“约 50% 卡诺”一致。

(2) 推导见式 (4.2): 加热器除提供等温膨胀热 $RT_H \ln r$ 外，还要补足回热器没能提供的 $(1 - \varepsilon)C_V(T_H - T_C)$ 。 $X = 1/[(\gamma - 1) \ln r] = 1/(\frac{2}{3} \times 0.4700) = 3.191$ ， $\eta_C X = 1.986$ 。于是 $\eta(0) = 0.622/2.986 = 20.8\%$ (仅为卡诺的 33%)； $\eta(0.9) = 0.622/1.199 = 51.9\%$ ； $\eta(0.98) = 59.9\%$ 。令 $1/[1 + (1 - \varepsilon)\eta_C X] = 0.9$ ，得 $1 - \varepsilon = (1/0.9 - 1)/1.986 = 0.056$ ， $\varepsilon \geq 0.944$ ；由式 (3.8)， $\text{NTU} = \varepsilon/(1 - \varepsilon) \geq 16.9$ 。NTU 大意味着换热面积大、通道细，但细通道的流阻与死区 (降低压强振荡，见例题 2) 也随之增大：回热器设计就是在换热、流阻、死区三者之间折中。

(3) $Q_R/W = X = 3.19$ ：回热器每循环暂存的热是净功的 3 倍多，回热损失 1% 就要从热源多取约 3% 净功的热。每摩尔每循环： $RT_H \ln r = 8.314 \times 900 \times 0.4700 = 3516.8$ J， $Q_R = C_V(T_H - T_C) = 6983.8$ J， $(1 - \varepsilon)Q_R = 139.7$ J，所以 $Q_H = 3516.8 + 139.7 = 3656.5$ J， $W = R(T_H - T_C) \ln r = 2188.3$ J。多吸的 139.7 J 从 T_H 取来、在冷却行程中多交给 T_C ，

故 $S_{\text{gen}} = (1 - \varepsilon)Q_R\left(\frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_H}\right) = 0.2556 \text{ J/K}$, 损失功 $T_C S_{\text{gen}} = 86.9 \text{ J}$; 而 $\eta_C Q_H - W = 2275.2 - 2188.3 = 86.9 \text{ J}$, 与式 (3.5) 一致。

(4) 由 $\eta_C/[1 + (1 - \varepsilon)\eta_C X] = 0.31$: $1 - \varepsilon = (\eta_C/0.31 - 1)/(\eta_C X) = 0.507$, $\varepsilon \approx 0.49$ 。这不可信。由 (2), $\varepsilon = 0.9$ 时效率就降到 $0.83\eta_C$; 一台已经达到“约 50% 卡诺”的成熟机器, 其回热器有效度不会只有 0.5。这里假设实用回热器的 ε 在 0.95 以上 (本讲未核实具体机型的数值, 下面取 0.98 作为假设值), 那么回热只能解释差距的一小部分。另外, 实测效率是电效率, 还包含发电机损耗。

(5) 气体温度为 $T_H - \theta$ 、 $T_C + \theta$ 时, $\eta = \eta'_C/[1 + (1 - \varepsilon)\eta'_C X]$, $\eta'_C = 1 - (T_C + \theta)/(T_H - \theta)$ 。数值求解 $\eta = 0.31$ (脚本 `examples.py`): $\theta = 164 \text{ K}$, 即气体只在约 737 K 与 504 K 之间工作。计入发电机效率 (假设为 90%) 后, 气体循环需要 $\eta = 0.31/0.90 = 0.344$, $\theta = 147 \text{ K}$ 。若假设加热器与冷却器的换热温差只有几十 K (本讲未核实具体机型的数值), 所以即便同时计入回热不完善、换热温差和发电机效率, 理想斯特林循环模型仍不能解释全部差距。实际机器中还有: 流动阻力 (推动气体穿过回热器、换热器所耗的“泵送损失”); 沿回热器与气缸壁的轴向导热; 活塞与气缸间隙中的气体泄漏; 以及“穿梭换热” (往复运动的活塞或排出器在热区吸热、在冷区放热, 把热直接搬到冷端) [28]。“约 50% 卡诺”是这许多损失叠加的结果。

评分要点: 两个等容过程中回热器与外热源的分工 (2 分); $\eta(\varepsilon)$ 公式与数值 (3 分); NTU 与设计矛盾 (2 分); 熵产按“多从高温取、多向低温放”计算 (2 分); (4) 的反推与批判 (2 分); (5) 的建模、数值求解与结论 (3 分)。

例题: 2. Schmidt 分析: 相位与功

一台 α 型氦气斯特林机: $T_H = 900 \text{ K}$, $T_C = 330 \text{ K}$; $V_{E0} = V_{C0} = 40 \text{ cm}^3$, 体积振幅 $A_E = A_C = 20 \text{ cm}^3$; 死区 (加热器 + 回热器 + 冷却器) $V_D = 60 \text{ cm}^3$, 为简单起见全部按回热器的对数平均温度处理; $p_0 = 3.0 \text{ MPa}$, $f = 60 \text{ Hz}$ 。

1. 求 T_D 与 S 。
2. 取 $\alpha = 90^\circ$, 用线性化 Schmidt 模型求压强振幅及其相对 V_C 的相位; 估计线性化参量 δ 。
3. 求每循环 W_E 、 W_C 、 W 、效率和输出功率。
4. 精确 (非线性) Schmidt 模型给出 $W(90^\circ) = 27.86 \text{ J}$ 、最优相位约 88° 。线性化误差为多少? 为何最优相位仍在 90° 附近?
5. 若死区加倍 (充气质量调整使 p_0 不变), 每循环功变为多少? 物理原因是什么?
6. 若令 $\alpha = -90^\circ$, 机器会怎样工作? 求两腔的热量与 COP。

解答

(1) 式 (4.3): $T_D = 570/\ln(900/330) = 568.1 \text{ K}$ 。 $S = \frac{40}{900} + \frac{40}{330} + \frac{60}{568.1} = (0.0444 + 0.1212 + 0.1056) \text{ cm}^3/\text{K} = 2.713 \times 10^{-7} \text{ m}^3/\text{K}$ 。

(2) 式 (4.5), $\hat{V}_E = iA_E$: $\hat{V}_E/T_H + \hat{V}_C/T_C = (0.0606 + 0.0222i) \text{ cm}^3/\text{K}$, 模 $0.0645 \text{ cm}^3/\text{K}$ 。
 $|\hat{p}| = p_0 \times 0.0645/0.2713 = 0.238 p_0 = 0.714 \text{ MPa}$, $\delta = 0.238$ 。相位: $\arg[-(0.0606 + 0.0222i)] =$

-159.9° , 即 p 比 $-V_C$ (辐角 180°) 超前约 20° : $-\hat{V}_E/T_H$ 一项把它拉向 $-V_E$ (辐角 270°) 一侧。于是 p 超前 V_E 约 110° , 而不是忽略热腔贡献时的 $\pi - \alpha = 90^\circ$; 由式 (3.11), $W_E \propto \sin 110^\circ \cdot |\hat{p}|$, 与 (3) 的结果一致。

(3) 式 (4.6): $W_E = \pi p_0 A_E A_C / (ST_C) = 42.11 \text{ J}$, $W_C = -\pi p_0 A_E A_C / (ST_H) = -15.44 \text{ J}$, $W = 26.67 \text{ J}$; $\eta = W/W_E = 1 - T_C/T_H = 63.3\%$; 功率 $fW = 1.60 \text{ kW}$ 。

(4) 相对误差 $27.86/26.67 - 1 = +4.5\%$, 是 $\mathcal{O}(\delta^2)$ 量级 ($\delta^2 = 0.057$), 与线性化的截断阶一致。最优相位由 $W \propto \sin \alpha$ 决定, $\sin \alpha$ 在 90° 处取极大且一阶导数为零, 非线性修正只能把极大点移动 $\mathcal{O}(\delta^2)$ 的量 (附录 B)。

