

比风更快：帆船、冰帆船、Blackbird 与 Betz 极限

第 43 届决赛短训讲义组

2026 年 10 月

目录

1 导读	2
2 名词与符号	5
3 前置模块	6
3.1 伽利略变换、真风与视风	6
3.2 功率依赖参考系	7
3.2.1 柯尼希定理与“相对运动的能量”	9
3.3 升力、阻力、升阻比与阻力角	9
3.4 稳态流动的控制体动量定理	12
3.5 伯努利方程及其适用条件	12
4 帆船：航向定理与速度极图	13
4.1 理想化模型	13
4.2 航向定理	14
4.3 速度三角形与速度比	15
4.4 迎风与顺风的最优策略：VMG	17
4.5 能量从哪里来：帆船的两系功率账本	18
5 冰帆船与陆地帆船：水动阻力角趋于零	18
5.1 滑刀的“水动力”阻力角	18
5.2 自洽模型	18
5.3 现实限制	21
6 致动盘动量理论：风力机与螺旋桨	22
6.1 模型与假设	22

1 导读	2
6.2 质量、动量与能量	22
6.3 Betz 极限	24
6.4 螺旋桨：Froude 推进效率	26
6.5 把机翼当作致动盘：诱导阻力的来源	27
7 顺风比风快：Blackbird	28
7.1 悖论	28
7.2 模型	28
7.3 力与功率平衡	29
7.4 两个参考系的功率账本	29
7.5 致动盘螺旋桨的理想极限	32
7.6 迎风车与对称性	33
8 决赛风格例题	34
9 实验与数据处理：翼帆风洞数据	40
10 小结：推导链	43
11 名词解释	44
A 致动盘问题中动量定理的严格使用	48
B Froude 定理的另一视角：涡柱与螺线管	49
C 最小二乘直线拟合与不确定度	49
D Blackbird 致动盘模型的求解与最大车速	50

1 导读

一阵 5 m/s 的风，能不能让一个没有发动机、没有电池的装置跑到 14 m/s ？而且是正顺着风跑？多数人的第一反应是“不可能”：车速一旦等于风速，车上就感觉不到风了，哪来的推力？这一讲要说明：这个直觉错在把“风”当成了唯一的能源和唯一的参照物。真正可利用的“资源”是**两种介质之间的相对运动**——空气相对于水、冰或地面的运动。只要机器同时“抓住”两种介质，它就像一台在两者之间工作的变速器，速度可以远超风速；限制它的不是能量守恒，而是**耗散**，具体说就是各部件的阻力角或效率。

背景：四个真实的故事

美洲杯与水翼帆船。1851年8月22日，美国纵帆船 *America* 在环英国怀特岛的比赛中击败英国船队，赢得后来以它命名的奖杯，这就是美洲杯帆船赛的起源 [1]。170年后，第36届（2021，奥克兰）起使用的 AC75 级单体帆船靠水翼把船体完全托离水面 [2]；2024 年第 37 届（巴塞罗那）由新西兰酋长队以 7:2 击败英国 INEOS 队夺冠 [3]。AC75 的最高航速已超过 55 节（约 28 m/s）[2]，迎风航行时约 40 节、而真风只有约 17 节，船速约为风速的 2.35 倍 [4]。

冰帆船。冰面上的 DN 级冰帆船长 12 英尺（约 3.7 m）、滑刀横梁宽约 8 英尺 [5]，级别规格的帆面积为 60 平方英尺（约 5.6 m²），艇重 100–150 磅 [6]（Dill 文中给出的帆面积为 67 平方英尺 [5]，本讲按级别规格计算）。Dill 用雷达测速枪与 GPS 记录了数百场比赛：在一场 10 mph（约 4.5 m/s）风中的 DN 比赛里，船迎风航段速度约 30 mph、顺风航段约 40 mph；更大的 Skeeter 级中的 Bubble Boat 型，在非常稳定的轻风、平滑温暖的咸水冰面上，船速可达风速的 8–10 倍 [5]。常被引用的“1938 年冰帆船 143 英里/时”只是缺乏可靠测量支持的说法，Dill 指出凡是科学可靠的测量给出的值都低得多 [5]，本讲不采用。陆地帆船方面，Greenbird 于 2009 年 3 月在美国 Ivanpah 干湖、30 mph 至近 40 mph 的风中创下 126.2 mph（约 203 km/h）[7]；新西兰酋长队的 Horonuku 于 2022 年 12 月 11 日在澳大利亚 Gairdner 湖跑出约 222.4 km/h，当时风速约 22 节 [8]。

Blackbird。2010 年 7 月 2 日，Rick Cavallaro 驾驶 Thin Air Designs 团队（与 John Borton 合作）制造的螺旋桨车 Blackbird，在加州 El Mirage 干湖上正顺风以 27.7 mph 的 10 秒平均速度行驶，而风速为 10.0 mph，北美陆帆协会（NALSA）观察员确认达到风速的 2.8 倍 [9]。2012 年 6 月 16 日，同一辆车改装为“风力机驱动车轮”的模式，在 9.9 mph 风中正迎风行驶达到风速的 2.1 倍 [10]。这个想法并不新：Bauer 早在 1969 年就造过一辆顺风比风快的小车并发表了分析 [11]；MIT 的 Drela 在 2009 年给出了简明的理论分析 [12]。2021 年，科普频道 Veritasium 的 Derek Muller 发布了驾驶 Blackbird 的视频 [13]，UCLA 物理学家 Alexander Kusenko 与他打赌 1 万美元认为其解释错误；见证人为 Bill Nye、Neil deGrasse Tyson 与 Sean Carroll [14]；最终 Kusenko 认输付款 [15, 16]。

Betz 极限。1920 年，德国哥廷根的 Albert Betz 证明：一个风力机最多只能取走流过其扫掠面积的风动能通量的 $16/27 \approx 59.3\%$ [17, 18]。这个极限的命名有争议：Bergey（1979）主张也应归功于英国的 Lanchester（1915）[19, 20]；van Kuik（2007）指出俄国的 Joukowski 在 1920 年独立得到了同一结果 [21, 22]；Okulov 与 van Kuik（2012）进一步考证认为 Lanchester 并未真正得到该极限，恰当的名称是 Betz–Joukowski 极限 [23]。本讲沿用最常见的叫法“Betz 极限”。现代大型风机的功率系数约为 0.48–0.49：美国国家可再生能源实验室（NREL）的 5 MW 参考风机的峰值为 0.482（叶尖速比 7.55）[24]；IEA 15 MW 参考风机的设计点为 0.489（叶尖速比 9.0，报告指出真正的最优点略高、在叶尖速比约 8.5 处）[25]。

这四个故事背后是同一套物理。本讲的主线是：

1. **参考系与功率：**同一个力在不同惯性系中的功率不同；“能量从哪里来”的回答依赖参考系，而耗散与“总外力为零时的总功率”不依赖参考系。
2. **升力不耗能：**升力垂直于相对来流，在流体静止系中不做功；只有阻力消耗能量。于是“传递一个力需要付出多少功率”由阻力角决定。

3. **动量定理 + 伯努利方程**：用控制体处理流体，得到致动盘（风力机、螺旋桨）的理想性能：Betz 极限与 Froude 推进效率。
4. **把以上三点组合**：帆船的航向定理与速度极图，冰帆船为什么能跑到风速的数倍，Blackbird 为什么能顺风比风快、风力机车为什么能逆风比风快。

学习目标 学完本讲，你应能：(1) 熟练画出真风-视风-船速矢量三角形并用正弦定理计算；(2) 推导航向定理 $\beta = \varepsilon_A + \varepsilon_H$ ，由它得到速度极图与最佳迎风角；(3) 在两个参考系中分别写出功率账本，并判断哪些量与参考系无关；(4) 用控制体动量定理与伯努利方程推导 Betz 极限和 Froude 效率，说清每一步的适用条件；(5) 推导 Blackbird 的 $V/W = 1/(1 - \eta)$ 与迎风车的 $V/W = \eta/(1 - \eta)$ ，并加入阻力修正；(6) 处理风洞数据：线性化、最小二乘、不确定度传递。

前置知识 牛顿定律与动能定理、矢量运算、正弦与余弦定理、圆周角定理、一元函数求极值、泰勒展开到一阶、柯尼希定理（质心系分解动能，第 3.2.1 节会复习）。流体力学只需要“流线”“压强”这类普通物理概念，其余在第 3 节补齐。

建议学时 2 学时。第 1 学时：第 3-5 节（前置模块、帆船、冰帆船）；第 2 学时：第 6-7 节（致动盘、Blackbird）与一道例题。其余例题与实验题供课后练习。

2 名词与符号

表 1 本讲主要符号（矢量用粗体或带箭头；不加粗的同一字母表示其大小。 W 专指风速，功率单位一律写作“瓦”或 kW 等，以免混淆）

符号	含义	单位
$\mathbf{V}_T, V_T$	真风：空气相对水（冰、地面）的速度	m/s
$\mathbf{V}_s, V_s$	船速：船相对水的速度（方向即航向）	m/s
$\mathbf{V}_A, V_A$	视风：空气相对船的速度， $\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_T - \mathbf{V}_s$	m/s
γ	真风角：航向与真风来向的夹角	rad 或 ($^\circ$)
β	视风角：航向与视风来向的夹角	rad 或 ($^\circ$)
L_A, D_A	气动升力、阻力（相对视风定义）	N
L_H, D_H	水动力（冰面力）的侧向分量与阻力（相对航向定义）	N
$\varepsilon_A, \varepsilon_H$	气动阻力角、水动阻力角， $\tan \varepsilon = D/L$	rad
C_L, C_D	升力系数、阻力系数	1
$q = \frac{1}{2}\rho V^2$	动压	Pa
S	参考面积（帆面积、翼面积）	m ²
VMG	沿真风方向的速度分量（velocity made good）	m/s
μ	冰帆船滑刀的摩擦系数	1
Π	冰帆船无量纲摩擦参数，式 (5.3)	1
ρ	空气密度（本讲取 1.2 kg/m ³ ）	kg/m ³
$\dot{m}$	质量流量	kg/s
U, u_d, u_w	致动盘：远前方、盘处、远尾流的流速（相对盘）	m/s
a	风力机轴向诱导因子， $u_d = U(1 - a)$	1
w	螺旋桨在盘处产生的附加速度（诱导速度）	m/s
T	螺旋桨推力（风力机时为风对盘的推力）	N
C_P, C_T	功率系数、推力系数	1
η_F	螺旋桨 Froude 理想推进效率	1
W	风速（空气相对地面），Blackbird 一节专用	m/s
V	车速（相对地面）	m/s
$u = V - W$	顺风车相对空气的速度	m/s
F_w	地面通过车轮作用于车的制动力（Blackbird）	N
P_s	传到螺旋桨的轴功率	W
η_w, η_p, η	车轮-传动效率、螺旋桨效率、总效率 $\eta = \eta_w \eta_p$	1
D	车体阻力（空气阻力与滚动阻力之和）	N
σ	迎风车车体阻力面积与风轮面积之比， $\sigma = C_D S_b / A$	1

表 2 补充符号（翼型、冰帆船、例题与附录中用到的量）

符号	含义	单位
C_R	合力系数 $\sqrt{C_L^2 + C_D^2}$	1
C_{D0}, k	抛物线极曲线 $C_D = C_{D0} + kC_L^2$ 的型阻系数与诱导阻力因子	1
$C_L^*, \varepsilon_{\min}$	升阻比最大处的升力系数、最小阻力角	1, rad
$C_{L\alpha}, \alpha_0$	有限翼展、二维翼的升力线斜率 $dC_L/d\alpha$	rad^{-1}
b, ℓ, AR	翼展、弦长、展弦比 b^2/S	m, m, 1
e	展向效率因子 / Oswald 因子	1
Re, Ma	雷诺数、马赫数	1
m, B	冰帆船（含人）质量、滑刀横梁宽	kg, m
$\mathcal{V}$	静水中迎风最优 VMG 与真风速之比（例题 1）	1
$\mathbf{c}, V_g, \theta$	潮流速度、地面风速、水系真风来向偏角（例题 1）	m/s, m/s, rad
$\bar{v}_N, \phi, \xi$	例题 1：对地向北的平均速度、时间比例、公切线参数	m/s, 1, m/s
κ	螺旋桨诱导速度比 w/u	1
λ	叶尖速比 $\Omega R/U$	1
η_t, η_b, η'	风轮取能效率 $P_t/(D_t u)$ 、叶片效率、 $\eta_w \eta_b$	1
F_{rr}, D_a	滚动阻力、车体气动阻力 ($D = D_a + F_{rr}$)	N
D_t, D_b	迎风车风轮阻力、车体阻力	N
Γ'	涡柱单位长度环量（附录 B）	m/s

角度约定 航海上称呼风向用“风从哪里来”。本讲把航向（船速方向）作为参考方向：真风角 γ 是航向与真风来向的夹角， $\gamma = 0$ 为正迎风， $\gamma = \pi$ 为正顺风；视风角 β 是航向与视风来向的夹角。由于左右对称，只讨论风从左舷来的情形， $0 < \beta < \gamma \leq \pi$ 。

3 前置模块

3.1 伽利略变换、真风与视风

定义：伽利略变换

设惯性系 S' 相对惯性系 S 以恒定速度 $\mathbf{u}_0$ 平动。同一质点在两系中的速度满足

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}_0. \quad (3.1)$$

两边对时间求导，因 $\mathbf{u}_0$ 为常量，加速度相同 $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ ；在牛顿力学中力只依赖于相对位置和相对速度，也相同 $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$ 。所以牛顿第二定律在两系中形式一样。但速度、动量、动能和功率都依赖参考系。

把式 (3.1) 用到帆船上。取 S 为水静止的参考系（“水系”）， S' 为随船平动的参考系（只要船匀速直线航行，它就是惯性系）。空气在水系中的速度叫**真风** $\mathbf{V}_T$ ；在船系中的速度叫**视风** $\mathbf{V}_A$ ，即船上风向标指示的风。由式 (3.1)， $\mathbf{u}_0 = \mathbf{V}_s$ ：

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_T - \mathbf{V}_s. \quad (3.2)$$

推导：视风的大小与方向

取航向为 x 轴，风从左舷（ $+y$ 一侧）吹来。“真风来向与航向成 γ ”意味着空气的运动方向与来向相反：

$$\mathbf{V}_T = -V_T(\cos \gamma, \sin \gamma), \quad \mathbf{V}_s = (V_s, 0).$$

代入式 (3.2)，逐分量相减：

$$\mathbf{V}_A = -(V_T \cos \gamma + V_s, V_T \sin \gamma).$$

视风“来向”的方向角就是 $-\mathbf{V}_A$ 的方向角，于是

$$V_A^2 = V_T^2 + V_s^2 + 2V_TV_s \cos \gamma, \quad (3.3)$$

$$\tan \beta = \frac{V_T \sin \gamma}{V_T \cos \gamma + V_s}. \quad (3.4)$$

检验

- 正迎风 $\gamma = 0$: $V_A = V_T + V_s$, $\beta = 0$, 符合“迎着风走，风更大”。
- 正顺风 $\gamma = \pi$: $V_A = |V_s - V_T|$, 船速等于风速时视风为零。
- $V_s \rightarrow 0$: $V_A \rightarrow V_T$, $\beta \rightarrow \gamma$ 。
- 由式 (3.4)，只要 $V_s > 0$ 就有 $\beta < \gamma$: **船越快，视风越“偏向船头”**。这正是快船总在“迎着视风”航行的原因。

3.2 功率依赖参考系

这一节是全讲的关键。Blackbird 之争本质上是一场“在哪个参考系里记账”的争论。

定义：功率

力 $\mathbf{F}$ 作用在物体的某个物质点上，该点（在所选参考系中）的速度为 $\mathbf{v}_p$ ，则此力的功率为 $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_p$ 。注意是受力点的速度，不一定是物体质心的速度。例：车轮纯滚动时，接触点瞬时静止，地面对轮的静摩擦力在地面系中功率为零，尽管车在运动。

推导：功率的参考系变换

同一个力在两系中相同，受力点速度满足式 (3.1)，故

$$P' = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}_p - \mathbf{u}_0) = P - \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0. \quad (3.5)$$

这说明一个力“做正功还是负功”可以随参考系改变。那么动能定理还成立吗？对单个质点， $K' = \frac{1}{2}m(\mathbf{v} - \mathbf{u}_0)^2$ ，对时间求导（ $\mathbf{u}_0$ 为常量）：

$$\frac{dK'}{dt} = m(\mathbf{v} - \mathbf{u}_0) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{合}} \cdot \mathbf{v}'. \quad (3.6)$$

所以**动能定理在每个惯性系中各自成立**，只是两边的数值都随参考系改变。展开 K' 可以看到两者如何协调： $K' = K - \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_0 + \frac{1}{2}mu_0^2$ ，求导得 $\frac{dK'}{dt} = \frac{dK}{dt} - \mathbf{u}_0 \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ ，与式 (3.5) 对合力求和的结果一致。

对多物体系统，有两条与参考系无关的结论，它们是后面一切“记账”的基础。

推导：两条与参考系无关的结论

(i) **内力的总功率与参考系无关。** 物体 i 对 j 的力 $\mathbf{F}_{ij}$ 与 j 对 i 的力 $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ 成对出现。设两者受力点速度分别为 $\mathbf{v}_j$ 、 $\mathbf{v}_i$ ，这一对力的总功率为

$$\mathbf{F}_{ij} \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{u}_0) + \mathbf{F}_{ji} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_0) = \mathbf{F}_{ij} \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i),$$

$\mathbf{u}_0$ 抵消了，只剩受力点的相对速度。记所有内力对的总功率为 $P_{\text{内}}$ ，它与参考系无关。对摩擦、黏性这类耗散性内力， $P_{\text{内}} < 0$ （例如滑动摩擦一对力的总功率为 $-f v_{\text{相对}}$ ），机械能以 $-P_{\text{内}}$ 的速率变成热：

$$P_{\text{耗散}} = -P_{\text{内}} = - \sum_{\text{内力对}} \mathbf{F}_{ij} \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \geq 0 \quad (\text{与参考系无关}). \quad (3.7)$$

(ii) **稳态下外力总功率与参考系无关。** 把式 (3.5) 对作用在系统上的所有外力求和： $\sum P'_{\text{外}} = \sum P_{\text{外}} - (\sum \mathbf{F}_{\text{外}}) \cdot \mathbf{u}_0$ 。匀速运动（稳态）的系统所受外力之和为零，于是

$$\sum \mathbf{F}_{\text{外}} = 0 \implies \sum P'_{\text{外}} = \sum P_{\text{外}}. \quad (3.8)$$

各个外力的功率可以随参考系大变，但总和不变。稳态下系统的动能与内能都不变，由动能定理 $\sum P_{\text{外}} + P_{\text{内}} = 0$ ，故 $\sum P_{\text{外}} = -P_{\text{内}} = P_{\text{耗散}}$ ：外力总功率就等于系统内部的耗散。