(5) $S' = S + V_D/T_D = 3.769 \times 10^{-7} \text{ m}^3/\text{K}$, $W \propto 1/S$: $W = 26.67 \times 2.713/3.769 = 19.20 \text{ J}$ (降到 72%; 精确模型为 19.63 J , 即 70.5%)。死区里的气体不参与做功, 却分担压缩: 同样的活塞位移引起的压强振荡 $|\hat{p}| \propto 1/S$ 变小。

(6) $\sin \alpha = -1$, $W_E = -42.11 \text{ J}$ (T_H 腔放热), $W_C = +15.44 \text{ J}$ (T_C 腔吸热), $W = -26.67 \text{ J}$ (外界做功): 成为把热从 T_C 泵到 T_H 的热泵/制冷机, $\text{COP} = 15.44/26.67 = 0.579 = T_C/(T_H - T_C)$, 为卡诺值。

评分要点: 质量守恒写出 $p(t)$ (2 分); 对数平均温度 (1 分); $\hat{p}$ 及其相位 (2 分); $W = \pi \text{Im}(\hat{p}\hat{V}^*)$ 的运用 (3 分); 死区与逆转的物理讨论 (各 2 分)。

例题: 3. 10 bar 氦气中的驻波板叠

一台驻波热声机以 10 bar、300 K 的氦气为工质 (按理想气体, $\gamma = 5/3$, $M = 4.0026 \text{ g/mol}$; NIST 数据: $K = 0.1566 \text{ W/(m K)}$, $\mu = 1.996 \times 10^{-5} \text{ Pas}$ [25]), 工作于四分之一波长谐振模式, $f = 100 \text{ Hz}$, 封闭端压强振幅 $P_0 = 0.30 \text{ bar}$ 。板叠中心距封闭端 $X = 0.40 \text{ m}$, 长 $\Delta x = 5.0 \text{ cm}$ 。

1. 求 ρ_m 、 c 、 c_p 、 κ 、 ν 、 σ 、 δ_κ 、 δ_ν 及谐振管长度。
2. 求板叠处的 $|\hat{p}|$ 、 $|\hat{u}|$ 、 ξ_1 、 T_{ad} 。
3. 用两种方法求 ∇T_{crit} 及板叠两端的临界温差; 若 P_0 加倍, 结果如何变化?
4. 板间距应取多大? 说明理由。
5. 设板叠以 $\Gamma = 2$ 作发动机运行, 求单位板面积的声功率、粘性耗散、单位板宽的热流, 以及 (无粘) 效率; 与同一温差下的卡诺效率比较。
6. 若把板叠移到 $X = 1.5 \text{ m}$, ∇T_{crit} 与粘性/热声功率比如何? $\Gamma = 2$ 时还能输出声功吗?

解答

(1) $R_s = 8.3145/0.0040026 = 2077 \text{ J/(kg K)}$; $\rho_m = p_m/(R_s T) = 1.605 \text{ kg/m}^3$; $c = \sqrt{\gamma R_s T} = 1019 \text{ m/s}$; $c_p = \frac{5}{2} R_s = 5193 \text{ J/(kg K)}$; $\kappa = K/(\rho_m c_p) = 1.879 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$; $\nu = \mu/\rho_m = 1.244 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$; $\sigma = 0.662$; $\omega = 628.3 \text{ s}^{-1}$, $\delta_\kappa = \sqrt{2\kappa/\omega} = 0.245 \text{ mm}$, $\delta_\nu = 0.199 \text{ mm}$; 管长约 $\lambda/4 = c/(4f) = 2.55 \text{ m}$ 。

(2) $k = \omega/c = 0.6165 \text{ m}^{-1}$, $kX = 0.2466$ 。 $|\hat{p}| = P_0 \cos kX = 2.909 \times 10^4 \text{ Pa}$; $|\hat{u}| = P_0 \sin kX/(\rho_m c) = 4.48 \text{ m/s}$; $\xi_1 = |\hat{u}|/\omega = 7.13 \text{ mm}$; $T_{\text{ad}} = |\hat{p}|/(\rho_m c_p) = 3.49 \text{ K}$ 。

(3) 方法一: $\nabla T_{\text{crit}} = T_{\text{ad}}/\xi_1 = 490 \text{ K/m}$ 。方法二: 式 (5.6), $(\gamma - 1)T_m k \cot kX = \frac{2}{3} \times 300 \times 0.6165 \times 3.972 = 490 \text{ K/m}$ 。临界温差 $\nabla T_{\text{crit}} \Delta x = 24.5 \text{ K}$ 。 P_0 加倍时 T_{ad} 与 ξ_1 都加倍, ∇T_{crit} 不变。

(4) 由式 (5.8), 驻波机制要求 $\omega\tau \sim 1$, 即气体离板约一个 δ_κ ; 板间距 $2y_0 \approx (2 \sim 4)\delta_\kappa = 0.5 \sim 1.0 \text{ mm}$ 。太密则接近完美接触 (功趋于零、粘性大), 太疏则大部分气体绝热、不参与。

(5) 式 (5.11): $\dot{W}'' = \frac{1}{4} \times 2.45 \times 10^{-4} \times \frac{2}{3} \times 628.3 \times (2.909 \times 10^4)^2 / (1.667 \times 10^6) \times 1 = 13.0 \text{ W/m}^2$; 式 (5.13): $\dot{E}_v'' = \frac{1}{4} \times 1.605 \times 628.3 \times 1.99 \times 10^{-4} \times 4.48^2 = 1.01 \text{ W/m}^2$, 净 12.0 W/m^2 (比值 0.077, 与式 (5.14) 一致)。式 (5.12): $\left| \dot{H}' \right| = \frac{1}{4} \delta_\kappa |\hat{p}| |\hat{u}| = 7.97 \text{ W/m}$ 。无粘效率 $\eta = \dot{W}'' \Delta x / \left| \dot{H}' \right| = 0.652 / 7.97 = 8.2\% = \nabla T_{\text{crit}} \Delta x / T_m$; 计粘性约 7.5%。温差 $\Delta T = 49 \text{ K}$ 、以 300 K 为板叠中点 (两端 275.5 K 与 324.5 K): 线性近似的卡诺效率 $\Delta T / T_m = 16.3\%$, $\eta / \eta_C = 1 / \Gamma = 0.5$; 精确卡诺效率 $1 - 275.5 / 324.5 = 15.1\%$, 比值为 0.54。二者之差是 $\mathcal{O}(\Delta T / T_m)$ 的高阶项, 式 (5.10) 中的 η_C 指线性值。

(6) $kX = 0.925$: $\nabla T_{\text{crit}} = 93 \text{ K/m}$, 需要的温差小得多; 但粘性/热声比 $\sqrt{\sigma} \tan^2 kX / [(\gamma - 1)(\Gamma - 1)] = 2.15$ ——粘性耗散是热声产生的 2 倍多, $\Gamma = 2$ 时净声功为负; 须 $\Gamma \gtrsim 3.15$ (精确为 $1 + 2.147$) 才有净输出。板叠宜靠近压力波腹一侧。

评分要点: 物性与穿透深度 (2 分); 驻波关系求 $\hat{p}, \hat{u}, \xi_1$ (2 分); ∇T_{crit} 两法及振幅无关性 (3 分); 板间距论证 (2 分); 功率、热流与效率 (3 分); 位置讨论 (2 分)。

例题: 4. 热声管的起振温差

一根玻璃管, 一端封闭, 长 $L = 0.40 \text{ m}$, 内半径 $R_t = 1.25 \text{ cm}$, 管内为 1 bar 、 300 K 空气 ($\gamma = 1.40$, $c = 347.3 \text{ m/s}$, $K = 0.02638 \text{ W/(mK)}$, $\rho_m = 1.162 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 1006.4 \text{ J/(kgK)}$, $\sigma = 0.707$)。管中放置长 $\Delta x = 3.0 \text{ cm}$ 的平行板板叠, 板间距 $2y_0 = 1.0 \text{ mm}$, 板很薄、充满整个截面; 板叠两端为热、冷换热器, 冷端保持 $T_C = 300 \text{ K}$ 。

1. 求基频、 k 、 δ_κ 与 y_0/δ_κ 。
2. 证明板叠单位长度的湿周 $\Pi \approx \pi R_t^2/y_0$ 。利用式 (5.11) (取 $\Gamma = 0$) 与式 (5.13) 求管壁上的声损耗, 并利用开口端辐射阻求辐射损耗, 证明

$$B = B_{\text{wall}} + B_{\text{rad}}, \quad B_{\text{wall}} = \frac{L_{\text{eff}} y_0 (1 + a)}{R_t \Delta x}, \quad B_{\text{rad}} = \frac{(k R_t)^2 y_0}{2 k \Delta x \delta_\kappa (\gamma - 1)},$$

并求其数值。

3. 求最优板叠位置 X^* 和该处的起振温差 (取 $T_m = T_C + \Delta T/2$); 板叠放在 $X_s = 5 \text{ cm}$ 时起振温差又是多少?
4. 实际试管热声机 (用钢丝绒或陶瓷蜂窝作板叠) 通常需要加热到数百摄氏度才能起振。指出本模型低估起振温差的可能原因。

解答

(1) $L_{\text{eff}} = L + 0.61 R_t = 0.4077 \text{ m}$, $f = c/(4L_{\text{eff}}) = 213 \text{ Hz}$, $k = \pi/(2L_{\text{eff}}) = 3.853 \text{ m}^{-1}$; $\kappa = 2.256 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $\delta_\kappa = 0.184 \text{ mm}$, $y_0/\delta_\kappa = 2.7$ (边界层近似勉强成立)。物性一律按冷

端 300 K 取值, 是一种近似 (见 (4))。

(2) 截面积 πR_t^2 被间距 $2y_0$ 的板分成许多通道; 每块板两面, 每两面之间夹着厚 $2y_0$ 的气体, 故单位长度上的板面积 $\Pi = 2 \times (\pi R_t^2 / 2y_0) = \pi R_t^2 / y_0$ 。

管壁 (周长 $2\pi R_t$, 温度均匀, $\Gamma = 0$) 单位面积损耗为 $\frac{1}{4}\delta_\kappa(\gamma-1)\omega|\hat{p}|^2/(\rho_m c^2) + \frac{1}{4}\rho_m\omega\delta_\nu|\hat{u}|^2$ 。代入 $|\hat{p}| = P_0 \cos kX$ 、 $|\hat{u}| = P_0 \sin kX/(\rho_m c)$, 沿管积分。管壁实际只到 L ; 为利用 $\int_0^{L_{\text{eff}}} \cos^2 kX dX = \int_0^{L_{\text{eff}}} \sin^2 kX dX = L_{\text{eff}}/2$, 近似积分到 L_{eff} , 多算了管口外端修正段, 相对误差约 2.5% (量级为 $0.6R_t/L$) (积分到 L 得 $B_{\text{wall}} = 1.643$):

$$\dot{W}_{\text{wall}} = \frac{\omega P_0^2}{4\rho_m c^2} 2\pi R_t \frac{L_{\text{eff}}}{2} [(\gamma-1)\delta_\kappa + \delta_\nu].$$

除以 $G_0 = \Pi \Delta x \delta_\kappa (\gamma-1) \omega P_0^2 / (4\rho_m c^2)$, 用 $\delta_\nu / [(\gamma-1)\delta_\kappa] = a$, 即得 B_{wall} 。开口端 $|\hat{u}| = P_0 / (\rho_m c)$, 辐射功率 $\frac{1}{2} \cdot \rho_m c \frac{(kR_t)^2}{4} \cdot |\hat{u}|^2 \cdot \pi R_t^2$, 除以 G_0 并用 $\omega = kc$ 即得 B_{rad} 。数值: $a = \sqrt{0.707}/0.4 = 2.102$, $B_{\text{wall}} = 0.4077 \times 5 \times 10^{-4} \times 3.102 / (0.0125 \times 0.03) = 1.686$, $kR_t = 0.0482$, $B_{\text{rad}} = 0.068$, $B = 1.754$ 。管壁损耗远大于辐射损耗。

(3) 式 (5.17): $\tan \varphi^* = \sqrt{2.754/3.856} = 0.845$, $\varphi^* = 0.702$, $X^* = \varphi^*/k = 18.2 \text{ cm}$ (约 $0.45L$); 方括号最小值 $2\sqrt{2.754 \times 3.856} = 6.52$, $\Delta T/T_m = 0.4 \times 3.853 \times 0.03 \times 6.52 = 0.301$ 。由 $\Delta T = 0.301(T_C + \Delta T/2)$ 得 $\Delta T_{\text{on}} = 106 \text{ K}$ 。 $X_s = 5 \text{ cm}$ 时 $\varphi = 0.193$, 方括号 = 14.83, $\Delta T/T_m = 0.688$, $\Delta T_{\text{on}} = 314 \text{ K}$ (图 11)。

(4) 可能原因: 钢丝绒、蜂窝的通道远非平行板, 水力半径可能小于 δ_κ , 热接触过好而驻波增益下降, 粘性更大; 换热器自身的粘性与热损耗; 热端与封闭端之间的热气体使声速与模式形状改变; 板叠的热容和固体导热把一部分热直接短路到冷端; 起振判据只给出线性失稳阈值, 实际观察到“声音”还需要一定振幅; 此外物性按 300 K 取值, 而板叠平均温度约 350 K, $\delta_\kappa \propto T^{0.9}$ 左右, 偏小约 15%, B 与 y_0/δ_κ 都随之改变。

评分要点: 湿周 (1 分); 管壁损耗的积分 (3 分); 辐射损耗 (2 分); B 数值 (1 分); 最优位置 (2 分); 自洽求 ΔT (2 分); 讨论 (2 分)。

例题: 5. 无运动部件的“热驱动制冷”: 行波热声发动机 + 脉管制冷机

设想一套完全没有运动部件的低温制冷系统: 行波热声发动机 (第 6.4 节) 把热直接转换成声功率, 声功率再驱动一台小孔型脉管制冷机 (第 6.5 节)。工质为 30 bar 氦气, 频率 80 Hz。发动机热端 $T_H = 900 \text{ K}$, 室温 $T_0 = 300 \text{ K}$, 制冷温度 $T_C = 120 \text{ K}$ 。热端输入热功率 $\dot{Q}_H = 3.0 \text{ kW}$ 。除特别说明外, 回热器理想、各换热器等温、管道无损耗。**符号:** 发动机回热器冷端 (温度 T_0) 的声功率记为 $\dot{W}_{\text{fb}}$ (由反馈回路送回), 脉管制冷机冷端 ($T_C = 120 \text{ K}$) 的声功率记为 $\dot{W}_{\text{PT}}$; 第 6.5 节公式中的 T_H (后冷器温度) 在本题中是 T_0 。

1. **发动机的能流。** 求发动机回热器冷端进入的声功率 $\dot{W}_{\text{fb}}$ 、热端流出的 $\dot{W}_H$ 、经反馈回路送回冷端的功率和可输出的声功率 $\dot{W}_{\text{out}}$, 以及热效率。为什么环路中“循环”的声功率与输出功率同量级?
2. **反馈回路的损耗。** 若反馈惯性管与柔性腔损耗了经过它的声功率的 10% (回到冷端的仍须是 $\dot{W}_{\text{fb}}$), 求输出功率与热效率。若同样 10% 的损耗发生在输出线上, 结果又如何? 比较两种情形; 温比 T_H/T_0 为多少时, 回路损耗反而影响更大?