例题：热身：传送带上被绳拴住的木块

水平传送带以速度 v_b 向右运动。木块放在带上，用水平绳拴在地面的墙上而保持静止，带与木块之间的滑动摩擦力大小为 f 。分别在地面系和传送带系中写出每个力的功率，并求生热功率。

解答

木块相对带向左滑，所受摩擦力向右（大小 f ），绳拉力向左（大小 f ），带受木块的摩擦力向左。

地面系：木块静止，作用在木块上的摩擦力与拉力功率都为零；带上受力点速度 v_b ，木块对带的摩擦力功率为 $-fv_b$ （电机必须补充 fv_b ）。

传送带系：木块以 v_b 向左运动。摩擦力（向右）对木块功率 $-fv_b$ ；绳的另一端拴在墙上，墙在此系中以 v_b 向左运动，拉力（向左）对木块功率 $+fv_b$ ；带静止，木块对带的摩擦力功率为零。

两系中木块所受各力功率之和都是零（动能不变），摩擦这一对内力的总功率都是 $-fv_b$ ，即生热 fv_b ，与式 (3.7) 一致。注意：在传送带系中是“墙通过绳子”在做正功。后面 Blackbird 在空气系中“地面通过车轮做正功”，道理完全一样。

3.2.1 柯尼希定理与“相对运动的能量”

前置知识：柯尼希定理

质点系的总动能可分解为 $K = \frac{1}{2}Mv_c^2 + K_{\text{内}}$ ，其中 v_c 是质心速度， $K_{\text{内}}$ 是质心系中的动能。 $K_{\text{内}}$ 只由相对质心的速度决定，因而与参考系无关；而质心动能 $\frac{1}{2}Mv_c^2$ 随参考系变化。由 $\mathbf{p} = M\mathbf{v}_c$ ，有 $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Mv_c^2) = \mathbf{v}_c \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ 。

推导：两介质之间的“能量释放”

设想一台机器（帆船、Blackbird）稳态地工作在两大块介质之间：介质 1（空气）质心速度 $\mathbf{v}_1$ ，介质 2（水、冰或大地）质心速度 $\mathbf{v}_2$ 。介质 1 对机器的合力（水平分量，下同；竖直方向的重力与支持力、浮力自相平衡）为 $\mathbf{F}$ ；机器匀速，故介质 2 对机器的合力为 $-\mathbf{F}$ 。由牛顿第三定律，机器对介质 1 的力为 $-\mathbf{F}$ ，对介质 2 的力为 $+\mathbf{F}$ ，所以

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = +\mathbf{F}.$$

机器像一根“管道”，把动量从介质 1 输送给介质 2。两介质质心动能的变化率（柯尼希定理）之和为

$$\frac{d}{dt}(K_{1,c} + K_{2,c}) = \mathbf{v}_1 \cdot (-\mathbf{F}) + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{F} = -\mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

整个孤立系统（两介质 + 机器）的总能量守恒，机器自身储能不变，所以减少的质心动能全部变成了“内部”能量（介质中的尾流动能、热以及机器内部的发热）：

$$P_{\text{释放}} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = (\text{机器} + \text{介质中的}) \text{总耗散功率}. \quad (3.9)$$

右边只含相对速度 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ ，与参考系无关。介质质量极大时， $\mathbf{v}_1$ 、 $\mathbf{v}_2$ 就是两介质远处的速度。

要点：参考系与能量

- “谁对谁做功”“能量从哪里来”是参考系依赖的问题，不同参考系给出不同而同样正确的答案。
- 与参考系无关的是：耗散功率（式 (3.7)）、稳态下外力总功率（式 (3.8)）、以及两介质之间释放的功率 $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ （式 (3.9)）。
- 风能装置真正利用的是两介质的相对速度；它在两者之间传递动量，每传递单位动量释放的能量正比于相对速度。

3.3 升力、阻力、升阻比与阻力角

定义：来流、升力与阻力

物体（帆、龙骨、机翼）远前方的流体相对物体的速度 $\mathbf{V}$ 称为**来流**。流体对物体的合力 $\mathbf{F}$ 分解为：平行于 $\mathbf{V}$ 的分量 D （**阻力**）和垂直于 $\mathbf{V}$ 的分量 L （**升力**）。“升力”只是“垂直于来流”的意思，帆上的升力是水平的。对帆而言来流是视风 $\mathbf{V}_A$ ；对龙骨而言来流是水相对船的速度 $-\mathbf{V}_s$ 。

定义：力系数

用动压 $q = \frac{1}{2}\rho V^2$ 和参考面积 S 把力无量纲化：

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}, \quad C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}. \quad (3.10)$$

为什么用这种组合？力只能依赖于 ρ 、 V 、物体尺度 ℓ 、流体黏度 ν 和形状与攻角 α （翼弦即翼剖面从前缘到后缘的连线，攻角是翼弦与来流的夹角）。由 ρ 、 V 、 ℓ 能组成的唯一一个力量纲组合是 $\rho V^2 \ell^2$ ，剩下的只能是无量纲数 α 与雷诺数 $Re = V\ell/\nu$ （惯性力与黏性力之比）的函数，所以 $L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L(\alpha, Re)$ 。帆和龙骨的 Re 都在 10^5 – 10^7 ，此时系数随 Re 变化很慢；对给定形状， C_L 与 C_D 主要由攻角决定。

定义：升阻比与阻力角

升阻比 $L/D = C_L/C_D$ ；**阻力角** ε 定义为合力偏离升力方向（向下游）的角度：

$$\tan \varepsilon = \frac{D}{L} = \frac{C_D}{C_L}, \quad L = F \cos \varepsilon, \quad D = F \sin \varepsilon. \quad (3.11)$$

要点：升力不耗能

取远处流体静止的参考系，物体在其中以速度 $-\mathbf{V}$ 运动。流体对物体的力的功率为 $\mathbf{F} \cdot (-\mathbf{V}) = -DV$ ：升力垂直于 $\mathbf{V}$ ，不做功；阻力做负功，物体把功率 DV 交给流体（变成尾流动能，最终成为热）。因此在流体中维持一个大小为 F 的力，代价是耗散功率 $F \sin \varepsilon \cdot V$ ；对给定的翼，代价的最小值对应最小阻力角 $\varepsilon_{\min}$ （见下文）。阻力角越小，传递力就越“便宜”。这是本讲所有速度比结论的根源。

升力从哪来？ 翼面使来流偏转，把一部分动量交给流体（下一节的动量定理会把这句话变成公式）；翼对流体施力，流体就对翼施加反作用力。先约定几何量：**翼展** b 是翼从一端到另一端的长度，翼面积为 S ，**展弦比** $AR = b^2/S$ （矩形翼即展长与弦长之比）；“二维翼”指展长无限长的翼，它的升力线斜率记为 $a_0 \equiv dC_L/d\alpha$ 。薄翼的经典理论给出 $a_0 \approx 2\pi$ （ α 用弧度），实际翼型因厚度与边界层黏性的影响略小，约为 2π 的 0.9 倍 [26]。

翼展有限时，翼下表面压强高、上表面压强低，翼尖处流体从下绕到上，在翼尖后方拖出两股旋涡（**尾随涡**）；它们使翼附近的空气获得向下的速度，叫**下洗**。下洗有两个后果 [26]：翼“感到”的来流方向被压低，有效攻角减小，于是升力线斜率降低为

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{a_0}{1 + a_0/(\pi e AR)}; \quad (3.12)$$

同时翼不断把向下的动量交给空气，尾流带走动能，出现一项与升力平方成正比的**诱导阻力**。于是在失速前，阻力系数常写成“抛物线极曲线”：

$$C_D = C_{D0} + kC_L^2, \quad k = \frac{1}{\pi e AR}. \quad (3.13)$$

C_{D0} 是与升力无关的“型阻”（表面摩擦与压差阻力）。 $e \leq 1$ 是反映展向载荷分布的效率因子：式 (3.12) 中的 e 来自 Prandtl 升力线理论，载荷沿翼展呈椭圆分布时 $e = 1$ ；式 (3.13) 中的 e 称为 Oswald 因子，它还吸收了型阻随 C_L 的变化，一般比前者略小。 $e = 1$ 的情形，在接受升力线

理论的一条结论（机翼影响的有效流管截面是以翼展为直径的圆）之后，可以用本讲的动量与能量工具推出：第 6.5 节把机翼当作一个“推空气向下”的致动盘，同时得到式 (3.12) 与 (3.13)。在此之前，我们先把 C_{D0} 、 k 当作由实验测定的参数（第 9 节的实验题就做这件事）。攻角过大时，翼背面气流分离，升力不再增加而阻力急增，称为**失速**。

定义：极曲线

以 C_D 为横轴、 C_L 为纵轴，把不同攻角下的 (C_D, C_L) 连成曲线，称为极曲线（drag polar）。曲线上一点与原点的连线和纵轴的夹角恰为该攻角下的阻力角 ε （因为 $\tan \varepsilon = C_D/C_L$ ）。

推导：最小阻力角：从原点作切线

在极曲线上找 ε 最小的点，就是找从原点出发、与纵轴夹角最小、又与曲线有公共点的射线——即从原点所作的**切线**，切点处 L/D 最大。对抛物线极曲线 (3.13)，求 $L/D = C_L/(C_{D0} + kC_L^2)$ 的极大：

$$\frac{d}{dC_L} \left(\frac{C_L}{C_{D0} + kC_L^2} \right) = \frac{C_{D0} - kC_L^2}{(C_{D0} + kC_L^2)^2} = 0 \implies C_L^* = \sqrt{C_{D0}/k}.$$

代回，切点处 $C_D = 2C_{D0}$ （型阻与诱导阻力相等），于是

$$\left(\frac{L}{D} \right)_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{C_{D0}k}}, \quad \tan \varepsilon_{\min} = 2\sqrt{C_{D0}k}. \quad (3.14)$$

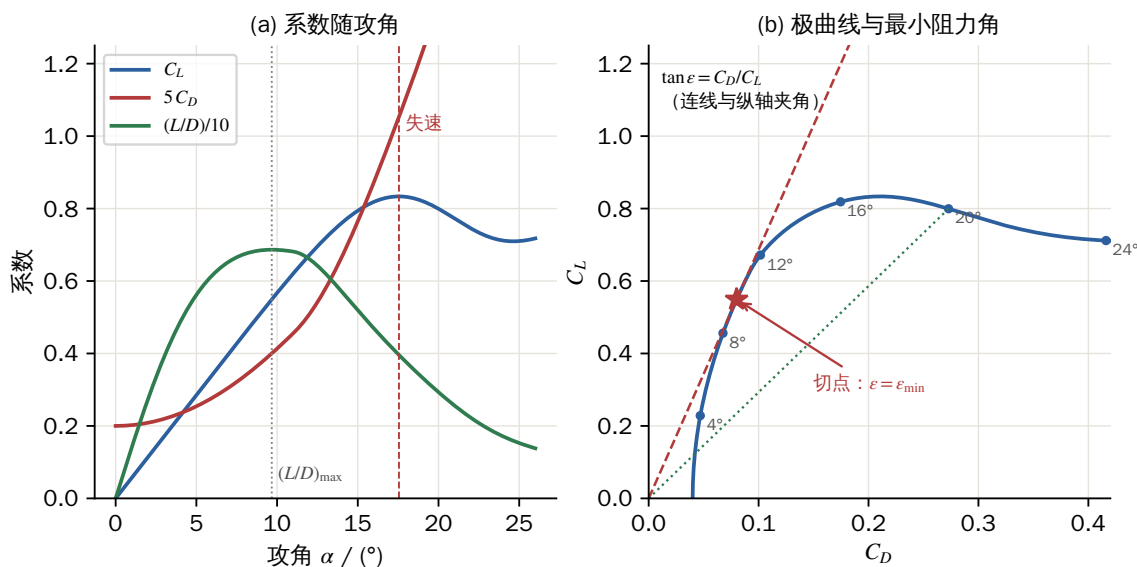


图 1 一个展弦比 3 的翼帆模型 ($C_{D0} = 0.04$, $e = 0.8$, 失速攻角约 17°)。 (a) 系数随攻角； (b) 极曲线：从原点所作切线的切点给出最小阻力角，此例 $(L/D)_{\max} = 6.86$, $\varepsilon_{\min} = 8.3^\circ$ （脚本 `fig_dragpolar.py` 中与式 (3.14) 核对）。

检验

量纲： C_{D0} 、 k 均无量纲。极限： $C_{D0} \rightarrow 0$ 时 $\varepsilon_{\min} \rightarrow 0$ ，但切点 $C_L^* \rightarrow 0$ ，即“升阻比很高时升力系数并不大”； $AR \rightarrow \infty$ 时 $k \rightarrow 0$ ，诱导阻力消失。这解释了为什么高性能翼帆、滑翔机都细长。

3.4 稳态流动的控制体动量定理

定义：流线、流管、稳态、控制体

流体中处处与速度方向相切的曲线叫**流线**；由一束流线围成的管子叫**流管**，流体不会穿过流管侧壁。各点速度、压强不随时间变化的流动叫**稳态流动**。为了记账而在空间中划定的一块固定区域叫**控制体**，流体可以从它的边界流进流出。流过截面 A （速度 v 垂直于截面且均匀）的质量流量为 $\dot{m} = \rho A v$ 。

推导：一维控制体动量定理

取一段流管作控制体，流体从截面 1 流入（面积 A_1 、速度 $\mathbf{v}_1$ ），从截面 2 流出。稳态下控制体内的质量不变，所以 $\rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2 = \dot{m}$ （**质量守恒**）。

考察 t 时刻恰在控制体内的那部分流体（一个确定的质点系）。经过 dt ，它的一端从截面 1 前移，另一端从截面 2 前移。由于稳态，控制体内部那段流体的动量不变；这个质点系动量的变化，等于“在截面 2 外新增的一小块”的动量减去“在截面 1 处离开控制体的一小块”的动量：

$$d\mathbf{p} = (\dot{m} dt) \mathbf{v}_2 - (\dot{m} dt) \mathbf{v}_1.$$

对这个质点系用牛顿第二定律 $d\mathbf{p} = \mathbf{F}_{\text{合}} dt$ ：

$$\mathbf{F}_{\text{作用于流体}} = \dot{m} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \quad (3.15)$$

左边包括控制体边界上的压力，以及控制体内物体（帆、风轮）对流体的力。若有多个进出口，右边改为 $\sum_{\text{出}} \dot{m} \mathbf{v} - \sum_{\text{入}} \dot{m} \mathbf{v}$ 。

例题：射流打平板

速度 v 、质量流量 $\dot{m}$ 的水平射流正对竖直平板，水沿板面向四周散开（离开时水平速度为零）。取包住板前流体的控制体，大气压处处相同，式 (3.15) 给出板对流体的力 $= \dot{m}(0 - v)$ ，即流体对板的推力 $\dot{m}v$ 。这个结果不需要知道板前的复杂流动细节，这正是控制体方法的威力。

3.5 伯努利方程及其适用条件

推导：沿流线的伯努利方程

取一根细流管，截面 1、2 处压强 $p_{1,2}$ 、速度 $v_{1,2}$ 、高度 $z_{1,2}$ 。在 dt 内，流过两截面的体积相同，都是 $d\mathcal{U} = A_1 v_1 dt = A_2 v_2 dt$ （不可压缩）。对管内这段流体用功能原理：

(1) 外界压力做功：截面 1 处后方流体推它，做功 $p_1 A_1 v_1 dt = p_1 d\mathcal{U}$ ；截面 2 处前方流体阻挡它，做功 $-p_2 d\mathcal{U}$ ；侧壁压力垂直于流速不做功。

(2) 若没有黏性耗散、也没有叶片等对流体做功或取功，则这些功等于动能与重力势能的增量。由于稳态，增量就是“截面 2 处多出的一块”减去“截面 1 处少掉的一块”：
 $(\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \rho g z_1) d\mathcal{U}$ 。

令两者相等，消去 $d\mathcal{U}$ ：

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{常量（沿同一流线）}. \quad (3.16)$$

假设：伯努利方程的适用条件

1. **稳态**；
2. **不可压缩**：气体密度变化 $\Delta\rho/\rho \sim \frac{1}{2}\text{Ma}^2$ ($\text{Ma} = v/c_s$ 为马赫数, $c_s \approx 340 \text{ m/s}$ 为声速)。本讲涉及的气流相对速度不超过约 60 m/s (Horonuku 的车速约 62 m/s 是其中最大者), $\text{Ma} \lesssim 0.18$, 密度变化 $\lesssim 1.6\%$, 可忽略；
3. **无黏性耗散**：远离物体表面和尾流湍流区；
4. **沿同一流线**；
5. **两点之间没有对流体做功或从流体取功的装置**。风轮、螺旋桨恰好违反这一条：流体穿过叶片时 $p + \frac{1}{2}\rho v^2$ 发生跃变。所以第 6 节只能在盘前、盘后分别使用伯努利方程，不能跨过盘使用。

本讲涉及的气流都在水平面内， $\rho g z$ 项不变，下文略去。

4 帆船：航向定理与速度极图

4.1 理想化模型

假设：帆船的平面稳态模型

1. 水静止（无海流），真风 $\mathbf{V}_T$ 均匀恒定；船匀速直线航行（稳态）。
2. 只考虑水平面内的力。帆、桅杆、船体水上部分受的空气动力合成为一个力 $\mathbf{F}_A$ ；龙骨、舵、船体水下部分受的水动力合成为 $\mathbf{F}_H$ 。重力与浮力在竖直方向平衡。帆力作用点高于水下侧向力作用点，两者构成使船向一侧倾斜的**横倾力矩**，它由重力与浮力作用线错开形成的**扶正力矩**平衡；两力作用点前后错开形成的使船头左右转动的**偏航力矩**由舵平衡。这些力矩平衡都不影响水平力的平衡。
3. **航向**指船相对水的速度 $\mathbf{V}_s$ 的方向。船的艏向（船头指向）与航向之间有一个几度的**横漂角**：正是这个小攻角使龙骨像水下机翼一样产生侧向的“升力” L_H 来抵抗帆的侧推。我们不需要横漂角的具体值，只需要 $\mathbf{F}_H$ 相对来流 $-\mathbf{V}_s$ 的分解。

按第 3.3 节的定义： $\mathbf{F}_A$ 相对视风分解为升力 L_A （垂直 $\mathbf{V}_A$ ）与阻力 D_A （沿 $\mathbf{V}_A$ ），阻力角 $\tan \varepsilon_A = D_A/L_A$ ； $\mathbf{F}_H$ 相对水流分解为侧向力 L_H （垂直航向）与阻力 D_H （与航向相反）， $\tan \varepsilon_H = D_H/L_H$ 。