3. **回热器的阻抗**。回热器由间隙 $2y_0 = 50 \mu\text{m}$ 的平行薄片构成, 长 6 cm , 温度从 300 K 线性升到 900 K ; 氦气在约 600 K 时 $\mu \approx 3.2 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ (由 300 K 值按 $\mu \propto T^{0.7}$ 外推)。(a) 说明 $y_0 \ll \delta_\nu$ 时间隙中的流动可视为准定常的平板泊肃叶流, 推出平均速度与压强梯度的关系 $dp/dx = -r_v u$, 求 r_v 。(b) 用式 (6.3), 求使局部粘性耗散不超过热声增益 10% 所需的声阻抗 $z = |\hat{p}/\hat{u}|$ ($\nabla T/T_m$ 按平均温度估算), 并与 300 K 时的行波阻抗 ρc 比较。
4. **脉管制冷机**。把 (1) 的 $\dot{W}_{\text{out}}$ 全部送入脉管制冷机 (后冷器温度 T_0)。求制冷量 $\dot{Q}_C$ 、制冷机 COP, 小孔中的熵产率与损失功。再求整套系统“每单位热输入的制冷量” $\dot{Q}_C/\dot{Q}_H$, 并与工作在 T_H 、 T_0 、 T_C 三个热源之间的可逆装置的上限比较。
5. **回热器不完善**。实际脉管制冷机的回热器有效度 $\varepsilon < 1$: 每半个周期由室温端流向冷端的气体, 在冷端出口处比 T_C 高 $(1 - \varepsilon)(T_0 - T_C)$ 。(a) 设回热器冷端质量流量振幅为 $\dot{m}_1$, 证明由此带入冷端的平均焓流为 $\dot{H}_{\text{reg}} = (1 - \varepsilon)\dot{m}_1 c_p (T_0 - T_C)/\pi$ 。(b) 冷端压强振幅 $|\hat{p}| = 0.30 \text{ MPa}$, 且 $\hat{p}$ 与体积流速同相, 由 $\dot{W}_{\text{PT}}$ 求 $\dot{m}_1$ 。(c) 要使净制冷量 $\dot{Q}_C - \dot{H}_{\text{reg}}$ 不低于理想值的一半, ε 至少多大? 与例题 1 中斯特林发电机的要求比较。

解答

(1) 理想回热器中 $\dot{W} \propto T_m$ (式 (6.4)), 热端换热器吸热 $\dot{Q}_H = \dot{W}_H$ (式 (6.7) 的推导)。故 $\dot{W}_H = 3.0 \text{ kW}$, $\dot{W}_{\text{fb}} = \dot{W}_H T_0/T_H = 1.0 \text{ kW}$ 。冷端需要的 $\dot{W}_{\text{fb}}$ 由反馈回路从热端功率中分出, 故输出 $\dot{W}_{\text{out}} = \dot{W}_H - \dot{W}_{\text{fb}} = 2.0 \text{ kW}$, $\eta = 2/3 = 1 - T_0/T_H$ (卡诺)。回热器只能放大声功率 ($\propto T_H/T_0$), 不能凭空产生; 必须有 $\dot{W}_{\text{fb}} = \dot{W}_H/3$ 的“种子”功率不断送回冷端。所以环路中循环的功率是输出的一半, 与输出同量级。

(2) 反馈回路需送出 $\dot{W}_{\text{fb}}/0.9 = 1111 \text{ W}$, 输出 $3000 - 1111 = 1889 \text{ W}$, $\eta = 63.0\%$ 。若损耗发生在输出线上: $0.9 \times 2000 = 1800 \text{ W}$, $\eta = 60.0\%$ 。本题中回路损耗少损失 111 W , 输出线损耗少损失 200 W , 原因是回路中流过的功率 $\dot{W}_{\text{fb}} = \dot{W}_H T_0/T_H$ 小于输出功率 $\dot{W}_H(1 - T_0/T_H)$ 。损耗比例同为 f 时, 回路损失 $\dot{W}_{\text{fb}} f/(1 - f)$, 输出线损失 $f \dot{W}_{\text{out}}$; 令二者相等, 得分界 $T_H/T_0 = 1 + 1/(1 - f)$, 小损耗极限下为 $T_H/T_0 = 2$ ($f = 0.1$ 时为 2.11)。温比低于这一分界时, 回路中流过的功率比输出还大, 回路损耗更伤。反馈网络之所以关键, 还有另一个更根本的理由: 它决定回热器中的相位与阻抗, 进而决定回热器能否高效工作 (见 (3) 与第 6.4 节)。

(3)(a) $y_0 \ll \delta_\nu$ 意味着粘性扩散穿过整个间隙所需时间远短于振荡周期, 惯性项 $\rho_m \partial u / \partial t$ 相对粘性项可忽略, 流动在每一瞬时都是定常的。由第 3.5 节的动量方程: $0 = -dp/dx + \mu d^2 u / dy^2$, $u(\pm y_0) = 0$, 解得 $u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - y_0^2)$ 。对 y 平均: $\bar{u} = -\frac{y_0^2}{3\mu} \frac{dp}{dx}$, 即 $r_v = 3\mu/y_0^2 = 3 \times 3.2 \times 10^{-5} / (25 \times 10^{-6})^2 = 1.54 \times 10^5 \text{ Pa}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ 。检验所援引的条件: 600 K 时 $\nu = \mu/\rho_m \approx 1.35 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, 80 Hz 下 $\delta_\nu \approx 0.23 \text{ mm}$, $y_0/\delta_\nu \approx 0.11$; 惯性项与粘性项之比 $\omega \rho_m / r_v = \frac{2}{3} (y_0/\delta_\nu)^2 \approx 0.008$, 确可忽略。又 $\kappa \approx 2.0 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $\delta_\kappa \approx 0.28 \text{ mm}$, $y_0/\delta_\kappa \approx 0.09$, 热接触也近乎完美。

(3)(b) 由式 (6.3), 单位体积增益 $\frac{\nabla T}{T_m} \cdot \frac{1}{2} |\hat{p}| |\hat{u}|$ ($\hat{p}$ 、 $\hat{u}$ 同相), 耗散 $\frac{1}{2} r_v |\hat{u}|^2$, 二者之比为 $\frac{r_v T_m}{z \nabla T}$ 。 $\nabla T/T_m \approx (600 \text{ K}/0.06 \text{ m})/600 \text{ K} = 16.7 \text{ m}^{-1}$ 。比值不超过 0.1 要求 $z \geq 10 r_v T_m / \nabla T = 9.2 \times 10^4 \text{ Pa}\cdot\text{s}/\text{m}$ 。 300 K 、 30 bar 氦气 $\rho c = 4.81 \times 1019 = 4.9 \times 10^3 \text{ Pa}\cdot\text{s}/\text{m}$, 所以中点处 $z \gtrsim 19 \rho c$: 回热器必须工作在比行波阻抗高一个多数量级的“高阻抗行波”状态, 这正是要用环路网络调

节相位与阻抗的原因。**注意这只是中点的局部估算。**沿回热器, $r_v T_m / \nabla T \propto T_m^{1.7}$ ($\mu \propto T^{0.7}$), 所以要求在热端最苛刻: 冷端约 $6\rho c$, 中点 $19\rho c$, 热端约 $38\rho c$ 。与此同时, $|\hat{u}|$ 随 T_m 增大, z 沿回热器约按 T_0/T_m 下降, 回热器自身的柔度还会使相位转动。数值积分带粘性项的式 (6.2)、(6.3) (脚本 `examples.py`): 若冷端 $z = 19\rho c$ 且 $\hat{u}$ 与 $\hat{p}$ 同相, 到热端 z 只剩约 $4.5\rho c$, $\hat{u}$ 滞后 31° , 整段耗散/增益约 0.30; 若把冷端阻抗提高到 $40\rho c$ 并让 $\hat{u}$ 超前 $\hat{p}$ 约 40° , 整段比值降到约 0.10。所以实际设计中, 冷端阻抗要更高, 并让 $\hat{u}$ 略超前 $\hat{p}$ 。

(4) 式 (6.8) (其中的 T_H 换为 T_0): $\dot{Q}_C = \dot{W}_0 T_C / T_0 = 2000 \times 120 / 300 = 800 \text{ W}$, $\text{COP} = T_C / T_0 = 0.40$ (卡诺 $T_C / (T_0 - T_C) = 0.667$; 若能回收冷端功, 可得 1333 W)。小孔把 $\dot{W}_{\text{PT}} = 800 \text{ W}$ 的声功率在 T_0 耗散为热, 熵产率 $\dot{S} = 800 / 300 = 2.67 \text{ W/K}$, 损失功 $T_0 \dot{S} = 800 \text{ W}$ 。检验 (制冷机的 Gouy-Stodola 关系): $\dot{W}_0 = \dot{Q}_C (T_0 / T_C - 1) + T_0 \dot{S} = 1200 + 800 = 2000 \text{ W}$, 成立。整套系统 $\dot{Q}_C / \dot{Q}_H = 0.267$; 可逆上限为可逆热机效率乘可逆制冷机 COP: $(1 - T_0 / T_H) \cdot T_C / (T_0 - T_C) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 0.444$ 。

(5)(a) $\dot{m} = \dot{m}_1 \cos \omega t$ 。由室温端流向冷端的半个周期内流过的质量为 $\int |\dot{m}| dt = 2\dot{m}_1 / \omega$ 。这些气体在冷端出口处多带 $(1 - \varepsilon)(T_0 - T_C)$ 的温度, 即每周期多带入焓 $(1 - \varepsilon)c_p(T_0 - T_C) \cdot 2\dot{m}_1 / \omega$; 反向半周期气体在冷端以 T_C 进入回热器, 不带走额外能量。乘以每秒周期数 $\omega / 2\pi$: $\dot{H}_{\text{reg}} = (1 - \varepsilon)\dot{m}_1 c_p (T_0 - T_C) / \pi$ 。

(5)(b) 冷端 $\dot{W}_{\text{PT}} = \frac{1}{2} |\hat{p}| |\hat{U}|$, $\dot{m}_1 = \rho_C |\hat{U}|$, $\rho_C = p_m / (R_s T_C) = 3 \times 10^6 / (2077 \times 120) = 12.0 \text{ kg/m}^3$ 。故 $\dot{m}_1 = 2\rho_C \dot{W}_{\text{PT}} / |\hat{p}| = 2 \times 12.0 \times 800 / (3 \times 10^5) = 0.064 \text{ kg/s}$ 。

(5)(c) $\dot{H}_{\text{reg}} = (1 - \varepsilon) \times 0.0642 \times 5193 \times 180 / \pi = (1 - \varepsilon) \times 1.91 \times 10^4 \text{ W}$ 。要求 $\dot{H}_{\text{reg}} \leq 400 \text{ W}$, 得 $1 - \varepsilon \leq 0.021$, $\varepsilon \geq 0.979$ 。 $\varepsilon = 0.99$ 时净制冷 609 W 。与例题 1 比较: 那里 $\varepsilon = 0.944$ 已能达到 $0.9\eta_C$; 这里回热器中往返气流携带的焓流尺度 $\dot{m}_1 c_p \Delta T / \pi \approx 19 \text{ kW}$ 是制冷量的 24 倍, 低温制冷机对回热器的要求苛刻得多——这也是低温脉管制冷机研究的核心难题之一。

评分要点: (1) 放大关系与“种子”功率 (3 分); (2) 两种损耗位置的比较 (2 分); (3) 泊肃叶流与 r_v (3 分), 阻抗判据与数值 (2 分); (4) 制冷量、熵产与上限 (3 分); (5) 焓流推导 (2 分), $\dot{m}_1$ 与 ε (2 分)。

8 实验与数据处理：热声管起振温差与板叠位置

注：关于数据

下表为**模拟数据**：按式 (5.16) (取“真值” $B = 2.30$ 、 $\sigma = 0.707$) 计算。其中 B 的真值比按例题 4 方法算出的管壁与辐射损耗 (约 1.83) 多 0.47, 这部分是人为设定的附加损耗, 用来模拟换热器等未建模的损耗。数据中加入了冷端工况波动 (T_C , $\pm 1.5 \text{ K}$)、热电偶读数 ($\pm 0.8 \text{ K}$)、起振判定 (ΔT 的 2%)、频率 ($\pm 0.4 \text{ Hz}$) 等随机误差, 随机种子 20261003, 生成程序为 `scripts/gen_expdata.py`。

装置。 一端封闭的玻璃管, 长 $L = 0.500 \text{ m}$, 内半径 $R_t = 1.50 \text{ cm}$, 管内为空气 ($\gamma = 1.40$, 室温段声速 $c_0 = 347.3 \text{ m/s}$)。平行板板叠长 $\Delta x = 3.0 \text{ cm}$ 、板间距 $2y_0 = 1.0 \text{ mm}$, 热端 (朝封闭端) 用电热丝加热, 冷端用水冷。实验中把板叠中心依次放在距封闭端 X_s 处, 缓慢增大加热功率, 记录刚出现持续声音时两端的温度 T_H 、 T_C 与声音频率 f 。

表 2 起振时的测量值（模拟数据）

X_s / cm	T_H / K	T_C / K	f / Hz
5.0	694.6	296.0	170.0
8.0	509.8	296.1	170.8
11.0	445.5	295.7	170.0
14.0	417.5	294.0	170.1
17.0	398.9	293.0	169.7
20.0	388.4	292.8	170.9
23.0	392.2	296.7	170.4
26.0	390.8	290.7	170.9
29.0	395.8	293.8	170.3
32.0	411.2	295.9	170.5
35.0	426.5	295.3	170.1

练习：实验题（建议 60 分钟）

1. 由频率的平均值求波数 k 与有效长度 L_{eff} ，与 $L + 0.61R_t$ 比较。
2. 以 $T_m = (T_H + T_C)/2$ 、 $\varphi = kX_s$ ，说明式 (5.16) 可写成 $y = b_0 + b_1x$ ，其中 $x = \tan^2 \varphi$ ， $y = \frac{(\Delta T/T_m) \tan \varphi}{(\gamma - 1)k\Delta x}$ ， $b_0 = 1 + B$ ， $b_1 = a + B$ 。列表计算各点的 x 、 y 。
3. 用最小二乘法拟合直线，求 b_0 、 b_1 及其标准不确定度（公式见附录 C）。
4. 由拟合结果求 B 、 a 和空气的普朗特数 $\sigma = [(\gamma - 1)a]^2$ ，给出不确定度（注意 b_0 与 b_1 相关）。与文献值 $\sigma = 0.707$ 及按例题 4 方法估算的 B_{th} 比较。
5. 求最优板叠位置 X^* 。
6. 分析主要的系统误差，并提出改进方案。

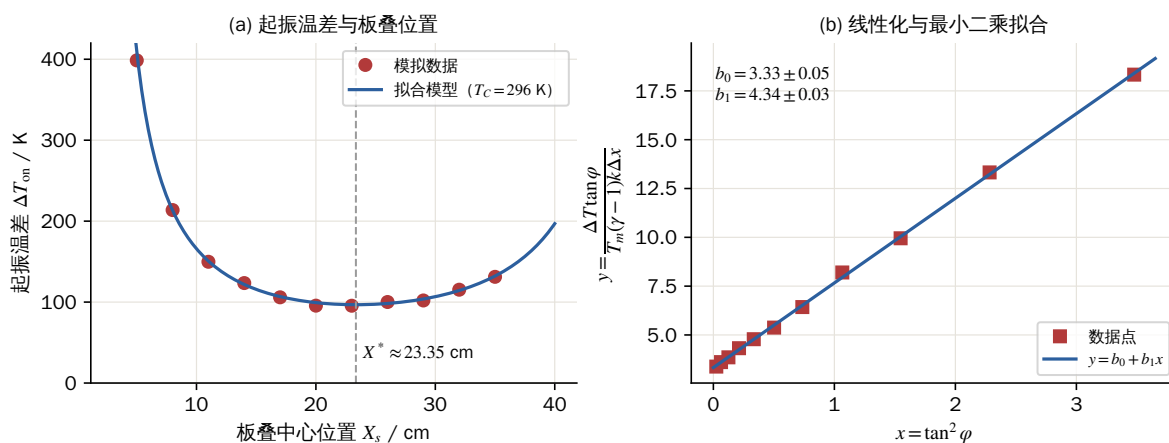
图 14 实验题的数据处理（模拟数据）。(a) 起振温差与板叠位置，曲线为拟合参数代回式 (5.16)；(b) 线性化 $y-x$ 及最小二乘直线。