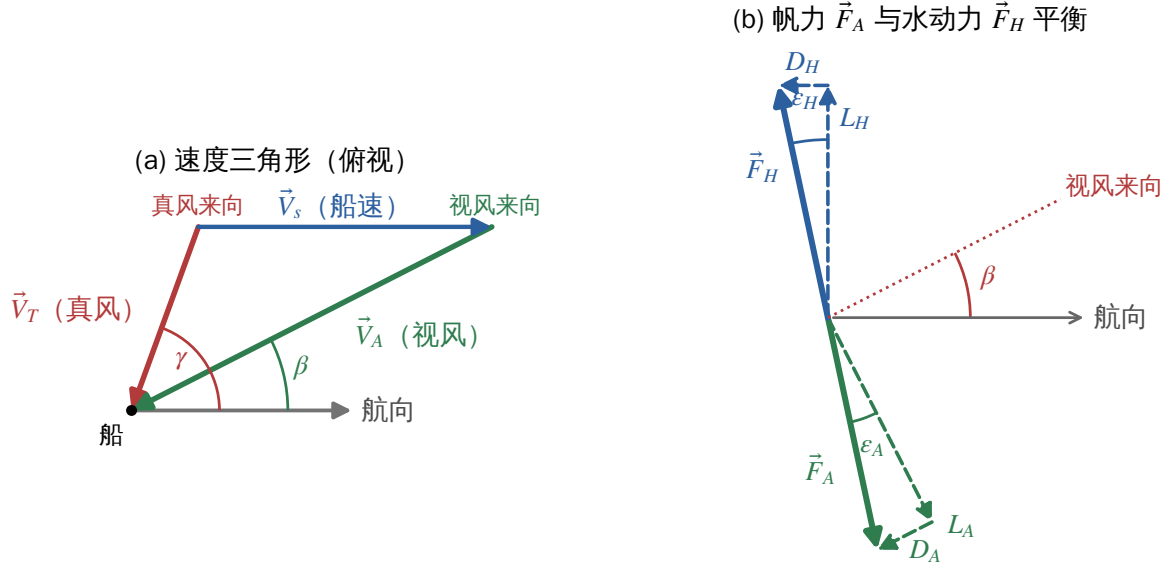


图 2 (a) 速度三角形：顶点为船 O、真风来向点、视风来向点；三边分别为 $\vec{V}_T$ 、 $\vec{V}_A$ 、 $\vec{V}_s$ ，满足 $\vec{V}_A = \vec{V}_T - \vec{V}_s$ 。
(b) 帆力与水动力： $\vec{F}_A$ 偏离视风垂线 ϵ_A ， $\vec{F}_H$ 偏离航向垂线 ϵ_H ，两者共线反向，于是航向与视风来向夹角 $\beta = \epsilon_A + \epsilon_H$ 。图中 $\epsilon_A = 15^\circ$ ， $\epsilon_H = 12^\circ$ ， $\gamma = 70^\circ$ ，由此算得 $V_s/V_T = 1.502$ 、 $V_A/V_T = 2.070$ （脚本 fig_triangle.py 断言核对）。

4.2 航向定理

推导： $\beta = \epsilon_A + \epsilon_H$

仍取航向为 x 轴，视风从左前方、与航向成 β 角吹来，空气相对船沿 $-(\cos \beta, \sin \beta)$ 方向运动。
第 1 步，写出两个力的分量。阻力沿视风去向： $-D_A(\cos \beta, \sin \beta)$ ；升力垂直视风且指向有前进分量的一侧： $L_A(\sin \beta, -\cos \beta)$ 。水动力：阻力 $(-D_H, 0)$ ，侧向力指向迎风侧 $(0, L_H)$ 。于是

$$\vec{F}_A = (L_A \sin \beta - D_A \cos \beta, -L_A \cos \beta - D_A \sin \beta), \quad \vec{F}_H = (-D_H, L_H).$$

第 2 步，稳态要求 $\vec{F}_A + \vec{F}_H = 0$ ，逐分量写出：

$$D_H = L_A \sin \beta - D_A \cos \beta, \quad L_H = L_A \cos \beta + D_A \sin \beta.$$

第 3 步，两式相除，并用 $D_A = L_A \tan \epsilon_A$ 消去 D_A ：

$$\tan \epsilon_H = \frac{D_H}{L_H} = \frac{\sin \beta - \tan \epsilon_A \cos \beta}{\cos \beta + \tan \epsilon_A \sin \beta} = \frac{\sin \beta \cos \epsilon_A - \cos \beta \sin \epsilon_A}{\cos \beta \cos \epsilon_A + \sin \beta \sin \epsilon_A} = \tan(\beta - \epsilon_A).$$

三个角都在 $(0, \pi/2)$ 内，正切相等即角相等：

$$\boxed{\beta = \epsilon_A + \epsilon_H} \quad (4.1)$$

几何上这一结论几乎是“看出来的”（图 2(b)）： $\vec{F}_A$ 的方向是“视风的垂线向下游转 ϵ_A ”， $-\vec{F}_H$ 的方向是“航向的垂线向后转 ϵ_H ”；二者必须是同一方向，于是两条垂线之间的夹角——也就是视风与航向的夹角 β ——等于 $\epsilon_A + \epsilon_H$ 。我们把式 (4.1) 称为**航向定理**；这一力平衡关系是帆船空气-水动力学的基本出发点 [27, 28]。

要点：航向定理的含义

视风角 β 完全由两个阻力角决定，与帆的大小、风的强弱无关。帆船能“多贴近视风航行”，取决于帆和船体两部分的升阻比之和：任何一边升阻比差，船都只能在较大的视风角下航行。式 (4.1) 是精确的力平衡结果；近似只出现在下一步——假定 ε_A 、 ε_H 不随航向变化。

检验

由第 2 步还可得 $|\mathbf{F}_A| = |\mathbf{F}_H|$ (sympy 核对，见 `verify_sympy.py`)。若 $\varepsilon_A + \varepsilon_H \geq \pi/2$ ，则 $\beta \geq \pi/2$ ：视风必须来自正横或其后方，船只能在 $\beta < \gamma \leq \pi$ 的宽顺风扇区内航行，而且由下一节的式 (4.2)，此时船速不超过风速。没有龙骨的木筏大体就是这种处境。

4.3 速度三角形与速度比**推导：由正弦定理求速度比**

看图 2(a) 的三角形：顶点为船 O、真风来向点 T_0 ($\overrightarrow{OT_0} = -\mathbf{V}_T$)、视风来向点 A_0 ($\overrightarrow{OA_0} = -\mathbf{V}_A$)。由式 (3.2)， $\overrightarrow{T_0A_0} = \mathbf{V}_T - \mathbf{V}_A = \mathbf{V}_s$ ，与航向平行。

第 1 步，求三个内角。O 处： OT_0 与航向成 γ ， OA_0 与航向成 β ，内角为 $\gamma - \beta$ ； A_0 处： A_0T_0 沿 $-x$ ， A_0O 方向角为 $\pi + \beta$ ，内角为 β ； T_0 处： $\pi - \gamma$ 。

第 2 步，正弦定理（对边/对角正弦相等）：

$$\frac{V_s}{\sin(\gamma - \beta)} = \frac{V_T}{\sin \beta} = \frac{V_A}{\sin(\pi - \gamma)}.$$

于是

$$\frac{V_s}{V_T} = \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\sin \beta}, \quad \frac{V_A}{V_T} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}. \quad (4.2)$$

假设：常阻力角近似

认为在所讨论的航向范围内，水手不断调帆（改变帆的攻角）、船自动调整横漂角，使帆与船体都工作在各自升阻比最大的状态附近， ε_A 、 ε_H 近似为常数，从而 β 为常数。被忽略的效应：系数随速度的变化（例如排水型船体的兴波阻力随速度急增，见下文注）、视风从后方来时帆失速、横倾限制等。这一近似给出性能的理想上限；式 (4.2) 本身则对实际的 β 精确成立。

在常 β 下，式 (4.2) 给出三条结论：

1. 只能在 $\gamma > \beta$ 的航向前进：迎风存在一个“禁航扇区” $|\gamma| < \beta$ 。
2. 速度比在 $\gamma - \beta = \pi/2$ ，即真风来向在正横之后 β 角处 ($\gamma = \pi/2 + \beta$) 时最大：

$$\left(\frac{V_s}{V_T}\right)_{\max} = \frac{1}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin(\varepsilon_A + \varepsilon_H)}. \quad (4.3)$$

阻力角越小，速度可以超过风速越多；理想化的 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时没有上限。

3. 正顺风 $\gamma = \pi$ 时 $V_s/V_T = \sin(\pi - \beta)/\sin \beta = 1$ ，此时视风为零、力为零——常 β 模型在此退化。实际上任何阻力都使顺风直航的船速略低于风速：帆船正顺风直航不可能比风快。

推导：速度极图是一个圆

以船为原点，把各航向下的船速矢量 $\mathbf{V}_s$ 的端点画出来，得到**速度极图** (polar)。设船速端点为 P，真风矢量 $\mathbf{V}_T$ 的端点为 Q (即从原点出发、指向下风方向、长 V_T 的点)。则 $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{V}_T - \mathbf{V}_s = \mathbf{V}_A$ 。在 P 处， $\overrightarrow{PO} = -\mathbf{V}_s$ 与 $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{V}_A$ 的夹角，等于 $\mathbf{V}_s$ 与 $-\mathbf{V}_A$ (视风来向) 的夹角，即 β 。于是弦 OQ 对 P 点的张角恒为 β 。由圆周角定理，P 的轨迹是过 O、Q 两点的圆弧，外接圆半径 $R = \overline{OQ}/(2 \sin \beta)$ ，即

$$\text{速度极图：过原点与 } \mathbf{V}_T \text{ 端点、直径为 } V_T / \sin \beta \text{ 的圆。} \quad (4.4)$$

直径就是式 (4.3) 的最大速度，对应 P 为 O 的对径点。

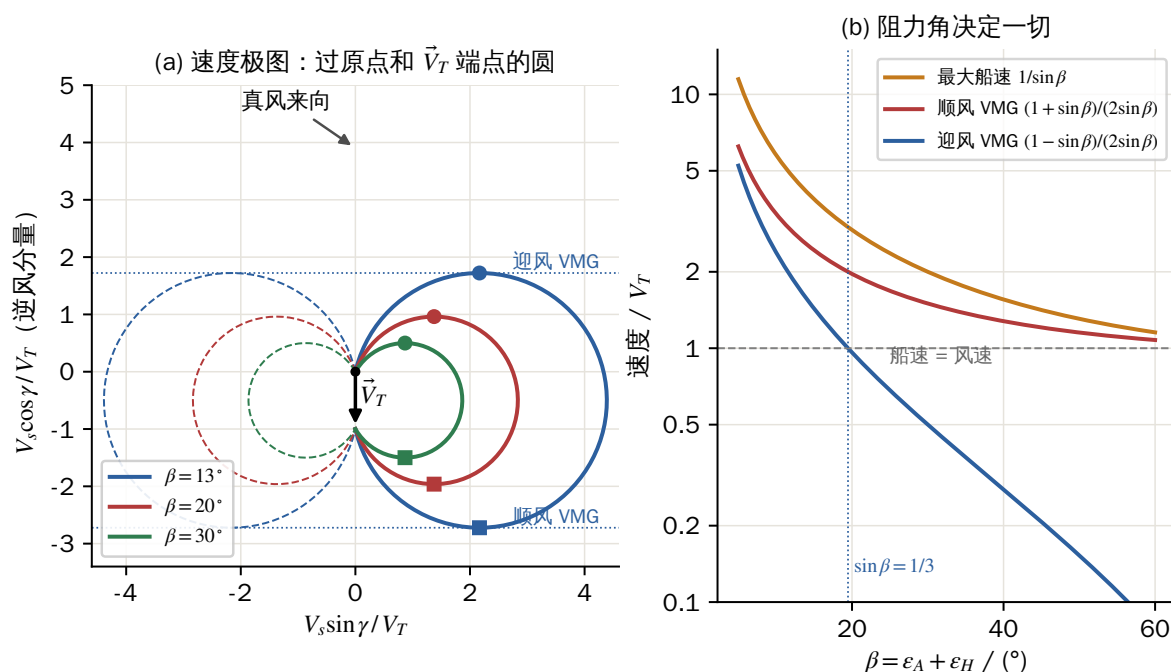


图 3 (a) 常阻力角模型的速度极图 (风从上方吹来，实线为左舷来风，虚线为右舷对称支)。圆点、方块分别为迎风、顺风 VMG 最优点，处于圆的最高、最低点 (水平切线)。(b) 最大船速、迎风与顺风 VMG 随 β 的变化； $\sin \beta < 1/3$ ($\beta < 19.47^\circ$) 时迎风 VMG 超过风速。所有标注点在 `fig_polar.py` 中与式 (4.5)–(4.7) 数值核对。

交互演示：拖动真风角 γ 与两个阻力角，观察速度三角形与帆力、水动力的平衡；读数给出 β 、 V_s/V_T 、 V_A/V_T 与 VMG。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 `sailing-triangle`)。

注：排水型船为什么跑不快

常规龙骨帆船的船体在水面上航行时会激起波浪。深水重力波的相速度为 $c = \sqrt{g\lambda/(2\pi)}$ (λ 为波长；这是水波色散关系 $\omega^2 = gk$ 、 $k = 2\pi/\lambda$ 的推论，此处直接引用)，船首波随船前进，其相速度等于船速；当这个波的波长增大到与水线长 L_{wl} 相当、即 $V_s \approx \sqrt{gL_{wl}/(2\pi)} \approx 0.4\sqrt{gL_{wl}}$ 时，船体陷在自己激起的波谷里，兴波阻力急剧增大， ϵ_H 随速度迅速变大。这就是“船体速度”的由来：10 m 水线长的船约 4 m/s。水翼船把船体抬离水面，只剩细长水翼的阻力， ϵ_H 降

到几度，才使 AC75 能以风速的两倍以上航行。

4.4 迎风与顺风的最优策略：VMG

帆船比赛的航线通常是“上风标一下风标”。要尽快到达正上风方的标，重要的不是船速而是船速沿真风方向的分量。

定义：VMG

沿真风来向的速度分量 $\text{VMG} = V_s \cos \gamma$ （迎风时为正）；顺风航段则用 $-V_s \cos \gamma$ 。船以 $\pm \gamma$ 交替走“之”字形（迎风叫换舷，顺风叫顺风换舷），平均前进速度就是 VMG。

推导：最佳迎风角

由式 (4.2)， $\text{VMG}/V_T = \sin(\gamma - \beta) \cos \gamma / \sin \beta$ 。对 γ 求导（ β 为常数）：

$$\frac{d}{d\gamma} [\sin(\gamma - \beta) \cos \gamma] = \cos(\gamma - \beta) \cos \gamma - \sin(\gamma - \beta) \sin \gamma = \cos(2\gamma - \beta).$$

令其为零，取 $2\gamma - \beta = \pi/2$ ：

$$\gamma_{\text{迎}}^* = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}. \quad (4.5)$$

代回。 $\gamma^* - \beta = \pi/4 - \beta/2$ ，而 $\cos \gamma^* = \cos(\pi/4 + \beta/2) = \sin(\pi/4 - \beta/2)$ ，所以 $\sin(\gamma^* - \beta) \cos \gamma^* = \sin^2(\pi/4 - \beta/2) = \frac{1}{2} [1 - \cos(\pi/2 - \beta)] = \frac{1}{2} (1 - \sin \beta)$ ：

$$\frac{\text{VMG}_{\text{迎}}}{V_T} = \frac{1 - \sin \beta}{2 \sin \beta}. \quad (4.6)$$

同样，顺风时令 $2\gamma - \beta = 3\pi/2$ ，得

$$\gamma_{\text{顺}}^* = \frac{3\pi}{4} + \frac{\beta}{2}, \quad \frac{\text{VMG}_{\text{顺}}}{V_T} = \frac{1 + \sin \beta}{2 \sin \beta}. \quad (4.7)$$

几何上，VMG 是船速端点 P 的纵坐标（逆风为正），最优点就是极图圆的最高点与最低点。

检验

(1) $\beta \rightarrow \pi/2$ ： $\text{VMG}_{\text{迎}} \rightarrow 0$ ， $\text{VMG}_{\text{顺}} \rightarrow 1$ ，即没有升力的“风帆”只能被风推着走。(2) 迎风 VMG 超过风速的条件： $1 - \sin \beta > 2 \sin \beta$ ，即 $\sin \beta < 1/3$ 。(3) 顺风 $\text{VMG} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \sin \beta} > 1$ 对任意 $\beta < \pi/2$ 成立：走“之”字形的顺风 VMG 总是超过风速（理想模型下）。冰帆船和 AC75 都是这样做的：它们“顺风”时船上感受到的视风仍从前方来（视风角仍是 β ，很小）。(4) 典型数值：常规龙骨帆船取 $\beta = 26^\circ$ ， $\text{VMG}_{\text{迎}} = 0.64V_T$ ；水翼帆船取 $\beta = 15^\circ$ ，迎风最优航向的船速为 $\sin(37.5^\circ)/\sin(15^\circ) = 2.35V_T$ ，与 AC75 约 40 节/17 节的报道 [4] 一致。

交互演示：调节 ε_A 、 ε_H ，观察速度极图（圆）的变化及迎风、顺风 VMG 最优点；也可切换到第 5 节的冰帆船模型，调节摩擦参数 Π 。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 sailing-polar）。

4.5 能量从哪里来：帆船的两系功率账本

推导：水系与空气系

水系（水静止）：船以 $\mathbf{V}_s$ 运动，帆上受力点随船运动，空气对船的功率为 $\mathbf{F}_A \cdot \mathbf{V}_s = -\mathbf{F}_H \cdot \mathbf{V}_s = D_H V_s$ ($\mathbf{F}_H$ 的侧向分量垂直 $\mathbf{V}_s$ 不做功)。这些功率全部被水阻力耗散。同时帆在空气中还有自己的耗散 $D_A V_A$ (第 3.3 节要点)，由风的动能提供。

空气系（空气静止）：船的速度为 $\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_T = -\mathbf{V}_A$ 。水对船的功率为 $\mathbf{F}_H \cdot (-\mathbf{V}_A) = \mathbf{F}_A \cdot \mathbf{V}_A = D_A V_A$ (只有沿 $\mathbf{V}_A$ 的阻力分量有贡献)。这个系里，是“水推着船”，由水的运动提供能量，消耗在空气阻力上。

两系中，总耗散都是

$$P_{\text{耗散}} = D_A V_A + D_H V_s = \mathbf{F}_A \cdot \mathbf{V}_T, \quad (4.8)$$

最后一个等号可直接由 $\mathbf{V}_T = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_s$ 得到，它正是式 (3.9) (介质 1 为空气、速度 $\mathbf{V}_T$ ；介质 2 为水、速度 0)。

要点：帆船是一台“相对运动变速器”

帆和龙骨都是“传力不耗能”的升力面：帆把力从空气传到船上，龙骨把同样大小的力传到水里。两次传力的总耗散 $D_A V_A + D_H V_s$ 正比于阻力角。阻力角趋于零时，传递有限的力几乎不耗能，船速就可以远超风速而不违反任何守恒律。速度比的上限 $1/\sin(\varepsilon_A + \varepsilon_H)$ 就是这句话的定量形式。