表 3 线性化后的数据（解答用，对应第 (2) 问）

X_s / cm	φ	$\Delta T / \text{K}$	T_m / K	$x = \tan^2 \varphi$	y
5.0	0.1541	398.6	495.3	0.0241	3.380
8.0	0.2465	213.7	403.0	0.0633	3.609
11.0	0.3390	149.8	370.6	0.1243	3.854
14.0	0.4314	123.5	355.8	0.2119	4.322
17.0	0.5239	105.9	345.9	0.3338	4.782
20.0	0.6163	95.6	340.6	0.5018	5.377
23.0	0.7088	95.5	344.4	0.7351	6.428
26.0	0.8012	100.1	340.8	1.0654	8.199
29.0	0.8937	102.0	344.8	1.5473	9.951
32.0	0.9861	115.3	353.5	2.2828	13.324
35.0	1.0786	131.2	360.9	3.4776	18.332

解答

(1) $\bar{f} = 170.34 \text{ Hz}$ ，标准误差 0.12 Hz 。 $k = 2\pi\bar{f}/c_0 = 3.082 \text{ m}^{-1}$ ， $L_{\text{eff}} = c_0/(4\bar{f}) = 0.5097 \text{ m}$ ，与 $L + 0.61R_t = 0.5092 \text{ m}$ 相差 0.1% ，四分之一波长模型可用。

(2) 式 (5.16) 两边乘 $\tan \varphi / [(\gamma - 1)k\Delta x]$ 即得。计算结果见表 3。

(3) 由附录 C 的公式， $n = 11$ ：

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 0.9425, \quad \bar{y} = 7.4145, \quad S_{xx} = 12.031, \quad S_{xy} = 52.157, \\ b_1 &= S_{xy}/S_{xx} = 4.335, \quad b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 3.329, \\ s &= 0.115, \quad u(b_1) = s/\sqrt{S_{xx}} = 0.033, \quad u(b_0) = s\sqrt{1/n + \bar{x}^2/S_{xx}} = 0.047, \\ \text{cov}(b_0, b_1) &= -\bar{x}s^2/S_{xx} = -0.0010.\end{aligned}$$

拟合见图 14， $R^2 = 0.9995$ 。

(4) 由 $b_0 = 1 + B$ 、 $b_1 = a + B$ ：

$$\begin{aligned}B &= b_0 - 1 = 2.33 \pm 0.05, \\ a &= b_1 - b_0 + 1 = 2.007, \quad u(a) = \sqrt{u^2(b_1) + u^2(b_0) - 2\text{cov}(b_0, b_1)} = 0.073, \\ \sigma &= [(\gamma - 1)a]^2 = 0.644, \quad u(\sigma) = 2(\gamma - 1)^2 a u(a) = 0.047.\end{aligned}$$

与 0.707 相差 1.3 倍标准不确定度，大体相符。按例题 4 方法 ($\delta_\kappa = 0.205 \text{ mm}$)： $B_{\text{wall}} = 1.755$ ， $B_{\text{rad}} = 0.070$ ， $B_{\text{th}} = 1.83$ ，比拟合值小约 0.5 ：除管壁与辐射外，装置中还有可观的附加损耗。仅凭这组数据无法判断它来自哪里（换热器、板叠端部还是其他）；要找出来源，需更换不同 Δx 或 y_0 的板叠，看 B 如何标度（见 (6)）。

(5) $\tan \varphi^* = \sqrt{b_0/b_1} = 0.876$ ， $X^* = \arctan(0.876)/k = 23.35 \text{ cm}$ 。

(6) 系统误差：(i) 模型取 $T_m = (T_H + T_C)/2$ 、忽略物性随温度变化 ($\kappa \propto T^{1.7}$ 左右)，而 $X_s = 5 \text{ cm}$ 处温差近 400 K ，短板叠线性理论已不可靠——可剔除该点或加权；(ii) $y_0/\delta_\kappa \approx 2.4$ ，边界层近似偏粗；(iii) 热端与封闭端之间的热气体改变声速与模式， $\varphi = kX_s$ 有偏差；(iv) 起

振的判定存在迟滞（升温起振与降温停振温度不同），应取二者平均；(v) 不等精度： y 的误差随 y 增大，宜用加权最小二乘。改进：多次升降温测迟滞；用细热电偶测板叠内温度分布；测量模式频率随 X_s 的微小变化以修正 k ；换用不同 Δx 或 y_0 的板叠检验 B 的标度。

9 小结：推导链

1. **工具**：复振幅 + 时间平均式 (3.10) $\Rightarrow$ 每循环功 $W = \pi \operatorname{Im}(\hat{p}\hat{V}^*)$ (式 (3.11)) —— “压强超前体积才做功”。
2. **声学**：质量守恒 + 牛顿定律 + 绝热 $\Rightarrow$ 波动方程与 $c = \sqrt{\gamma p_m / \rho_m}$ ；驻波中 ξ_1 与 p_1 同相或反相（统一表述：气团朝最近的压力波腹运动时被压缩），行波中 u_1 与 p_1 同相；声功率 $\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{p}\hat{u}^*)$ 只由同相分量携带。
3. **热扩散**：周期边界解 $\Rightarrow \delta_\kappa = \sqrt{2\kappa/\omega}$ 划分“等温层”与“绝热区”； $\sigma \approx 1$ 使粘性层与之相当。
4. **斯特林**：理想回热使等容热量内部交换 $\Rightarrow \eta = \eta_C$ ；回热不完善 $\Rightarrow$ 式 (4.2)；Schmidt：质量守恒 $\Rightarrow \hat{p}$ (式 (4.5)) $\Rightarrow$ 等温腔吸热 = 功 $\Rightarrow W \propto \sin \alpha$ 、 $\eta = \eta_C$ (式 (4.6))。
5. **瑞利判据**： $dV/V = \delta q/(c_p T) - dp/(\gamma p) \Rightarrow W = \frac{\gamma-1}{\gamma p_m} \oint p_1 \delta Q$ (式 (5.2))。
6. **驻波热声**： T_{ad} 与 $\xi_1 \nabla T$ 比较 $\Rightarrow \nabla T_{crit} = (\gamma-1)T_m k \cot kX$ ；气团模型 $\Rightarrow$ 功 $\propto (\Gamma-1)\omega\tau/(1+\omega^2\tau^2)$ ， $\eta = \eta_C/\Gamma$ ；边界层理论给出同样结构的定量结果；能量平衡 $\Rightarrow$ 起振温差式 (5.16) 与最优位置。
7. **行波热声**：完美接触 + 行波相位 $\Rightarrow$ 斯特林循环；回热器中 $I \propto T_m \Rightarrow$ 能流分析（绝热区 $\dot{H} = \dot{W}$ ，回热器 $\dot{H} = 0$) $\Rightarrow \eta = \eta_C$ ；反用 $\Rightarrow$ 脉管制冷机 $\dot{Q}_C = \dot{W}_C$ ， $\operatorname{COP} = T_C/T_H$ 。

一句话：三种机器都在安排“高压时吸热”。斯特林机用活塞的相位差，驻波热声机用不完美热接触造成的传热滞后，行波热声机用行波本身的相位。

参考文献

- [1] Robert Stirling. Improvements for diminishing the consumption of fuel, and in particular an engine capable of being applied to the moving (of) machinery on a principle entirely new. English Letters Patent No. 4081 (1816); 全文重印于 The Engineer, 14 Dec 1917, p. 516, 1816. URL <http://hotairengines.org/closed-cycle-engine/stirling-1816>.
- [2] C. M. Hargreaves. *The Philips Stirling Engine*. Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [3] J. W. L. Köhler and C. O. Jonkers. Fundamentals of the gas refrigerating machine. *Philips Technical Review*, 16(3):69–78, 1954.
- [4] Marc A. Gibson, David I. Poston, Patrick McClure, Thomas J. Godfroy, Maxwell H. Briggs, and James L. Sanzi. The kilowatt reactor using stirling technology (KRUSTY) nuclear