5 冰帆船与陆地帆船：水动阻力角趋于零

5.1 滑刀的“水动力”阻力角

冰帆船用三把锋利的钢制滑刀在冰面上滑行。滑刀沿刀刃方向滑动的摩擦系数极小：速滑冰刀的实测值约 0.005[29]，冰帆船滑刀在无侧向载荷时最低约 0.005[30]；而垂直刀刃方向，刀刃切入冰面，可以提供很大的侧向力而几乎不侧滑。于是冰面对船的力 $\mathbf{F}_H$ 的两个分量是：沿航向的摩擦 $D_H = \mu mg$ (库仑摩擦，与速度无关)，垂直航向的侧向力 L_H (被动地等于所需值)。对应的阻力角

$$\tan \varepsilon_H = \frac{\mu mg}{L_H} \quad (5.1)$$

随船速增大而减小：船越快，视风越大，帆力与侧向力 L_H 越大，而摩擦不变。高速时 $\varepsilon_H \rightarrow 0$ ，航向定理给出 $\beta \rightarrow \varepsilon_A$ 。(船体、桅杆、人体受的空气阻力沿视风方向，已计入 D_A ，从而计入 ε_A 。)

5.2 自洽模型

假设：冰帆船模型

帆以固定的合力系数 $C_R = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}$ 与固定阻力角 ε_A 工作 ($\mathbf{F}_A$ 大小 $\frac{1}{2}\rho S C_R V_A^2$)；冰面摩擦 μmg ；侧向力不受限 (不侧滑)，忽略横倾。

推导：确定视风角的方程

第 1 步，沿航向的力平衡。帆力在航向上的分量（航向定理推导的第 2 步）为 $L_A \sin \beta - D_A \cos \beta = F_A(\cos \varepsilon_A \sin \beta - \sin \varepsilon_A \cos \beta) = F_A \sin(\beta - \varepsilon_A)$ ，它与摩擦平衡：

$$\frac{1}{2} \rho S C_R V_A^2 \sin(\beta - \varepsilon_A) = \mu m g. \quad (5.2)$$

第 2 步，用速度三角形的式 (4.2) 把 V_A 换成 $V_T \sin \gamma / \sin \beta$ ，两边除以 $\frac{1}{2} \rho S C_R V_T^2$ ：

$$\frac{\sin^2 \gamma \sin(\beta - \varepsilon_A)}{\sin^2 \beta} = \Pi, \quad \Pi \equiv \frac{\mu m g}{\frac{1}{2} \rho S C_R V_T^2}. \quad (5.3)$$

Π 是“冰面摩擦与真风能提供的帆力之比”。给定 γ 、 ε_A 与 Π ，解出 β ，再由式 (4.2) 得船速。

检验：两个极限

强风极限 $\Pi \rightarrow 0$ ：式 (5.3) 要求 $\sin(\beta - \varepsilon_A) \rightarrow 0$ ，即 $\beta \rightarrow \varepsilon_A$ ，速度极图趋于直径 $V_T / \sin \varepsilon_A$ 的圆（式 (4.4)），与“ $\varepsilon_H \rightarrow 0$ ”一致。**起动条件**：静止时 $V_s = 0$ ， $\beta = \gamma$ ， $V_A = V_T$ 。要能起动，需 $\sin(\gamma - \varepsilon_A) > \Pi$ ；最有利的 $\gamma = \varepsilon_A + \pi/2$ 给出 $\Pi < 1$ ，即

$$V_T > V_{T,\min} = \sqrt{\frac{2\mu m g}{\rho S C_R}}. \quad (5.4)$$

以 DN 级为例：帆 5.6 m^2 ，艇加人约 150 kg ， $\mu = 0.005$ ， $C_R \approx 1.2$ ，得 $V_{T,\min} \approx 1.35 \text{ m/s} \approx 3.0 \text{ mph}$ 。Dill 的经验是“好冰面上风速低于 2.5 mph 冰帆船不会起动” [5]，量级一致。

图 4 的结论是：**冰帆船的速度比几乎只由气动阻力角 ε_A 决定**，冰面摩擦只在接近起动风速时重要。原因是驱动力 $\propto V_A^2$ 随船速增大而增大，而摩擦不变。

稳定性、三个解与“先横风加速、再偏转” 式 (5.3) 只是力平衡条件，还要判断平衡是否稳定。考察沿航向的净力 $F_{\text{净}}(V_s) = F_A \sin(\beta - \varepsilon_A) - \mu m g$ (β 、 F_A 都是 V_s 的函数)：若平衡点处 $dF_{\text{净}}/dV_s < 0$ ，船速稍大则净力为负、被拉回，平衡稳定；反之，船速稍大则继续加速，平衡不稳定。由于 V_s 增大时 β 减小，这等价于：方程左边减 Π 在根处随 β 增大而由负变正时稳定。

在轻风、宽顺风时方程可有三个根。以 $V_T = 1.5 \text{ m/s}$ 、 $\gamma = 130^\circ$ 为例，三根为 $V_s/V_T = 3.296$ (稳定)、 2.014 (不稳定)、 0.078 (稳定) (`fig_ice.py` 中用净力斜率逐一核对)。不稳定的中间解就是两个稳定解之间的“坎”：船速低于它就减速到低速解，高于它就加速到高速解。从静止起航时 β 从 γ 开始减小，船先遇到低速解，于是停在那里。办法是先转到 $\gamma \approx 95^\circ$ (横风，那里只有高速解) 加速，建立起大视风后再慢慢偏向下风：系统沿高速支连续移动。但这一招有限度：高速支在 $\gamma \approx 132^\circ$ 处与不稳定支合并而消失（数学上称为折叠），再往下风偏，船就掉回低速解； $\gamma > 136^\circ$ 时连低速解也没有，船停下。`verify_numeric.py` 对一维运动方程 $m\dot{V}_s = F_A \sin(\beta - \varepsilon_A) - \mu m g$ 的数值积分证实了这些结论：直接在 130° 起航停在 $0.078 V_T$ ；先在 95° 加速再缓慢偏到 130° 达到 $3.296 V_T$ ；偏到 134° 则掉回低速解 $0.024 V_T$ 。这种滞后意味着：同一航向、同一风速下，船速可以取决于驾驶的历史。

迎风侧是对称的。 $V_T = 1.5 \text{ m/s}$ 时，起动条件 $\sin(\gamma - \varepsilon_A) > \Pi$ 要求 $\gamma > 64.2^\circ$ ；而在 $47.7^\circ < \gamma < 64.2^\circ$ 内方程有两个根——高速稳定解与一个不稳定解，后者在 $\gamma = 64.2^\circ$ 处降到 $V_s = 0$ ； $\gamma < 47.7^\circ$ 时高速解与不稳定解合并消失（迎风侧的折叠），没有稳态。这个区间里静止的船推力

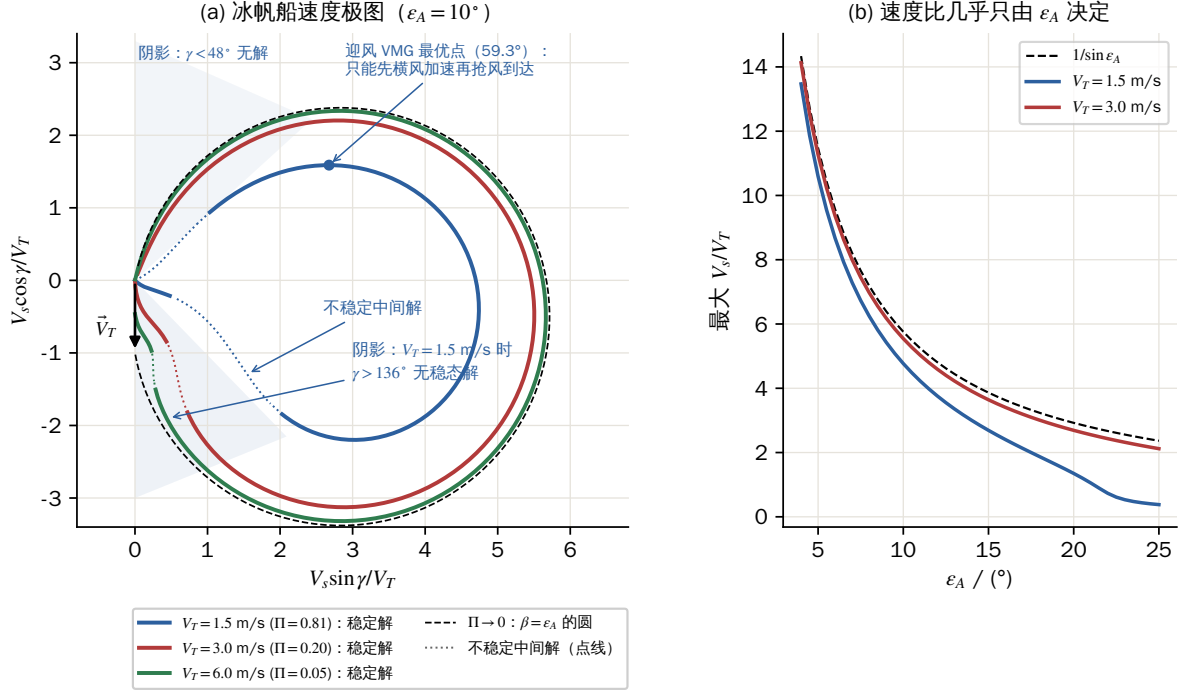
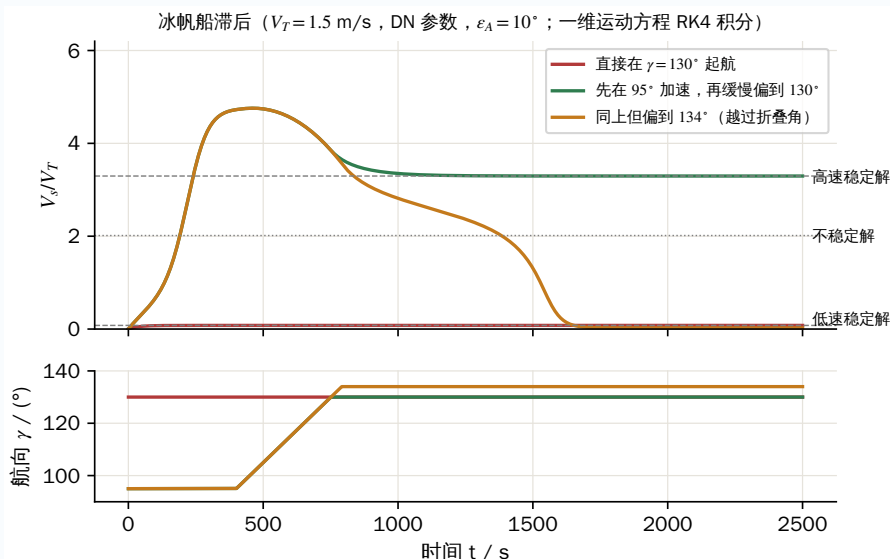


图 4 冰帆船自洽模型 (DN 级参数, $\varepsilon_A = 10^\circ$)。 (a) 三种风速下的速度极图与强风极限圆。实线为稳定解, 点线为不稳定的中间解; 曲线在解消失处断开。 $V_T = 1.5 \text{ m/s}$ 时, $\gamma \approx 114^\circ\text{--}132^\circ$ 有三个解 (高速稳定、中间不稳定、贴近原点的低速稳定), $\gamma \approx 132^\circ$ 处高速解与不稳定解合并消失, $\gamma > 136^\circ$ (阴影) 无任何稳态解, 船会停下; $V_T = 3 \text{ m/s}$ 时同样的折叠出现在 $\gamma \approx 158^\circ$ 。迎风侧同样有折叠: $V_T = 1.5 \text{ m/s}$ 时 $\gamma < 48^\circ$ 无解 (上方阴影), $48^\circ\text{--}64^\circ$ 只有高速稳定解与一个不稳定解 (点线连向原点), 不能从静止起动; 迎风 VMG 最优点 (圆点, $\gamma^* = 59.3^\circ$) 正在此区间内。 (b) 最大速度比随 ε_A : 除了接近起动风速的极轻风, 曲线都贴近 $1/\sin \varepsilon_A$; $V_T = 1.5 \text{ m/s}$ 、 $\varepsilon_A \gtrsim 21^\circ$ 时高速支整体消失, 曲线取到的是低速解, 故急剧下降。数值由 `fig_ice.py` 求解式 (5.3) 得到, 并在 `verify_numeric.py` 中与动力学积分对比。

不足，只有船速已超过不稳定解时才会加速到高速解。迎风 VMG 最优点恰在其中： $\gamma^* = 59.3^\circ$, $V_s = 3.11V_T$, $\text{VMG} = 1.59V_T$ (fig_ice.py)。所以轻风中要迎风航行，也必须先在横风加速、再逐渐转向上风（“抢风”）。

交互演示：冰帆船的实时动力学：拖动航向角 γ 驾驶冰帆船。试试从静止直接在 $\gamma = 130^\circ$ 起航，再试试先在横风加速、然后逐渐偏向下风。



网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 sailing-ice）。

5.3 现实限制

模型说 $\varepsilon_A = 10^\circ$ 的冰帆船可跑到风速的 5–6 倍，实测怎样？

- **视风角很小。**高速时 β 只比 ε_A 大一点点，驱动分量 $F_A \sin(\beta - \varepsilon_A)$ 只是帆力的很小一部分，帆必须收得很紧。Dill 指出这类帆船“视风角很少超过 20° ”，Skeeter 在 8–10 倍风速时对应 β 仅 6° – 7° [5]。
- **由纪录反推阻力角。**速度比不能超过 $1/\sin \beta$ ，所以 Horonuku 在 22 节风中跑出约 222.4 km/h (约 5.46 倍)[8] 意味着整车 $\beta \leq 10.6^\circ$ 。Dill 记录的 DN 比赛 (风 10 mph, 迎风航段船速 30 mph, 顺风航段 40 mph[5]) 若按常 β 模型的 VMG 最优航向解释，迎风数据给出 $\beta = 12.1^\circ$ ，顺风数据给出 $\beta = 11.1^\circ$ ，两者相当接近，说明常阻力角模型抓住了主要物理 (verify_numeric.py)。
- **升力系数与横倾限制。**帆力 $\propto C_R V_A^2$ 随视风平方增大，而能承受的横倾力矩有限。DN 滑刀横梁宽 $B \approx 2.44 \text{ m}$ ，取风压中心高 $h = 1.8 \text{ m}$ ，若以背风滑刀为支点，侧翻前帆力不超过 $mg \cdot (B/2)/h \approx 1.0 \text{ kN}$ (实际倾覆轴是背风滑刀与船首转向刀的连线，重力对它的力臂小于 $B/2$ ，所以这只是上限)。对应视风约 16 m/s (取 $C_R \approx 1.2$ ；若按轻风最优状态 $C_R \approx 1.03$ 则约 17 m/s)；再大，水手就必须让帆“卸力”，有效 C_L 降低，而船体和人体的寄生阻力 $\propto V_A^2$ 不降，于是整体 ε_A 变大。量级估计 (帆 $C_{D0} = 0.03$ 、 $k = 0.12$ ，寄生阻力面积 0.5 m^2 ，均为假设值)：轻风时最优 $C_L \approx 1.0$ 、 $\varepsilon_A \approx 13.5^\circ$ ，速度比上限 $1/\sin \varepsilon_A \approx 4.3$ ；视风 25 m/s 时帆力被限制在 $C_R \approx 0.47$ ，由 $C_R^2 = C_L^2 + C_D^2$ 解得 $C_L \approx 0.45$ ， ε_A 增到约 17.6° ，上限降到

3.3. 这与 Dill 观察到的“最高速度比出现在风速范围的低端；30 mph 风中 DN 只有约 2:1”[5] 趋势一致。

6 致动盘动量理论：风力机与螺旋桨

风力机从风中取能，螺旋桨把能量交给空气。两者都可以用同一个最简模型处理。下面的推导只用到第 3.4 节的动量定理与第 3.5 节的伯努利方程。

6.1 模型与假设

定义：致动盘

把转动的叶轮想象成一个面积为 A 、厚度为零的圆盘，流体穿过它时速度连续（盘无厚度，盘前、盘后紧贴处截面积相同，由质量守恒 $\rho A u_+ = \rho A u_-$ 即得 $u_+ = u_-$ ），但压强发生均匀的跃变 $\Delta p = p_+ - p_-$ （ p_+ 、 p_- 分别为盘前、盘后紧贴处的压强）。盘对流体的力为 $-A\Delta p$ （风力机时 $\Delta p > 0$ ，阻滞气流），流体对盘的推力 $T = A\Delta p$ 。

假设：理想致动盘

1. 在随盘静止的惯性系中考察（风力机静止；装在匀速车上时随车平动，也是惯性系），流动稳态、不可压缩；
2. 只有流过盘的那根流管受到扰动；流管外流体近似不受影响，远前方与远尾流处的压强都恢复为环境压强 p_∞ 。远前方是未扰动的来流，自然是 p_∞ ；远尾流处的理由是：那里流线已变得平直且相互平行，流体没有垂直于流线的加速度（没有向心加速度），由横向的牛顿第二定律，横向压强梯度为零，于是尾流内部的压强等于紧邻的外部流体的压强 p_∞ ；
3. 流管内速度在每个截面上均匀，流体不旋转（忽略尾流旋转），盘外无黏性耗散。