- ground test results and lessons learned. Technical Report NASA/TM—2018-219941, NASA Glenn Research Center, 2018. URL <https://ntrs.nasa.gov/citations/20180007389>.
- [5] David I. Poston, Marc A. Gibson, Rene G. Sanchez, and Patrick R. McClure. Results of the KRUSTY nuclear system test. *Nuclear Technology*, 206(sup1):S89–S117, 2020. doi: 10.1080/00295450.2020.1730673.
- [6] Bryan Higgins. On the sound produced by a current of hydrogen gas passing through a tube. *Journal of Natural Philosophy, Chemistry and the Arts (Nicholson's Journal)*, 1:129–131, 1802. 据 Lawn & Penelet (2018) 的转引; 观察于 1777 年.
- [7] C. Sondhauss. Ueber die Schallschwingungen der Luft in erhitzten Glasröhren und in gedeckten Pfeifen von ungleicher Weite. *Annalen der Physik*, 155(1):1–34, 1850. doi: 10.1002/andp.18501550102.
- [8] P. L. Rijke. Notiz über eine neue Art, die in einer an beiden Enden offenen Röhre enthaltene Luft in Schwingungen zu versetzen. *Annalen der Physik*, 183(6):339–343, 1859. doi: 10.1002/andp.18591830616.
- [9] Lord Rayleigh. The explanation of certain acoustical phenomena. *Nature*, 18:319–321, 1878. doi: 10.1038/018319a0.
- [10] Lord Rayleigh. *The Theory of Sound*, volume II. Macmillan, London, 2nd edition, 1896. §322; Dover 1945 年重印.
- [11] K. W. Taconis, J. J. M. Beenakker, A. O. C. Nier, and L. T. Aldrich. Measurements concerning the vapour-liquid equilibrium of solutions of He^3 in He^4 below 2.19 K. *Physica*, 15(8–9):733–739, 1949. doi: 10.1016/0031-8914(49)90078-6.
- [12] Nikolaus Rott. Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 20:230–243, 1969. doi: 10.1007/BF01595562.
- [13] Nikolaus Rott. Thermoacoustics. *Advances in Applied Mechanics*, 20:135–175, 1980. doi: 10.1016/S0065-2156(08)70233-3.
- [14] Peter H. Ceperley. A pistonless Stirling engine—the traveling wave heat engine. *Journal of the Acoustical Society of America*, 66(5):1508–1513, 1979. doi: 10.1121/1.383505.
- [15] G. W. Swift. Thermoacoustic engines. *Journal of the Acoustical Society of America*, 84:1145–1180, 1988. doi: 10.1121/1.396617.
- [16] G. W. Swift. *Thermoacoustics: A Unifying Perspective for Some Engines and Refrigerators*. Springer / ASA Press, 2nd edition, 2017. doi: 10.1007/978-3-319-66933-5.
- [17] S. Backhaus and G. W. Swift. A thermoacoustic Stirling heat engine. *Nature*, 399:335–338, 1999. doi: 10.1038/20624.

- [18] G. W. Swift. Thermoacoustic engines and refrigerators (short-course notes). Technical Report LA-UR-99-895, Los Alamos National Laboratory, 1999.
- [19] S. Backhaus and G. W. Swift. A thermoacoustic-Stirling heat engine: Detailed study. *Journal of the Acoustical Society of America*, 107(6):3148–3166, 2000. doi: 10.1121/1.429343.
- [20] W. E. Gifford and R. C. Longworth. Pulse-tube refrigeration. *Journal of Engineering for Industry*, 86(3):264–268, 1964. doi: 10.1115/1.3670530.
- [21] E. I. Mikulin, A. A. Tarasov, and M. P. Shkrebyonock. Low-temperature expansion pulse tubes. *Advances in Cryogenic Engineering*, 29:629–637, 1984. doi: 10.1007/978-1-4613-9865-3_72.
- [22] Ray Radebaugh. Development of the pulse tube refrigerator as an efficient and reliable cryocooler. *Proceedings of the Institute of Refrigeration (London)*, 96:11–29, 2000. URL https://trc.nist.gov/cryogenics/Papers/Review/1999-Development_of_the_Pulse_Tube_Refrigerator.pdf.
- [23] Ray Radebaugh. Cryocoolers: the state of the art and recent developments. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 21:164219, 2009. doi: 10.1088/0953-8984/21/16/164219.
- [24] G. H. Rieke et al. The mid-infrared instrument for the james webb space telescope, I: Introduction. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 127, 584 (2015); arXiv:1508.02333, 2015. URL <https://arxiv.org/abs/1508.02333>.
- [25] NIST. Thermophysical properties of fluid systems (nist chemistry webbook, srd 69), 2024. URL <https://webbook.nist.gov/chemistry/fluid/>.
- [26] Harold Levine and Julian Schwinger. On the radiation of sound from an unflanged circular pipe. *Physical Review*, 73:383–406, 1948. doi: 10.1103/PhysRev.73.383.
- [27] Gustav Schmidt. Theorie der Lehmann’schen calorischen Maschine. *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, 15:1–12, 97–112, 1871.
- [28] Graham Walker. *Stirling Engines*. Clarendon Press, Oxford, 1980.

A 边界层热声学的推导

气体的能量方程。 跟随一个气体微团，式 (3.2) 给出 $c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = \dot{q}$ ，其中 $D/Dt = \partial/\partial t + u \partial/\partial x$ 是跟随微团的时间导数， $\rho \dot{q} = K \partial^2 T / \partial y^2$ 是单位体积由导热得到的热功率（式 (3.22) 的推导）。线性化： $T = T_m(x) + T_1(x, y, t)$ ， $DT/Dt \approx \partial T_1 / \partial t + u_1 \nabla T$ （ $u_1 \partial T_1 / \partial x$ 为二阶）， $Dp/Dt \approx \partial p_1 / \partial t$ 。写成复振幅：

$$\rho_m c_p (\mathrm{i} \omega \hat{T} + \hat{u} \nabla T) - \mathrm{i} \omega \hat{p} = K \frac{\mathrm{d}^2 \hat{T}}{\mathrm{d} y^2}. \quad (\text{A.1})$$

边界条件： $\hat{T}(0) = 0$ （板温不振荡）， $y \rightarrow \infty$ 有界。

解。 特解为常数 $\hat{T}_\infty$: $i\omega\hat{T}_\infty = i\omega\hat{p}/(\rho_m c_p) - \hat{u}\nabla T$, 即 $\hat{T}_\infty = T_{\text{ad}} - \hat{\xi}\nabla T$ (用 $\hat{u} = i\omega\hat{\xi}$)。齐次解与式 (3.23) 相同。满足边界条件的解为

$$\hat{T}(y) = (T_{\text{ad}} - \hat{\xi}\nabla T)(1 - e^{-(1+i)y/\delta_\kappa}). \quad (\text{A.2})$$

声功率。 由式 (5.2) 的推导, 单位体积气体每单位时间做功 $\frac{\gamma-1}{\gamma p_m} \langle p_1 \rho \dot{q} \rangle$ 。对 y 积分, $\int_0^\infty \rho \dot{q} dy = K[\partial T/\partial y]_0^\infty = -K \partial T/\partial y|_0 \equiv \dot{Q}_w$, 即板传给气体的热流 (单位板面积)。由式 (A.2), $\dot{Q}_w = -K(T_{\text{ad}} - \hat{\xi}\nabla T)(1+i)/\delta_\kappa$ 。对驻波 ($\hat{\xi} = \xi_1$ 、 $\hat{p} = P$ 为实数):

$$\dot{W}'' = \frac{\gamma-1}{\gamma p_m} \cdot \frac{1}{2} \text{Re}(P \hat{Q}_w^*) = \frac{\gamma-1}{2\gamma p_m} \cdot \frac{KP}{\delta_\kappa} (\xi_1 \nabla T - T_{\text{ad}}).$$

用 $K = \rho_m c_p \kappa = \rho_m c_p \omega \delta_\kappa^2/2$ 、 $\rho_m c_p T_{\text{ad}} = P$ 、 $\gamma p_m = \rho_m c^2$, 得 $\dot{W}'' = \frac{1}{4} \delta_\kappa (\gamma-1) \omega P^2 (\Gamma-1)/(\rho_m c^2)$, 即式 (5.11)。