6.2 质量、动量与能量

设远前方来流速度 U ，盘处速度 u_d ，远尾流速度 u_w ，对应截面 A_∞ 、 A 、 A_w 。

推导：推力的两种算法与 Froude 定理

第 1 步，质量守恒： $\dot{m} = \rho A_\infty U = \rho A u_d = \rho A_w u_w$ 。

第 2 步，动量定理。对从远前方到远尾流的整根流管用式 (3.15)，流体所受合力等于 $\dot{m}(u_w - U)$ 。这个合力包括盘的力 $-T$ ，以及流管边界（两端面与侧壁）上的压力。两端面压强都是 p_∞ ，而侧壁上的压强并不处处等于 p_∞ ，侧壁压力的轴向净贡献是否为零并不显然。附录 A 换用一个远大于流管的控制体，直接得到下式；与流管控制体的结果比较即知，侧壁压力的轴向净贡献确实为零。于是

$$T = \dot{m}(U - u_w). \quad (6.1)$$

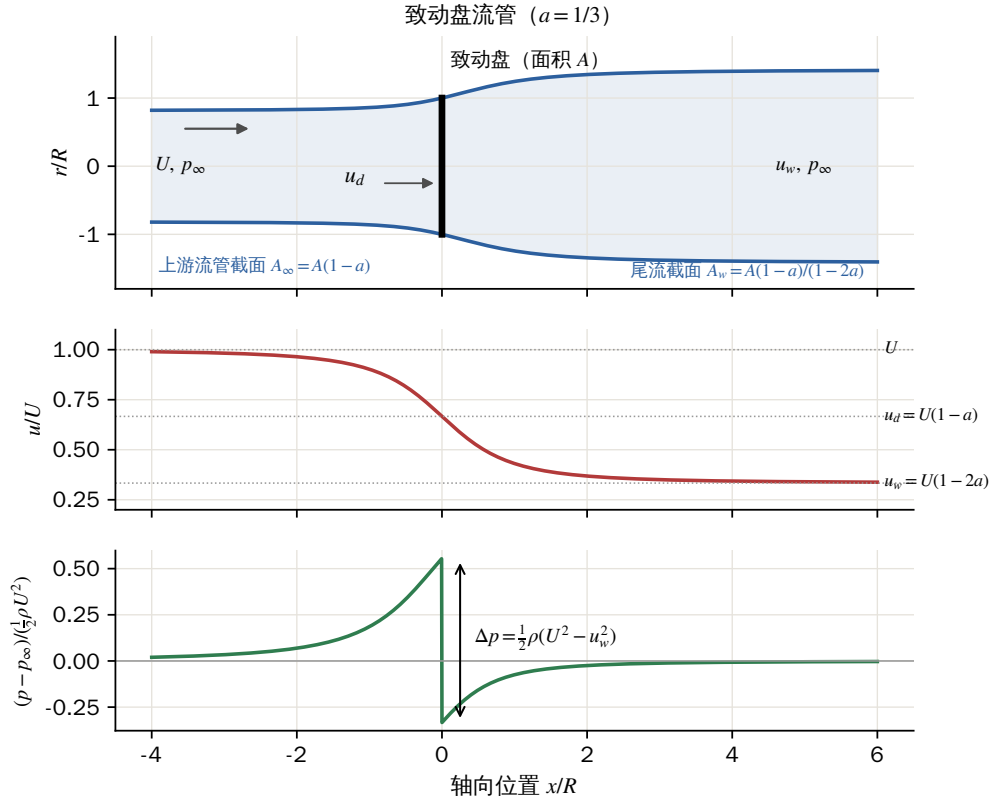


图 5 致动盘流管 ($a = 1/3$)。上：流管在盘前、盘后都单调扩张（一维连续性 $r \propto u^{-1/2}$ ，而 u 单调减小）；中：轴线流速由 U 连续降到 u_d 再降到 u_w ；下：压强在盘前升高、跨盘跃降 Δp ，盘后再缓慢恢复到 p_∞ 。轴线速度分布取附录 B 的等半径涡柱模型（轻载下的一阶近似；它在盘处给出的“速度减少量为尾流的一半”与动量理论的结论一致，而 $a = 1/3$ 并非轻载，曲线只作示意）；三条水平虚线的位置与式 (6.5)、(6.7) 一致 (fig_betz.py 断言)。

第 3 步，伯努利方程，分别在盘前、盘后沿流线使用（跨盘不能用）：

$$p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_+ + \frac{1}{2}\rho u_d^2, \quad (6.2)$$

$$p_- + \frac{1}{2}\rho u_d^2 = p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho u_w^2. \quad (6.3)$$

两式相减， u_d 与 p_{∞} 都消去：

$$\Delta p = p_+ - p_- = \frac{1}{2}\rho (U^2 - u_w^2). \quad (6.4)$$

第 4 步，令两种算法给出的推力相等， $A\Delta p = \rho A u_d (U - u_w)$ ：

$$\frac{1}{2}\rho A (U - u_w)(U + u_w) = \rho A u_d (U - u_w).$$

约去 $\rho A (U - u_w)$ ($U \neq u_w$)：

$$u_d = \frac{U + u_w}{2}. \quad (6.5)$$

这就是 **Froude 定理** [31]：盘处的速度恰为上游与尾流速度的平均，速度的减少一半发生在盘前、一半发生在盘后。

推导：取走的功率

风力机取走的功率等于单位时间流过的空气损失的动能（盘外无耗散、压强首尾相同）：

$$P = \frac{1}{2}\dot{m} (U^2 - u_w^2). \quad (6.6)$$

另一种看法：每单位体积空气穿过盘时“掉了”压强 Δp ，即损失了单位体积的机械能 Δp ；体积流量为 $A u_d$ ，所以 $P = \Delta p A u_d = T u_d$ 。用式 (6.4) 与质量流量 $\dot{m} = \rho A u_d$ 可验证两者相同。注意 $P = T u_d$ 中的速度是空气在盘处相对盘的速度，不是 U 。

6.3 Betz 极限

定义：轴向诱导因子、功率系数与推力系数

定义 a 使 $u_d = U(1 - a)$ ；由式 (6.5) 得

$$\begin{aligned} u_d &= U(1 - a), \\ u_w &= U(1 - 2a). \end{aligned} \quad (6.7)$$

功率与推力用“若风毫无减速地穿过盘面”的动能通量 $\frac{1}{2}\rho A U^3$ 与动压力 $\frac{1}{2}\rho A U^2$ 归一： $C_P = P/(\frac{1}{2}\rho A U^3)$ ， $C_T = T/(\frac{1}{2}\rho A U^2)$ 。

推导： $C_P(a)$ 与最大值

把式 (6.7) 代入 $T = \dot{m}(U - u_w)$ ， $\dot{m} = \rho A U(1 - a)$ ， $U - u_w = 2aU$ ： $T = 2\rho A U^2 a(1 - a)$ 。再乘以 $u_d = U(1 - a)$ 得 $P = 2\rho A U^3 a(1 - a)^2$ 。归一化：

$$C_P = 4a(1 - a)^2, \quad C_T = 4a(1 - a). \quad (6.8)$$

求极值： $\frac{dC_P}{da} = 4(1-a)(1-3a)$ 。在 $0 < a < 1/2$ 内唯一驻点 $a = 1/3$ ，且 $a < 1/3$ 时导数为正、 $a > 1/3$ 时为负，故为最大值：

$$\begin{aligned} C_{P,\max} &= C_P(1/3) = \frac{16}{27} \approx 0.593, \\ C_T(1/3) &= \frac{8}{9}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

要点：为什么不能取走全部动能

要多取能量，就要让尾流更慢 ($u_w \rightarrow 0$)；但空气必须流走，尾流越慢，流管越粗 ($A_w = \dot{m}/(\rho u_w)$)，在给定盘面积下能流过盘的空气就越少。两者折中于 $a = 1/3$ ：此时尾流速度为 $U/3$ ，盘处速度为 $2U/3$ 。若改用实际流过盘的上游截面 $A_\infty = A(1-a)$ 计算，取走的比例为 $P/(\frac{1}{2}\rho A_\infty U^3) = 4a(1-a)$ ，在 $a = 1/3$ 时是 $8/9$ ——流过盘的空气其实被取走了 89% 的动能，只是有一部分风从盘外绕过去了。

检验

(1) $a = 0$ ：没有阻滞， $C_P = C_T = 0$ 。(2) $a = 1/2$ ：尾流速度为零，式 (6.7) 的适用边界； $a > 0.4$ 左右实际尾流变成湍流，简单动量理论失效。(3) 量纲： $P/(\rho AU^3)$ 无量纲。(4) 数值： C_P 的极大与 $16/27$ 在 `fig_betz.py` 与 `verify_sympy.py` 中核对。

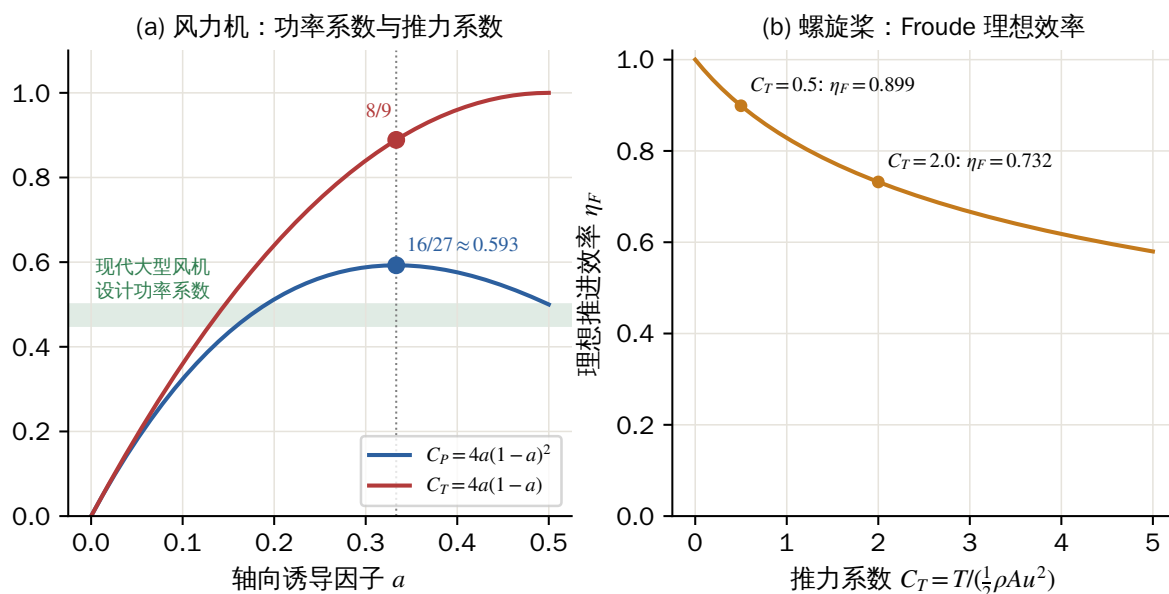


图 6 (a) 致动盘风力机的 C_P 、 C_T 随轴向诱导因子 a ；绿色带为现代大型风机的设计功率系数（NREL 5 MW 峰值 0.482[24]、IEA 15 MW 设计点 0.489[25]）。(b) 螺旋桨的 Froude 理想推进效率随推力系数，式 (6.12)。

现实风机 现代大型风机的峰值或设计点 C_P 约 0.48–0.49（图 6），比 $16/27$ 低约 0.1。主要损失来自：叶片的型阻（升阻比有限）、叶尖处的绕流损失、以及尾流旋转（叶轮受反扭矩，必然使尾流反向旋转而带走动能）[32]。后者与叶尖速比 $\lambda = \Omega R/U$ （叶尖线速度与风速之比， Ω 为叶轮角速度、 R 为叶片半径）有关： λ 越大，产生同样功率所需的扭矩越小，旋转损失越小，这就是大型

风机叶尖速比取 7–9 的原因之一 [24, 25]。

交互演示：致动盘流管动画：拖动 a 观察流管形状、轴线速度与 C_P 、 C_T ；切换到“螺旋桨”模式观察加速流管与 Froude 效率。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 sailing-betz）。

6.4 螺旋桨：Froude 推进效率

同一个模型反过来用：螺旋桨对空气做功，使气流加速。在随螺旋桨平动的惯性系中，来流速度为 u （即螺旋桨相对远处静止空气的前进速度），盘处速度 $u + w$ ，由 Froude 定理尾流为 $u + 2w$ 。 w 称为诱导速度。

推导：推力、轴功率与效率

动量定理（流体获得向后的动量）：

$$T = \dot{m} [(u + 2w) - u] = 2\rho A(u + w)w. \quad (6.10)$$

螺旋桨交给空气的功率是空气动能的增加率： $P_s = \frac{1}{2}\dot{m}[(u + 2w)^2 - u^2] = \dot{m} \cdot 2w(u + w)$ ，即

$$P_s = T(u + w). \quad (6.11)$$

螺旋桨的“有用功率”是推力对静止空气系中前进的车所做的功率 Tu （空气系是自然的选择：在其中“推着车前进”才是目的，尾流动能是浪费）。于是理想推进效率

$$\eta_F = \frac{Tu}{P_s} = \frac{u}{u + w}.$$

用推力系数 $C_T = T/(\frac{1}{2}\rho Au^2)$ 表示：由式 (6.10)，令 $\kappa = w/u$ ，有 $C_T = 4\kappa(1 + \kappa)$ ，解出正根 $\kappa = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + C_T} - 1)$ ，于是

$$\eta_F = \frac{1}{1 + \kappa} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + C_T}}. \quad (6.12)$$

要点：轻载才高效

$C_T \rightarrow 0$ （大桨盘、小推力）时 $\eta_F \rightarrow 1$ ；推力越集中在小面积上，尾流越快，浪费的动能越多。这一点在 Blackbird 中至关重要：它的螺旋桨直径很大，而所需推力只需克服很小的阻力。式 (6.12) 只依赖于“随盘平动的惯性系”，所以装在匀速行驶的车上同样适用 [33]。

定义：桨距与载荷

真实螺旋桨（或风轮）的叶片截面相对旋转平面有一个安装角，叫**桨距角**（简称桨距）。在给定转速与来流下，改变桨距就改变叶片截面的攻角，从而改变推力的大小，也就是改变致动盘模型中的“载荷”（ C_T 、诱导速度 w 或诱导因子 a ）。可变桨距螺旋桨在运行中调节桨距，相当于在动量理论中自由选择 w 。

6.5 把机翼当作致动盘：诱导阻力的来源

第 3.3 节引用了有限翼展机翼的两个结果：升力线斜率降低(式 (3.12))与诱导阻力(式 (3.13))。有了致动盘理论，就能用动量定理把它们推出来 ($e = 1$ 的理想情形)。

假设：机翼的致动盘模型

取空气静止的参考系，翼展 b 、面积 S 的机翼以速度 V 平飞，产生升力 L 。把机翼看成一个“把空气向下推”的致动盘：它影响的空气是一根截面为以翼展为直径的圆、面积 $A_b = \pi b^2/4$ 的流管，每秒有 $\dot{m} = \rho A_b V$ 的空气流过它，并被赋予向下的速度。(这一“有效截面”是升力线理论对椭圆载荷的结论 [26]；载荷分布不理想时有效截面更小，用 $e < 1$ 描述。) 设下洗很弱， $w \ll V$ (轻载)。

推导：诱导阻力与升力线斜率

第 1 步，翼处下洗与远尾流下洗之比。设机翼处的下洗速度为 w 。这里不能直接套用第 6.2 节的伯努利论证：那里速度变化沿穿流方向，而这里下洗与穿流方向垂直。“翼处下洗为远尾流的一半”的依据是尾随涡：下洗由翼尖拖出的尾随涡系产生，涡系从翼处开始向下游延伸到无穷远；翼处的诱导速度是这个半无限长涡系端面上的值，远尾流处则相当于两端都无限长。这与附录 B 中半无限长螺线管“端面磁场为内部的一半”是同一数学事实。于是远尾流下洗速度为 $2w$ 。

第 2 步，动量定理。空气每秒获得向下的动量 $\dot{m} \cdot 2w$ ，等于机翼对空气的向下推力，其反作用力就是升力：

$$L = 2\rho A_b V w \implies w = \frac{L}{2\rho A_b V}.$$

第 3 步，能量。空气每秒获得的动能 $\frac{1}{2}\dot{m}(2w)^2 = 2\rho A_b V w^2 = Lw$ ，这是维持升力必须付出的功率（螺旋桨尾流的 Froude 损失）。它只能来自克服一个阻力所做的功 $D_i V$ ，于是诱导阻力

$$D_i = \frac{Lw}{V} = \frac{L^2}{2\rho A_b V^2} = \frac{L^2}{\frac{1}{2}\rho V^2 \cdot \pi b^2}.$$

用 $L = C_L \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 S$ 化成系数： $C_{Di} = D_i/(\frac{1}{2}\rho V^2 S) = C_L^2 S/(\pi b^2)$ ，即

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi AR}, \quad (6.13)$$

正是式 (3.13) 中 $e = 1$ 的 kC_L^2 。

第 4 步，有效攻角。机翼处空气以 w 向下运动，翼感到的来流向偏转了 w/V (小角度)，有效攻角为 $\alpha - w/V$ ，而翼剖面按二维规律产生升力： $C_L = a_0(\alpha - w/V)$ 。由第 2 步， $w/V = L/(2\rho A_b V^2) = C_L/(\pi AR)$ 。代入并解出 C_L ：

$$C_L = a_0\alpha - \frac{a_0 C_L}{\pi AR} \implies \frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{a_0}{1 + a_0/(\pi AR)},$$

即式 (3.12) 中 $e = 1$ 的情形。

要点：诱导阻力是升力的“Froude 损失”

机翼与螺旋桨是同一件事：都是靠给一股空气动量来获得力，代价是这股空气带走的动能。给定的力分摊到越多的空气上（翼展越大、飞得越快），所需的速度变化越小，浪费越少——这与“螺旋桨轻载才高效”完全相同。所以 $k \propto 1/AR$ ：高性能翼帆、滑翔机都细长。

7 顺风比风快：Blackbird

7.1 悖论

一辆车正顺风行驶，风速 W ，车速 V 。“车速达到 W 时车上无风，所以 V 不可能超过 W ”——这个论证对只靠风推的物体（降落伞、横帆船）是对的（第 4.3 节第 3 条结论）。但第 4.4 节已经告诉我们，冰帆船走之字形时顺风 VMG 可以远超风速；那里能量的“来源”是帆与冰面同时被利用。Blackbird 把“之字形”换成了一套机械：车轮从地面取功率，螺旋桨用这份功率向后推空气。

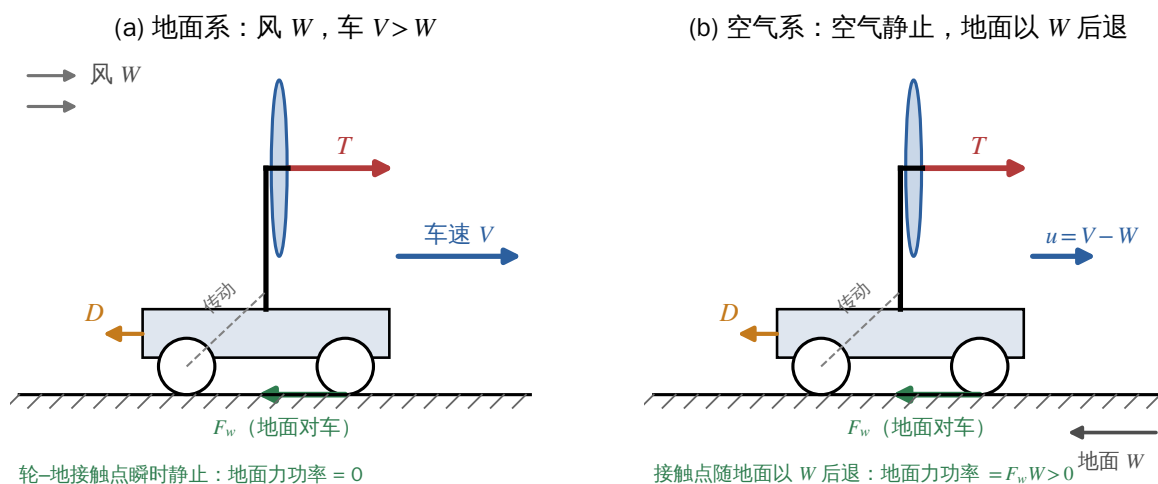


图 7 Blackbird 型顺风车示意。车轮经传动（虚线）驱动螺旋桨；地面对车的力 F_w 向后，螺旋桨推力 T 向前， D 为车体阻力。(a) 地面系：轮-地接触点瞬时静止， F_w 不做功。(b) 空气系：接触点随地面以 W 后退， F_w 做正功 $F_w W$ 。

7.2 模型

假设：Blackbird 稳态模型

1. 均匀风速 W ，车沿风向直线匀速行驶，车速 $V > W$ ；车相对空气以 $u = V - W > 0$ 前进，即车上感到迎面的风 u 。
2. 车轮纯滚动：轮心速度 V ，角速度 $\omega = V/R$ （接触点瞬时静止）。地面对车轮的切向力大小为 F_w 、方向向后（车轮在“发电”，受制动）。
3. 车轮经传动驱动螺旋桨：传到螺旋桨的轴功率 $P_s = \eta_w F_w V$ ， η_w 为车轮-传动效率。
4. 螺旋桨效率按第 6.4 节在空气系中定义： $\eta_p = Tu/P_s$ 。总效率 $\eta = \eta_w \eta_p$ 。

5. 其他阻力（车体空气阻力、滚动阻力）合记为 D ，方向向后。

推导：车轮取得的功率

车轮受地面切向力 F_w （作用在接触点，向后），它对轮心的力矩为 $F_w R$ ，阻碍车轮转动。传动轴从车轮取出的功率等于这个力矩与角速度之积： $F_w R \cdot \omega = F_w R \cdot V/R = F_w V$ 。注意这里的 V 是车对地的速度：车轮“看到”的是以 V 迎面而来的地面。

7.3 力与功率平衡

推导： V/W 的公式

第 1 步，力平衡（稳态，车所受合力为零）：

$$T = F_w + D. \quad (7.1)$$

第 2 步，功率链：车轮取 $F_w V$ ，传到螺旋桨 $\eta_w F_w V$ ，变成有用推进功率 Tu ：

$$T(V - W) = \eta_w \eta_p F_w V = \eta F_w V. \quad (7.2)$$

第 3 步，用式 (7.1) 消去 $F_w = T - D$ ，两边除以 T ： $V - W = \eta V(1 - D/T)$ 。解出

$$\boxed{\frac{V}{W} = \frac{1}{1 - \eta(1 - D/T)}} \quad (7.3)$$

无额外阻力 $D = 0$ 时

$$\frac{V}{W} = \frac{1}{1 - \eta}. \quad (7.4)$$

检验

(1) $\eta \rightarrow 0$: $V \rightarrow W$ ，车就像一张被风推着走的纸。(2) $\eta \rightarrow 1$ 、 $D \rightarrow 0$: $V/W \rightarrow \infty$ ，没有上限。(3) $D/T \rightarrow 1$: 推力全用来克服阻力，车轮不取功率， $V \rightarrow W$ 。(4) 由纪录反推：2.8 倍需 $\eta \geq 1 - 1/2.8 = 0.643$ ($D > 0$ 时还要更高)。(5) 量纲：两边无量纲。sympy 核对见 `verify_sympy.py`。

要点：杠杆与变速器

关键在于两个速度不同：车轮在相对地面的速度 V 上取得功率，螺旋桨在相对空气的较小速度 $u = V - W$ 上花掉功率。同样的功率，在低速一侧能换来更大的力： $T = \eta F_w V/u > F_w$ 。所以螺旋桨推力可以大于车轮的制动力，二者之差去克服阻力并维持匀速。这和杠杆“用小力走长距离换大力走短距离”是同一回事 [34]。

7.4 两个参考系的功率账本

为了把能量问题彻底说清，把滚动阻力 F_{rr} 从 D 中分出来： $D = D_a + F_{rr}$ ， D_a 为车体空气阻力。滚动阻力来自轮胎变形的滞后，耗散功率 $F_{rr} V$ (V 是轮胎相对地面的滚动速度)，发生在车内。地面对车的切向力总计为 $F_w + F_{rr}$ （向后）。

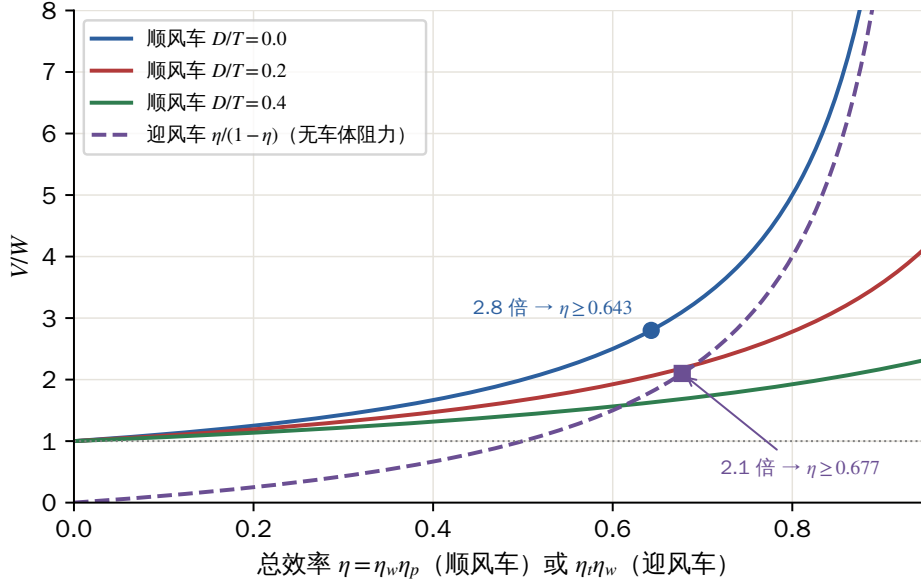


图 8 顺风车 V/W 随总效率 η (式 (7.3), 三条实线对应不同 D/T) 与迎风车 $V/W = \eta/(1-\eta)$ (虚线, 式 (7.7))。标出 Blackbird 2010 年顺风 2.8 倍与 2012 年迎风 2.1 倍纪录 [9, 10] 所需的最低等效效率。

推导：地面系与空气系

地面系。地面力作用在瞬时静止的接触点上，功率为 0。空气对车的功率分三部分：推力作用在随车前进的桨上 TV ；空气对旋转叶片的阻力矩吸收轴功率 $-P_s$ ；车体阻力 $-D_a V$ 。合计

$$P_{\text{空气} \rightarrow \text{车}}^{\text{地}} = TV - P_s - D_a V.$$

空气系。车以 $u = V - W$ 前进，地面以 W 后退。地面力（向后）作用在随地面后退的接触点上，功率 $(F_w + F_{rr})W > 0$ ；空气对车的功率为 $Tu - P_s - D_a u$ 。

核对。用 $T = F_w + F_{rr} + D_a$ 与 $P_s = \eta_w F_w V$ 化简，两系中作用于车的外力总功率都等于

$$(1 - \eta_w)F_w V + F_{rr}V = \text{车内耗散（传动 + 轮胎）},$$

与式 (3.8) 一致。空气中的耗散（尾流动能、叶片型阻损失、车体尾流）为 $P_s - Tu + D_a u$ ，它由力与相对速度构成，也与参考系无关。两项之和

$$P_{\text{总耗散}} = (F_w + F_{rr})W = (T - D_a)W, \quad (7.5)$$

正是式 (3.9)：空气对车的净力 $T - D_a$ 乘以空气相对地面的速度 W 。

要点：能量到底从哪里来？

- **地面系：**地面不做功，能量来自风的动能。螺旋桨向后推空气，使风减速；风的（质心）动能以 $(T - D_a)W$ 的速率减少。
- **空气系：**空气原本静止，没有动能可取；能量来自运动着的大地。车通过车轮对大地施加向前的力 $F_w + F_{rr}$ ，而大地以 W 向后运动，于是大地的动能以 $(F_w + F_{rr})W$ 的速率减少（大地质量极大，速度变化不可察觉，但动能变化率 $\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{p}}$ 是有限的）。

表 3 Blackbird 两系功率账本 (单位: 瓦)。状态取自例题 2: 风速 $W = 5 \text{ m/s}$, 车速 $V = 12.5 \text{ m/s}$, 螺旋桨推力 $T = 257.1 \text{ N}$, 车轮制动力 $F_w = 206.9 \text{ N}$, 滚动阻力 $F_{rr} = 30 \text{ N}$, 车体气动阻力 $D_a = 20.3 \text{ N}$, 轴功率 $P_s = 2457 \text{ W}$, $\eta_w = 0.95$

项目	地面系	空气系
地面对车的功率	0	+1184
空气对车的功率	+504	-680
车内耗散 (传动 + 轮胎)	504	504
空气中耗散 (尾流 + 叶片 + 车体)	680	680
总耗散 = $(T - D_a)W$	1184	1184

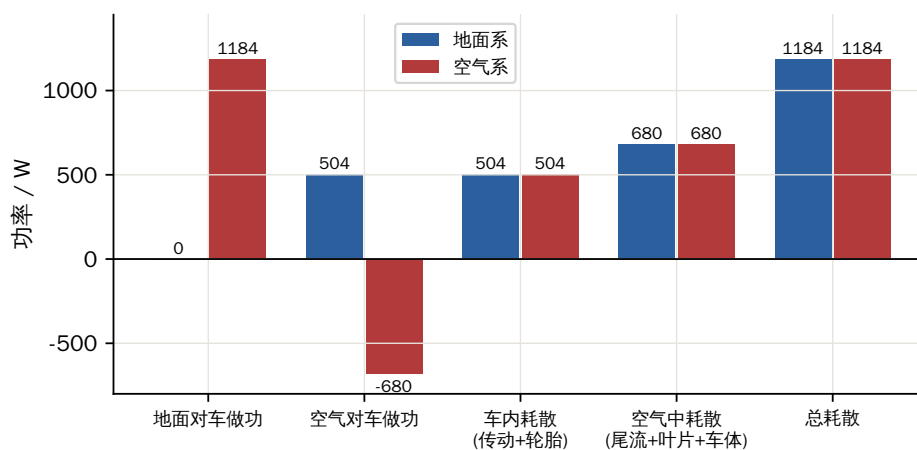


图 9 表 3 的柱状图 (fig_blackbird.py 计算并断言两系总和相等)。各力的功率随参考系变化, 耗散不变。

- 两个回答同样正确，它们是“空气-大地相对运动的能量”的两种记法。没有任何参考系里出现能量不守恒。常见的错误直觉，是只在地面系中考虑“车速超过风速后迎面风阻碍车前进”，而忽略了车轮与地面的耦合。

7.5 致动盘螺旋桨的理想极限

把第 6.4 节的螺旋桨模型代入，看看“理想 Blackbird”的流场。取 $\eta_w = 1$ 、 $D = 0$ ，螺旋桨为理想致动盘。

推导：空气在桨盘处静止

力平衡 $T = F_w$ ；功率：轴功率 $P_s = F_w V = TV$ 。另一方面，由式 (6.11)， $P_s = T(u + w)$ 。两者相等得 $u + w = V$ ，即

$$w = V - u = W. \quad (7.6)$$

回到地面系：盘处空气速度 = 车速 - (空气相对盘的速度) = $V - (u + w) = 0$ ；远尾流空气速度 = $V - (u + 2w) = -W$ 。

要点：“把风反射回去”

理想 Blackbird 让桨盘处的空气相对地面静止，并把尾流以速度 W 逆着风抛出。在地面系中，空气从 $+W$ 变成 $-W$ ，动能不变——符合“理想地面系中地面不做功、车内无耗散”。在空气系中，空气从静止变成以 $2W$ 后退的尾流，获得动能 $\frac{1}{2}\dot{m}(2W)^2 = 2\rho AVW^2 = TW$ ，恰由大地提供 ($F_w W = TW$)。这份尾流动能就是 Froude 损失：此时 $\eta_F = u/(u + W) = 1 - W/V$ ，代入式 (7.4) 自动满足。因此没有阻力时任何车速都满足平衡（随遇平衡），**车速上限完全由阻力决定**。

推导：地面系里“动能不变”与“耗散 TW ”如何同时成立

前面有两句话看似矛盾：地面系中流过桨盘的空气“动能不变”；式 (7.5) 又说总耗散为 $(T - D_a)W = TW > 0$ 。两者并不矛盾，用柯尼希定理（第 3.2.1 节）把地面系中空气的动能拆成两部分即可看清。

(1) 空气质心动能。螺旋桨以力 T 向后推空气，整团空气的动量以 $\frac{dp_{\text{空}}}{dt} = -T$ 变化，而它的质心以 W 向前运动，于是质心动能的变化率为 $W \cdot (-T) = -TW$ 。

(2) 相对质心的“内部”动能。在随空气质心运动的参考系（即空气系）中，流过桨盘的空气由静止变为以 $2W$ 后退，内部动能以 $\frac{1}{2}\dot{m}(2W)^2 = TW$ 的速率增加。

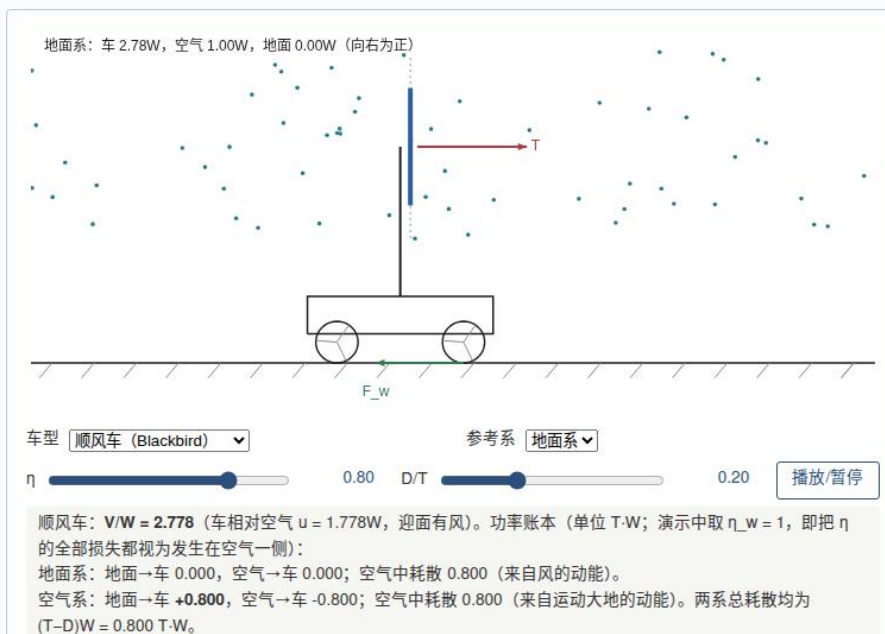
两项相加为零，所以地面系中空气的总动能确实不变。但其中第 (2) 项——尾流相对周围空气的动能——会通过湍流与黏性最终变成热，这才是“耗散”。它只与相对速度有关，在任何参考系中都是 TW ；地面系中它的“来源”正是第 (1) 项，即风的质心动能的减少。

检验：只有恒定阻力时车速无上限

若部件理想 ($\eta_w = 1$)，而阻力只是与速度无关的滚动阻力 F_r ，由 $T = F_w + F_r$ 、 $T(u + w) = F_w V$ 与式 (6.10) 消去 T 、 F_w 得 $2\rho A(u + w)w(W - w)/V = F_r$ 。当 $V \rightarrow \infty$ 时 $(u + w)/V \rightarrow 1$ ，左边对 w 的最大值趋于 $2\rho A \cdot W^2/4 = \frac{1}{2}\rho AW^2$ 。所以只要 $F_r < \frac{1}{2}\rho AW^2$ ，任意高的车速都存在平

衡解。对例题 2 的桨盘（直径 5.2m）与 $W = 5 \text{ m/s}$ ，临界阻力约 319 N (verify_numeric.py)。现实中限制车速的是随 u^2 增长的车体气动阻力和 η_w 、叶片效率小于 1。

交互演示：顺风车/迎风车的功率流动画：切换地面系与空气系，观察哪些物体在运动、哪些力做功；拖动 η 与 D/T 得到 V/W 与两系功率账本。



网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 sailing-blackbird）。

7.6 迎风车与对称性

把 Blackbird 的“齿轮倒过来”：车上装风力机，风力机取得的功率经传动驱动车轮，车正迎风行驶。设风速 W 、车速 V （迎风为正），车相对空气的速度为 $V + W$ 。

推导：迎风车的速度比

风力机按第 6.3 节在随车系中工作，来流速度 $V + W$ ；它受风的阻力 D_t （向后），取得功率 $P_t = \eta_t D_t (V + W)$ ， $\eta_t \equiv P_t / [D_t (V + W)]$ 称为风力机的“取能效率”（理想致动盘 $P_t = T u_d$ ，故 $\eta_t = 1 - a$ ）。功率经传动以效率 η_w 送到车轮，车轮对地面的驱动力 F 在对地速度 V 上做功： $FV = \eta_w P_t$ 。车体阻力 D_b 。

$$\text{力平衡: } F = D_t + D_b, \quad \text{功率: } (D_t + D_b)V = \eta D_t (V + W), \quad \eta = \eta_t \eta_w.$$

解出

$$\frac{V}{W} = \frac{\eta}{1 - \eta + D_b/D_t} \xrightarrow{D_b=0} \frac{\eta}{1 - \eta}. \quad (7.7)$$

无阻力时， $\eta > 1/2$ 即可迎风比风快。比较式 (7.4)：同样的 η 下，顺风车速 $W/(1 - \eta)$ 减去 W 恰好等于迎风车速 $\eta W/(1 - \eta)$ 。这不是巧合：

要点：对称性：交换空气与地面

在空气系中看顺风车：空气静止，“地面风”以 W 向后吹，车以 $u = V - W$ 相对空气前进，车轮在“地面风”中取能（相当于风力机），螺旋桨在静止的空气中推进（相当于车轮在静止的地面上驱动）。这正是一辆“逆着地面风行驶的迎风车”。所以顺风车相对空气的速度、与对应的迎风车相对地面的速度服从同一公式 $\eta/(1 - \eta)$ ；两类车只是同一原理在两个介质间交换了角色 [33]。

现实 Racing Aeolus 风力机车赛 2008 年在荷兰 Den Helder 首办，2009–2010 年在丹麦举行，2011 年起回到 Den Helder（2020–2021 年因疫情停办），车辆必须正迎风行驶 [35]。成绩逐年提高：2011 年丹麦技术大学（DTU）车约 0.75 倍风速 [10]；2016 年 DTU 首次超过风速（101.76%）[35, 36]；2018 年加拿大 Chinook ETS 约 114%（DTU 新闻报道为 113.9%）[37]；赛事官方页面列出的效率纪录为 120.76%[35]。而 Blackbird 2012 年迎风达 2.1 倍 [10]——它有一副直径很大的轻载风轮（小 a 、高 η_t ），这正是例题 3 要定量说明的。