能流。 单位板宽、沿 x 的总能流 $\dot{H}' = \int_0^\infty \frac{1}{2} \rho_m c_p \text{Re}(\hat{T} \hat{u}^*) dy$ 。式 (A.2) 中的常数部分 $(T_{\text{ad}} - \xi_1 \nabla T)$ 与 $\hat{u}^* = -i\omega \xi_1$ 相乘为纯虚数, 贡献为零 (所以积分到无穷远不发散); 剩下

$$\dot{H}' = \frac{1}{2} \rho_m c_p \text{Re} \left[- (T_{\text{ad}} - \xi_1 \nabla T) \frac{\delta_\kappa}{1+i} (-i\omega \xi_1) \right] = \frac{1}{2} \rho_m c_p \omega \xi_1 \delta_\kappa (T_{\text{ad}} - \xi_1 \nabla T) \text{Re} \frac{i}{1+i}.$$

$\text{Re}[i/(1+i)] = \text{Re}[i(1-i)/2] = \frac{1}{2}$, 于是 $\dot{H}' = \frac{1}{4} \delta_\kappa \omega \xi_1 P (1-\Gamma) = \frac{1}{4} \delta_\kappa |\hat{p}| |\hat{u}| (1-\Gamma)$, 即式 (5.12)。

粘性耗散。 速度剖面 $\hat{u} = U(1 - e^{-(1+i)y/\delta_\nu})$, 于是

$$\frac{d\hat{u}}{dy} = U \frac{1+i}{\delta_\nu} e^{-(1+i)y/\delta_\nu}, \quad \left| \frac{d\hat{u}}{dy} \right|^2 = \frac{2U^2}{\delta_\nu^2} \exp\left(-\frac{2y}{\delta_\nu}\right).$$

耗散功率的来源: 厚 dy 的薄层上下两面速度相差 $(\partial u/\partial y)dy$, 层间切应力 $\tau = \mu \partial u/\partial y$ 在这个速度差上做的功不转化为宏观动能, 全部变成热。因此单位体积的耗散功率为 $\tau \partial u/\partial y = \mu (\partial u/\partial y)^2$, 其时间平均为 $\mu \langle (\partial u/\partial y)^2 \rangle = \frac{1}{2} \mu |d\hat{u}/dy|^2$, 对 y 积分:

$$\int_0^\infty \frac{1}{2} \mu \frac{2U^2}{\delta_\nu^2} \exp\left(-\frac{2y}{\delta_\nu}\right) dy = \frac{\mu U^2}{2\delta_\nu}.$$

用 $\mu = \rho_m \nu = \rho_m \omega \delta_\nu^2/2$, 得 $\frac{1}{4} \rho_m \omega \delta_\nu U^2$, 即式 (5.13)。

以上各步均用 sympy 核对, 见 `verify_sympy.py`。

B 非线性 Schmidt 模型的精确解

由式 (4.4), 分母 $= S + \text{Re}[\hat{B}e^{i\omega t}]$, $\hat{B} = A_E e^{i\alpha}/T_H + A_C/T_C \equiv B e^{i\theta}$ 。记 $\psi = \omega t + \theta$, $\delta = B/S < 1$: $p = \frac{m R_s}{S(1 + \delta \cos \psi)}$ 。需要两个积分 (可用留数或查表, 数值核对见 `verify_sympy.py`):

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1 + \delta \cos \psi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \delta^2}}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos \psi d\psi}{1 + \delta \cos \psi} = \frac{2\pi}{\delta} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}}\right).$$

平均压强: $p_{\text{mean}} = \frac{mR_s}{S\sqrt{1-\delta^2}}$ 。**膨胀腔的功:** $dV_E = -A_E \sin(\psi - \theta + \alpha) d\psi$, $\sin(\psi + \beta) = \sin \psi \cos \beta + \cos \psi \sin \beta$ 中 $\sin \psi$ 项积分为零 (奇函数), 故

$$W_E = \frac{2\pi m R_s A_E}{S\delta} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} - 1 \right) \sin(\alpha - \theta), \quad (\text{B.1})$$

$$W_C = \frac{2\pi m R_s A_C}{S\delta} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} - 1 \right) \sin(-\theta). \quad (\text{B.2})$$

由 $B \sin \theta = A_E \sin \alpha / T_H$ 、 $B \sin(\alpha - \theta) = A_C \sin \alpha / T_C$ (取 $\hat{B}e^{-i\theta}$ 与 $\hat{B}^*e^{i\alpha}$ 的虚部), 得 $W_C/W_E = -T_C/T_H$: 有限振幅下效率仍严格等于卡诺效率。小 δ 时 $\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} - 1 \approx \frac{\delta^2}{2}$, 式 (B.1) 回到线性结果式 (4.6), 修正为 $\mathcal{O}(\delta^2)$ 。例题 2 参数下, 数值积分与闭式解相对差 $< 10^{-6}$; 在固定充气质量时最优相位 88.3° , 固定平均压强时 89.5° 。

C 最小二乘直线拟合

对数据 (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, 拟合 $y = b_0 + b_1 x$, 使残差平方和最小。记 $\bar{x}, \bar{y}$ 为平均值, $S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2$, $S_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ 。令残差平方和对 b_0, b_1 的偏导为零, 得

$$b_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}. \quad (\text{C.1})$$

残差标准差 $s = \sqrt{\sum (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 / (n - 2)}$ (两个参数用掉两个自由度)。参数的标准不确定度与协方差:

$$u(b_1) = \frac{s}{\sqrt{S_{xx}}}, \quad u(b_0) = s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}}, \quad \text{cov}(b_0, b_1) = -\frac{\bar{x} s^2}{S_{xx}}. \quad (\text{C.2})$$

对 $g = b_1 - b_0$ 这样同时依赖两个参数的量, $u^2(g) = u^2(b_1) + u^2(b_0) - 2 \text{cov}(b_0, b_1)$: $\bar{x} > 0$ 时两参数负相关 (直线绕数据重心转动时, 斜率增大则截距减小), 差值的不确定度因而增大。

D 名词解释

- **回热器** (regenerator): 时间上交替地与热、冷气流换热的多孔填料, 暂存热量; 区别于两股流体同时流过的换热器 (recuperator)。
- **回热有效度** (effectiveness) ε : 实际与理想回热量之比。
- **NTU** (number of transfer units): $UA/(\dot{m}c_p)$, 换热器的无量纲规模。
- **Schmidt 分析**: 等温腔、理想回热、均匀压强、正弦体积变化的斯特林机模型。
- **死区** (dead volume): 不被活塞扫过的气体容积。
- **拉格朗日位移** (displacement) ξ : 气团相对平衡位置的位移。
- **声强** (acoustic intensity): 时间平均声能流密度 $\langle p_1 u_1 \rangle$ 。
- **声阻抗** (acoustic impedance): $\hat{p}/\hat{u}$; 行波为 $\rho_m c$ 。

- **热穿透深度** (thermal penetration depth) δ_κ : 一个周期内热扩散的特征距离。
- **普朗特数** (Prandtl number) σ : 动量扩散率与热扩散率之比。
- **板叠** (stack): 驻波热声机中间距为几个 δ_κ 的平行板或蜂窝。
- **临界温度梯度** (critical temperature gradient): 板叠中热泵与发动机的分界梯度。
- **瑞利判据** (Rayleigh criterion): 高压时加热、低压时放热则振动增强。
- **热缓冲管** (thermal buffer tube): 行波机中隔开热端与室温部件的绝热管段。
- **惯性与柔度** (inertance, compliance): 细管的气体惯性 $\rho_m \Delta x / A$ 与腔体的气体可压缩性 $V / (\gamma p_m)$, 对应电路中的电感与电容。
- **脉管** (pulse tube): 脉管制冷机中起“气体活塞”作用的绝热空管。
- **焓流** (enthalpy flux) $\dot{H}$: 气体流动携带的总能流 (内能 + 推动功)。