起动与控制 Gaunaa 等指出，顺风车在 $V < W$ 时风从后方吹向螺旋桨，螺旋桨的工作状态与设计状态相反，需要另行处理 [33]。Blackbird 依靠可变桨距：NALSA 观察员记录它“多次在与纪录相近的风中从静止起动，只是需要一些时间和距离，所以多数测试由人推车起步”；桨与车轮之间是固定传动比，桨的转动惯量不可能被“偷偷”用来加速 [9]。另外，车轮能提供的制动力受摩擦限制 $F_w \leq \mu_s N$ ，这是“牵引约束”在现实中的体现 [34]。

8 决赛风格例题

例题 1：潮流中的迎风航段——“真风”依赖参考系

帆船赛的迎风航段要求从起点驶到正上风方向、固定在海底的浮标。设海水相对海底（下称“地面”）以恒定速度 $\mathbf{c}$ 流动（潮流）。取地面坐标： x 向东， y 向北；相对地面的风（“地面风”）从正北吹来，速度大小 V_g ；浮标在起点正北。帆船的视风角 $\beta = \varepsilon_A + \varepsilon_H$ 为常数，取常规龙骨帆船 $\beta = 26^\circ$ ， $V_g = 6.0 \text{ m/s}$ ；忽略换舷时的速度损失。记静水中迎风 VMG 与风速之比为 $\mathcal{V} = (1 - \sin \beta)/(2 \sin \beta)$ ，船对地向北的最大平均速度为 $\bar{v}_N$ 。

1. 说明为什么航向定理和速度极图（式 (4.1)、(4.4)）必须在水静止的参考系中使用，式中的“真风”应取空气相对哪种介质的速度。计算 $\mathcal{V}$ 与静水中的最佳迎风角。
2. 潮流沿南北方向， $\mathbf{c} = (0, c_y)$ 。求水系中的真风，并证明 $\bar{v}_N = \mathcal{V}V_g + (1 + \mathcal{V})c_y$ 。对 $c_y = \pm 1.0 \text{ m/s}$ 计算 $\bar{v}_N$ ，并解释系数 $1 + \mathcal{V}$ 的两部分来源。
3. 潮流向东， $\mathbf{c} = (c_x, 0)$ ， $c_x = 1.5 \text{ m/s}$ 。船上的风速仪与计程仪测得的“真风”是什么？求它的大小 V_T' 与方向（来向偏离正北的角 θ ）。
4. 船只能在左舷来风、右舷来风两个航向之间交替（换舷）。证明：以时间比例 ϕ 、 $1 - \phi$ 交替航行时，平均对地速度位于两舷对地速度矢量端点的连线上；进而说明要正对浮标前进，最优的平均速度是对地速度极图（两段圆弧）的上公切线与 y 轴的交点。

5. 利用水系中两个极图圆的几何, 证明 $\bar{v}_N = \mathcal{V}V_g + (1 + \mathcal{V})c_x^2/V_g$, 并说明此式成立需要什么条件。(更一般地, $\bar{v}_N = \mathcal{V}V_g + (1 + \mathcal{V})[c_y + c_x^2/(V_g + c_y)]$ 。)
6. 代入数值, 求 $\bar{v}_N$ 、两舷各自的对地航向、时间分配, 以及迎风航行 1 海里 (1852 m) 所需时间, 与静水比较。若船员只走“北向分量最大”的那一舷, 会发生什么?
7. 在本题中, 帆船利用的是哪两种介质之间的相对运动? 与参考系无关的耗散由什么决定?

解答

(1) 帆力只取决于空气相对船的速度 (视风), 龙骨力只取决于水相对船的速度; 两者都与海底无关。航向定理用到的“航向”是船相对水的速度方向, 速度三角形 $\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_T - \mathbf{V}_s$ 中的 $\mathbf{V}_s$ 是船对水的速度, 所以 $\mathbf{V}_T$ 必须是空气相对水的速度。整套理论在水系中成立, 再用伽利略变换回到地面系: 对地速度 = 对水速度 + $\mathbf{c}$ 。 $\beta = 26^\circ$: $\mathcal{V} = (1 - \sin 26^\circ)/(2 \sin 26^\circ) = 0.6406$, $\gamma^* = 45^\circ + 13^\circ = 58^\circ$; 静水中 $\bar{v}_N = \mathcal{V}V_g = 3.844 \text{ m/s}$ 。

(2) 水系中真风 $\mathbf{V}'_T = \mathbf{V}_s - \mathbf{c} = (0, -V_g - c_y)$: 仍从正北来, 大小 $V_g + c_y$ 。水系中最优迎风平均速度为 $\mathcal{V}(V_g + c_y)$ (正北), 再加上水对地的 c_y :

$$\bar{v}_N = \mathcal{V}(V_g + c_y) + c_y = \mathcal{V}V_g + (1 + \mathcal{V})c_y.$$

系数中的“1”是水把船整体带走; “ $\mathcal{V}$ ”是潮流改变了水系中的真风大小。 $c_y = +1.0 \text{ m/s}$ (潮流流向上风): $\bar{v}_N = 5.484 \text{ m/s}$; $c_y = -1.0 \text{ m/s}$: $\bar{v}_N = 2.203 \text{ m/s}$, 分别是静水的 1.43 倍与 0.57 倍。【要点: 真风取空气对水的速度。】

(3) 风速仪测视风, 计程仪测船对水的速度, 两者按式 (3.2) 合成得到的“真风”是空气相对水的速度:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}'_T &= (0, -V_g) - (c_x, 0) = (-c_x, -V_g), \\ V'_T &= \sqrt{V_g^2 + c_x^2} = 6.185 \text{ m/s}, \quad \tan \theta = \frac{c_x}{V_g}, \quad \theta = 14.04^\circ. \end{aligned}$$

船上感到风从北偏东 14.04° 吹来, 且比地面风更强。

(4) 设两舷的对地速度分别为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, 在时间 τ 内分别航行 $\phi\tau, (1 - \phi)\tau$, 总位移为 $\tau[\phi\mathbf{v}_1 + (1 - \phi)\mathbf{v}_2]$, 平均速度 $\bar{\mathbf{v}} = \phi\mathbf{v}_1 + (1 - \phi)\mathbf{v}_2$, $0 \leq \phi \leq 1$, 正是连接两端点的线段上的点。把两舷所有可能的对地速度端点画在同一张图上, 所有“任取两点、连线上的点”组成的区域叫这组点的凸包 (包含这些点、且其中任意两点的连线都在其内的最小区域); 它就是所有可达的平均速度。要正对浮标前进, 需 $\bar{v}_x = 0$, 所以最优值是凸包与正 y 轴的交点; 在两段圆弧上方, 凸包的边界就是两圆的上公切线 (图 10)。

(5) 在水系中, 以 $\hat{\mathbf{s}} = (\sin \theta, \cos \theta)$ 表示真风来向, $\hat{\mathbf{p}} = (\cos \theta, -\sin \theta)$ 与之垂直 (指向东偏南)。由式 (4.4), 两舷的极图圆都过原点和 $\mathbf{V}'_T$ 的端点, 半径 $R = V'_T/(2 \sin \beta)$, 圆心关于风轴对称: $\mathbf{C}_\pm = -\frac{V'_T}{2}\hat{\mathbf{s}} \pm \frac{V'_T \cot \beta}{2}\hat{\mathbf{p}}$ (“+”为左舷来风、向东一舷, “-”为右舷来风、向西一舷)。两圆半径相同, 上公切线平行于圆心连线 (沿 $\hat{\mathbf{p}}$), 并沿 $\hat{\mathbf{s}}$ 方向离圆心 R :

$$\mathbf{v}_k(\xi) = \left(R - \frac{V'_T}{2}\right)\hat{\mathbf{s}} + \xi\hat{\mathbf{p}} = \mathcal{V}V'_T\hat{\mathbf{s}} + \xi\hat{\mathbf{p}}, \quad |\xi| \leq \xi_{\max} \equiv \frac{1}{2}V'_T \cot \beta,$$

其中用到 $R - V'_T/2 = V'_T(1 - \sin \beta)/(2 \sin \beta) = \mathcal{V}V'_T$; 参数 ξ (单位 m/s) 沿公切线度量位置, 两端 $\xi = \pm \xi_{\max}$ 是切点。对地速度为 $\mathbf{v}_k + \mathbf{c}$ 。令 x 分量为零: $\mathcal{V}V'_T \sin \theta + \xi \cos \theta + c_x = 0$, 用

$V'_T \sin \theta = c_x$ 、 $V'_T \cos \theta = V_g$ 得 $\xi = -(1 + \mathcal{V})c_x / \cos \theta$ 。代入 y 分量：

$$\bar{v}_N = \mathcal{V}V'_T \cos \theta - \xi \sin \theta = \mathcal{V}V_g + (1 + \mathcal{V})c_x \tan \theta = \mathcal{V}V_g + (1 + \mathcal{V})\frac{c_x^2}{V_g}.$$

成立条件是交点落在公切线段上， $|\xi| \leq \xi_{\max}$ ，即 $(1 + \mathcal{V})c_x / \cos \theta \leq \frac{1}{2}V'_T \cot \beta$ ；否则最优策略是只走一舷。 c_x 与 c_y 同时存在时，同样的计算给出括号中的一般式。

(6) $\bar{v}_N = 3.844 + 1.6406 \times 1.5^2 / 6 = 4.459 \text{ m/s}$ ，比静水快 16%。 $\xi = -2.537$ ，满足 $|\xi| \leq \xi_{\max} = 6.340$ 。两切点： $\xi = +6.340$ 为左舷来风一舷，对地速度 $(8.61, 2.31) \text{ m/s}$ ，对地航向北偏东 75.0° ； $\xi = -6.340$ 为右舷来风一舷，对地速度 $(-3.69, 5.38) \text{ m/s}$ ，对地航向北偏西 34.4° 。时间分配：东行一舷 $\phi = (\xi + \xi_{\max}) / (2\xi_{\max}) = 0.300$ ，西行一舷 0.700。验证： $0.300 \times 8.61 + 0.700 \times (-3.69) \approx 0$ ， $0.300 \times 2.31 + 0.700 \times 5.38 = 4.46$ 。1 海里用时 $1852 / 4.459 = 415 \text{ s}$ ，静水 $1852 / 3.844 = 482 \text{ s}$ 。若只走北向分量最大的一舷（右舷来风一舷极图圆的最高点，对地速度 $(-5.40, 5.59) \text{ m/s}$ ），船同时以 5.4 m/s 向西漂离，到不了浮标；必须按 3:7 的时间比例在东行、西行两舷间分配。（scripts/ex1_current.py 对所有情形用穷举两舷组合的方法独立核对了 $\bar{v}_N$ 。）

(7) 帆力与龙骨力只涉及空气对水、水对船的相对运动，所以帆船利用的是空气相对水的运动 V'_T 。与参考系无关的总耗散为 $F_A \cdot V'_T$ （式 (3.9)，介质 1 为空气、介质 2 为水），只由空气相对水的速度决定。“能量从哪里来”则依赖参考系：例如在地面系中，水对船的力 F_H 以船的对地速度 $V_s + c$ 做功，不为零。潮流改变的是空气相对水的速度 V'_T ，以及水系与地面系之间的速度换算。这再次说明：“真风”是相对于船所接触的另一介质定义的。

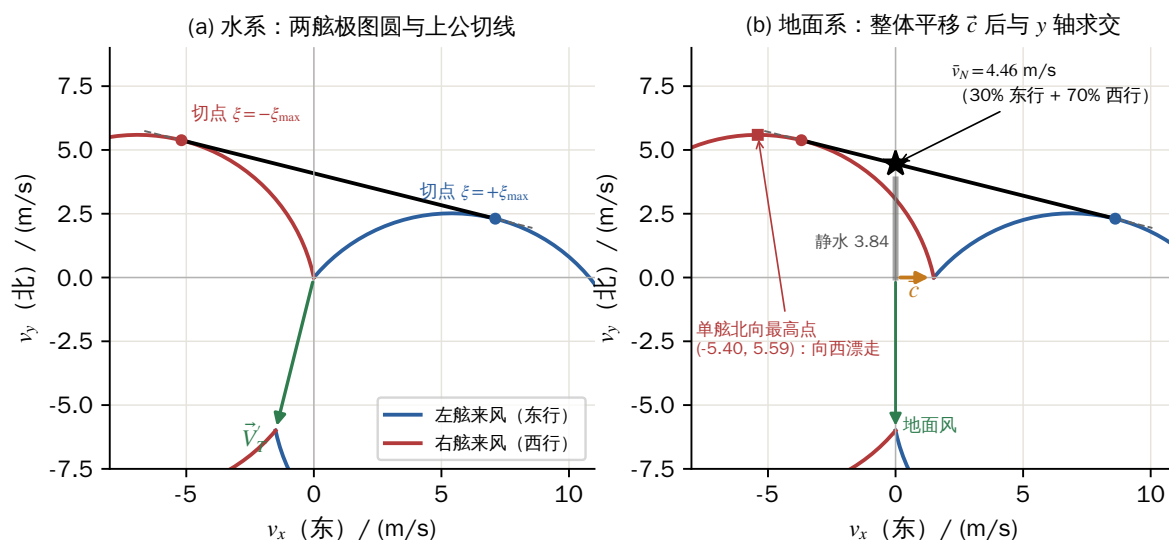


图 10 例题 1 的几何解法 ($\beta = 26^\circ$, $V_g = 6 \text{ m/s}$, $c = (1.5, 0) \text{ m/s}$)。 (a) 水系：左舷来风（东行）与右舷来风（西行）两段极图圆弧都过原点和水系真风 V'_T 的端点；黑线为上公切线，圆点为两切点 $\xi = \pm \xi_{\max}$ 。 (b) 地面系：整体平移 c 后，公切线与 y 轴的交点（星号）给出 $\bar{v}_N = 4.46 \text{ m/s}$ ；方块为右舷来风一舷的北向最高点，走这一舷会向西漂走。图中各点由 scripts/ex1_current.py 计算并断言核对。

例题 2: Blackbird 的完整模型与功率账本

一辆顺风车在风速 $W = 5.0 \text{ m/s}$ 中正顺风行驶。螺旋桨直径 5.2 m (盘面积 $A = 21.24 \text{ m}^2$)，视为致动盘；但叶片有型阻与旋转损失：轴功率 P_s 中只有比例 $\eta_b = 0.85$ 转化为致动盘的轴向功率 $T(u+w)$ ($u = V - W$, w 为诱导速度)。车轮-传动效率 $\eta_w = 0.95$ 。车体阻力面积 $C_D S = 0.60 \text{ m}^2$ (相对空气速度为 u)，滚动阻力 $F_{rr} = 30 \text{ N}$ 。空气密度 $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ 。(以上为假想参数，量级参照 Blackbird 这类大桨盘顺风车。)

- 有人说：“车速超过风速后车上迎面有风，风只会阻碍车，所以不可能。”指出这个论证漏掉了什么。
- 设总效率为 η 、总阻力为 D 、推力为 T ，推导稳态 V/W 。
- 设测得车速 $V = 2.5W$ 。写出诱导速度 w 满足的方程，并用迭代求出 w ；进而求 T 、 F_w 、 P_s 、Froude 效率 η_F 与总效率 $\eta = \eta_w \eta_b \eta_F$ ，验证第 2 问的公式。
- 分别在地面系与空气系中列出各力的功率与各项耗散，说明两系中“能量来源”的不同说法。
- 证明无论螺旋桨载荷如何选择，车速都不能超过 $W/(1 - \eta_w \eta_b)$ ，并说明真正的最大车速由什么决定。

解答

(1) 风确实对车体有阻力；但车还与地面耦合。车轮在对地速度 V 上取得功率 $F_w V$ ，螺旋桨在相对空气的速度 $u = V - W < V$ 上花掉这份功率，于是 $T = \eta F_w V / u$ 可以大于 F_w 。论证只考虑了一种介质。

(2) 力平衡 $T = F_w + D$ ；功率 $Tu = \eta F_w V$ ；消去 F_w 得式 (7.3)： $V/W = 1/[1 - \eta(1 - D/T)]$ 。

(3) $u = 7.5 \text{ m/s}$, $V = 12.5 \text{ m/s}$ 。阻力 $D = \frac{1}{2} \rho C_D S u^2 + F_{rr} = 20.25 + 30 = 50.25 \text{ N}$ 。三条方程： $T = F_w + D$ ； $T(u+w) = \eta_b \eta_w F_w V$ ； $T = 2\rho A(u+w)w$ 。由前两式消去 F_w ： $T \left[1 - \frac{u+w}{\eta' V}\right] = D$ ， $\eta' \equiv \eta_w \eta_b = 0.8075$ ，再代入第三式：

$$2\rho A(u+w)w \frac{\eta' V - u - w}{\eta' V} = D.$$

写成迭代式 $w_{n+1} = D\eta' V / [2\rho A(u+w_n)(\eta' V - u - w_n)]$ ，从 $w_0 = 0$ 出发： $w_1 = 0.512$, $w_2 = 0.597$, $w_3 = 0.615$, ... 收敛到 $w = 0.621 \text{ m/s}$ (这是轻载根；另有一个重载根 $w \approx 2.10 \text{ m/s}$ ，效率低，舍去)。于是

$$T = 2\rho A(u+w)w = 257.1 \text{ N}, \quad F_w = T - D = 206.9 \text{ N}, \quad P_s = \frac{T(u+w)}{\eta_b} = 2457 \text{ W},$$

$$C_T = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho A u^2} = 0.359, \quad \eta_F = \frac{u}{u+w} = 0.9235 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + C_T}}, \quad \eta = \eta_w \eta_b \eta_F = 0.7457.$$

验证： $1/[1 - 0.7457 \times (1 - 50.25/257.1)] = 2.500$ 。【要点：Froude 效率由载荷决定；两种算法一致。】

(4) 见表 3。地面系：地面功率 0；空气对车 $TV - P_s - D_a V = 504 \text{ W}$ ，正好供车内耗散 $(1 - \eta_w)F_w V + F_{rr} V = 129 + 375 = 504 \text{ W}$ ；空气内部还耗散 $P_s - Tu + D_a u = 680 \text{ W}$ (其中致

动盘尾流 $T_w = 160 \text{ W}$ 、叶片损失 $(1-\eta_b)P_s = 369 \text{ W}$ 、车体尾流 $D_a u = 152 \text{ W}$ 。合计 1184 W ，来自风动能的减少。空气系：地面做功 $(F_w + F_{rr})W = 1184 \text{ W}$ ，空气对车 $Tu - P_s - D_a u = -680 \text{ W}$ （车把能量交给空气），车内耗散仍为 504 W 。两系总耗散均为 $(T - D_a)W = 1184 \text{ W}$ 。

(5) 由 $T(u+w) = \eta' F_w V$ 与 $F_w < T (D > 0)$ ，得 $u+w < \eta' V$ ；又 $w > 0$ ，故 $V - W = u < \eta' V$ ，即 $V < W/(1-\eta') = 5.19W$ 。这个上界只在 $w \rightarrow 0$ 、 $D/T \rightarrow 0$ 时趋近，而 $w \rightarrow 0$ 意味着推力趋于零，无法克服阻力。真正的最大车速是方程 $\max_w [2\rho A(u+w)w(\eta'V - u - w)/(\eta'V)] = D(V)$ 的解：车速再高，螺旋桨在任何载荷下都提供不了足够的净推力。数值求解得 $V_{\max} \approx 2.82W$ (verify_numeric.py；附录 D)，与 Blackbird 的 2.8 倍纪录同一量级。

例题 3：迎风风车——为什么最优诱导因子不是 1/3

风力机车正迎风行驶，风速 W ，车速 V 。车上风力机视为面积 A 的理想致动盘，轴向诱导因子 a 相对车上感受到的来流 $u = V + W$ 定义。风力机轴功率经叶片、传动与车轮转为对地驱动功率，总效率 η （即驱动力 F 满足 $FV = \eta P_t$ ， P_t 为致动盘取得的功率）。车体（不含风轮）空气阻力 $D_b = \frac{1}{2}\rho C_D S_b u^2$ ，记 $\sigma = C_D S_b / A$ ；忽略滚动阻力。

1. 用 a 、 u 写出风对风轮的推力 D_t 与功率 P_t 。
2. 求 V/W 作为 a 、 η 、 σ 的函数。
3. $\sigma = 0$ 时， a 取何值 V/W 最大？与 Betz 最优 $a = 1/3$ 比较并解释。
4. $\sigma > 0$ 时，证明最优 a^* 满足 $4a^2(1-a) = \sigma(1-3a)$ ，与 η 无关，且 $a^* < 1/3$ ；讨论 $\sigma \rightarrow \infty$ 。
5. 取 $\eta = 0.8$ 、 $\sigma = 0.2$ ，求 a^* 、 $(V/W)_{\max}$ ，以及按 Betz 设计 ($a = 1/3$) 时的 V/W 。要在 $\sigma = 0.2$ 下迎风比风快， η 至少多大？
6. 用空气-地面对称性，说明本题与 Blackbird 顺风车的关系。

解答

(1) 由式 (6.8)： $D_t = \frac{1}{2}\rho A u^2 \cdot 4a(1-a)$ ， $P_t = \frac{1}{2}\rho A u^3 \cdot 4a(1-a)^2 = D_t u(1-a)$ 。

(2) 力平衡 $F = D_t + D_b$ ，功率 $FV = \eta P_t$ ：

$$[4a(1-a) + \sigma]V = \eta 4a(1-a)^2(V+W).$$

除以 $4a(1-a)$ 并整理：

$$\frac{V}{W} = \frac{\eta(1-a)}{1 + \frac{\sigma}{4a(1-a)} - \eta(1-a)}, \quad \text{或} \quad \frac{W}{V} = \frac{g(a)}{\eta} - 1, \quad g(a) \equiv \frac{1}{1-a} + \frac{\sigma}{4a(1-a)^2}.$$

(与式 (7.7) 一致： $\eta_t = 1-a$ ， $D_b/D_t = \sigma/[4a(1-a)]$ ；也与 Gaunaa 等的结果一致 [33].)

(3) $\sigma = 0$ ： $V/W = \eta(1-a)/[1-\eta(1-a)]$ 随 a 单调减， $a \rightarrow 0$ 最优， $V/W \rightarrow \eta/(1-\eta)$ 。原因：车要的不是功率本身，而是“驱动力减去风轮阻力”。风轮取能效率 $\eta_t = P_t/(D_t u) = 1-a$ ，轻载（小 a ）时每单位风轮阻力换来的功率最多；Betz 的 $a = 1/3$ 最大化的是给定盘面积的功率，这里盘面积不是约束。

(4) 最大化 V/W 等价于最小化 $g(a)$ (η 只是一个整体因子, 故 a^* 与 η 无关)。求导:

$$g'(a) = \frac{1}{(1-a)^2} + \frac{\sigma}{4} \left[-\frac{1}{a^2(1-a)^2} + \frac{2}{a(1-a)^3} \right] = 0.$$

乘以 $a^2(1-a)^3$: $a^2(1-a) + \frac{\sigma}{4} [-(1-a) + 2a] = 0$, 即

$$4a^2(1-a) = \sigma(1-3a).$$

左边在 $0 < a < 1/2$ 恒正, 故必须 $1-3a > 0$, 即 $a^* < 1/3$ 。 $\sigma \rightarrow \infty$ 时右边因子 $(1-3a) \rightarrow 0$, $a^* \rightarrow 1/3$: 车体阻力占绝对主导时, 风轮自身的阻力无足轻重, 只需最大化功率——回到 Betz。 $\sigma \rightarrow 0$ 时 $a^* \approx \sqrt{\sigma}/2 \rightarrow 0$ 。

(5) 解三次方程得 $a^* = 0.1713$, $g(a^*) = 1.632$, $(V/W)_{\max} = 1/(g/\eta - 1) = 0.962$; $a = 1/3$ 时 $V/W = 0.771$, 低了约 20%。 $V/W \geq 1$ 要求 $g(a^*)/\eta \leq 2$, 即 $\eta \geq 0.816$ (图 11)。这与 Racing Aeolus 车辆直到 2016 年才首次超过风速 [35] 相符: 迎风比风快需要高效率的传动和细长低阻的车体。

(6) 在空气系中, Blackbird 是一辆“逆着地面风行驶”的迎风车: 车轮相当于风轮 (在以 W 运动的地面上取能), 螺旋桨相当于驱动轮 (在静止空气中推进)。因此同效率下顺风车的相对空气速度 $V - W$ 等于迎风车的对地速度, $\frac{1}{1-\eta} - 1 = \frac{\eta}{1-\eta}$ 。

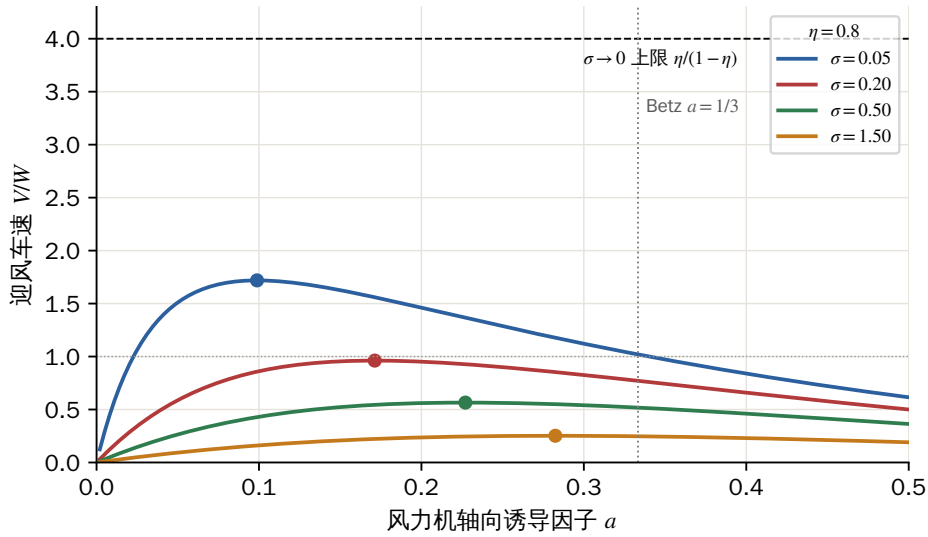


图 11 迎风风车车 V/W 随风轮轴向诱导因子 a ($\eta = 0.8$, 四个 σ)。圆点为三次方程 $4a^2(1-a) = \sigma(1-3a)$ 的根, 均在 Betz 值 $1/3$ 左侧 (fig_upwind.py 中与数值优化核对, 并验证与 η 无关)。

9 实验与数据处理：翼帆风洞数据

例题：实验题：由风洞数据预测帆船的最佳迎风性能

某队为帆船设计了刚性翼帆，并在低速风洞中测试缩比模型（对称翼型，即上下表面对称、零攻角时升力为零的翼型；翼展 $b = 0.600\text{ m}$ ，弦长 $\ell = 0.200\text{ m}$ ，两端无端板）。风速 $U = 15.0\text{ m/s}$ ，空气密度 $\rho = 1.20\text{ kg/m}^3$ 。风洞天平（支撑模型、并把作用在模型上的力分解为几个分量分别测量的测力装置）测得不同攻角 α 下的升力 L 与阻力 D （表 4）；天平单次测量的标准不确定度为 $u_L = 0.12\text{ N}$ 、 $u_D = 0.025\text{ N}$ ，攻角误差可忽略。**注意：本表为模拟数据**，由 `scripts/exp_data.py` 按有限翼展翼模型加高斯噪声生成（随机种子 20261003），用于练习数据处理。

1. 计算动压 q 、展弦比 AR ，以及各攻角的 C_L 、 C_D 。
2. 作 C_L - α 图，判断线性区与失速攻角；在线性区用最小二乘拟合升力线斜率 $C_{L\alpha} \equiv dC_L/d\alpha$ （单位 rad^{-1} ）及其不确定度。取二维翼 $a_0 = 2\pi \times 0.92$ （0.92 为实际翼型因厚度与黏性而相对薄翼理论的典型修正，第 3.3 节），由式 (3.12) 估计效率因子 e 。
3. 把抛物线极曲线 (3.13) 线性化，在线性区拟合 C_{D0} 、 k 及其不确定度，并由 k 再估计 e ，与第 2 问比较。用题给的天平不确定度检验拟合优度。
4. 求 $(L/D)_{\max}$ 、对应 C_L^* 与最小气动阻力角 $\varepsilon_{A,\min}$ 及其不确定度。与直接从数据点读出的最大 L/D 比较。
5. 实船上桅杆、船体与船员的寄生阻力使阻力系数（以翼帆面积为参考）增加 $\Delta C_D = 0.020$ ；水翼的阻力角 $\varepsilon_H = 5.0^\circ$ 。预测该船的 β 、最佳迎风角 γ^* 、迎风 VMG/V_T （含不确定度）与最大速度比。
6. 讨论此实验的主要系统误差及改进方法。

表 4 翼帆模型风洞测力数据（模拟数据）

$\alpha/(\circ)$	L/N	D/N
0	0.00	0.526
2	1.83	0.466
4	3.70	0.565
6	5.71	0.711
8	7.44	0.945
10	9.38	1.195
12	11.27	1.458
14	12.59	1.953
16	13.66	2.623
18	13.83	3.362
20	13.24	4.232
22	12.04	5.155

解答

(1) $q = \frac{1}{2}\rho U^2 = 135.0 \text{ Pa}$, $S = b\ell = 0.120 \text{ m}^2$, $qS = 16.20 \text{ N}$, $\text{AR} = b/\ell = 3.0$ 。 $C_L = L/(qS)$, $C_D = D/(qS)$, 系数的不确定度 $u_{C_L} = 0.12/16.2 = 0.0074$, $u_{C_D} = 0.025/16.2 = 0.0015$:

$\alpha/(^{\circ})$	C_L	C_D	C_L^2	L/D
0	0.000	0.0325	0.000	0.0
2	0.113	0.0288	0.013	3.93
4	0.228	0.0349	0.052	6.55
6	0.352	0.0439	0.124	8.03
8	0.459	0.0583	0.211	7.87
10	0.579	0.0738	0.335	7.85
12	0.696	0.0900	0.484	7.73
14	0.777	0.1206	0.604	6.45
16	0.843	0.1619	0.711	5.21
18	0.854	0.2075	0.729	4.11
20	0.817	0.2612	0.668	3.13
22	0.743	0.3182	0.552	2.34

(2) C_L 在 $\alpha \leq 12^{\circ}$ 近似线性, 14° 起斜率明显减小, 18° 附近达到最大 $C_{L,\max} \approx 0.85$ 后下降: 失速攻角约 17° – 18° 。保守地取 $\alpha = 0$ – 10° (6 点) 拟合直线 $C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$ (α 用弧度; 最小二乘公式见附录 C):

$$C_{L\alpha} = 3.32 \text{ rad}^{-1}, \quad u_{C_{L\alpha}} = 0.03 \text{ rad}^{-1}, \quad C_{L0} = -0.001 \pm 0.003, \quad r = 0.9999.$$

截距与零相容, 符合对称翼型。由式 (3.12): $e = a_0/[\pi \text{AR}(a_0/C_{L\alpha} - 1)] = 5.781/[3\pi(5.781/3.32 - 1)] \approx 0.83$ 。

(3) 线性化: 令 $X = C_L^2$ 、 $Y = C_D$, 则 $Y = C_{D0} + kX$ 。用 $\alpha = 0$ – 10° 的 6 点:

$$C_{D0} = 0.0290 \pm 0.0014, \quad k = 0.133 \pm 0.008, \quad r = 0.993.$$

图 12(b) 中 12° 的点仍在直线上, 14° 起明显偏高 (气流开始分离)。若把 12° 也纳入拟合, 得 $C_{D0} = 0.0295$ 、 $k = 0.128$, 变化在一倍标准差内, 说明结果对拟合区间不敏感。由 $k = 1/(\pi e \text{AR})$: $e = 1/(3\pi \times 0.133) \approx 0.80$, 与第 2 问的 0.83 在误差范围内一致。需要说明: 两种 e 一般是不同的量——由升力线斜率得到的是升力线理论的展向效率, 由 k 得到的 Oswald 因子还吸收了型阻随 C_L 的变化, 实际翼型上通常后者更小; 本题数据由同一个 e 生成, 两者一致是模型使然。

拟合优度。上面的不确定度由残差散布 $s = \sqrt{\sum r_i^2/(n-2)} = 0.0023$ 估计, 没有用到题给的天平不确定度。现在用它们检验: 纵坐标 C_D 的不确定度 $u_{C_D} = 0.0015$; 横坐标 $X = C_L^2$ 也有误差 $u_X = 2C_L u_{C_L}$, 折算到纵向为 $k u_X \leq 0.0011$ 。每点的有效不确定度 $\sigma_i = \sqrt{u_{C_D}^2 + (2kC_L u_{C_L})^2}$, 平均约 0.0017。于是

$$\chi^2 = \sum_i \frac{r_i^2}{\sigma_i^2} = 8.5, \quad \nu = n - 2 = 4, \quad \chi^2/\nu = 2.1.$$

怎样判断 $\chi^2 = 8.5$ 是否“太大”？若残差只来自仪器误差，每一项 r_i^2/σ_i^2 平均约为 1， ν 个独立项之和的平均值为 $\nu = 4$ ，统计涨落（标准差）约为 $\sqrt{2\nu} \approx 2.8$ 。8.5 比平均值高出约 1.6 个标准差；按 χ^2 分布精确计算， $\nu = 4$ 时 $\chi^2 \geq 8.5$ 的概率约 8%。所以残差略大于仪器不确定度所能解释的程度，但还不足以断定模型有误；可能的原因是天平不确定度估计偏小，或型阻随攻角略有变化（抛物线模型只是近似）。用 σ_i 作加权最小二乘（公式见附录 C），得 $C_{D0} = 0.0291 \pm 0.0009$ 、 $k = 0.132 \pm 0.006$ 。注意这里的不确定度只按仪器的 σ_i 计算；既然 $\chi^2/\nu = 2.1$ 表明实际散布更大，通常把它们乘以 $\sqrt{\chi^2/\nu} = 1.46$ ，得 ± 0.0014 、 ± 0.009 ，与不加权结果的不确定度相同。下文仍采用由残差估计、较保守的不确定度。

(4) 由式 (3.14)：

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{C_{D0}k}} = 8.04, \quad C_L^* = \sqrt{C_{D0}/k} = 0.467, \quad \varepsilon_{A,\min} = \arctan \frac{1}{8.04} = 7.09^\circ.$$

对应攻角 $\alpha^* \approx C_L^*/C_{L\alpha} \approx 8.1^\circ$ 。不确定度： $\ln(L/D)_{\max} = -\ln 2 - \frac{1}{2}(\ln C_{D0} + \ln k)$ ，若把 C_{D0} 、 k 当独立量，

$$\frac{u_{L/D}}{L/D} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{u_{C_{D0}}}{C_{D0}}\right)^2 + \left(\frac{u_k}{k}\right)^2} = 3.8\%, \quad u_{L/D} = 0.30;$$

$$u_\varepsilon = \frac{u_{L/D}}{1 + (L/D)^2} = 4.6 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.26^\circ.$$

这里 u_ε 的公式来自 $\varepsilon = \arctan[1/(L/D)]$ 的求导，结果是弧度，乘以 $180^\circ/\pi$ 换成度。（更精确地，同一组数据拟合出的截距与斜率负相关，计入协方差后 $u_{L/D} = 0.17$ 、 $u_\varepsilon = 0.15^\circ$ ；附录 C。以下主答案统一用不计协方差的口径，括号中给出计入协方差的值。）结果： $(L/D)_{\max} = 8.0 \pm 0.3$ ， $\varepsilon_{A,\min} = (7.1^\circ \pm 0.3^\circ)$ 。直接读数据点， $\alpha = 6^\circ$ 时 $L/D = 8.03$ 最大，与拟合一致；拟合利用了全部线性区数据，且不受攻角取样间隔限制，更可靠。

(5) 寄生阻力只改变 C_{D0} ： $C'_{D0} = 0.0490$ ， $(L/D)' = 1/(2\sqrt{0.0490 \times 0.133}) = 6.19$ ， $\varepsilon_A = 9.2^\circ \pm 0.3^\circ$ （计协方差 $\pm 0.2^\circ$ ）。由航向定理 $\beta = \varepsilon_A + \varepsilon_H = 14.2^\circ$ ； $\gamma^* = 45^\circ + \beta/2 = 52.1^\circ$ ；

$$\frac{\text{VMG}}{V_T} = \frac{1 - \sin \beta}{2 \sin \beta} = 1.54 \pm 0.04, \quad \left(\frac{V_s}{V_T}\right)_{\max} = \frac{1}{\sin \beta} = 4.08.$$

VMG 的不确定度由 $d(\text{VMG}/V_T)/d\beta = -\cos \beta/(2 \sin^2 \beta)$ 乘以 $u_\beta = u_{\varepsilon_A} = 5.2 \times 10^{-3} \text{ rad}$ 得到（计协方差为 ± 0.03 ）； ε_H 视为给定值，未计其不确定度。注意寄生阻力使 ε_A 从 7.1° 增到 9.2° ，VMG 从 1.89（无寄生阻力时）降到 1.54：对高速帆船，减小寄生阻力比改进翼型更重要。

(6) 系统误差与改进：

- **雷诺数不匹配**：模型 $Re = U\ell/\nu \approx 2 \times 10^5$ ，实船约 10^6 – 10^7 ；低 Re 下边界层更易分离， C_{D0} 偏大、失速提前。改进：加大模型或风速，或在前缘附近贴一条粗糙的**转捩带**（人为使边界层由层流提前变为湍流，以模拟高 Re 下的边界层状态）。
- **风洞洞壁效应**：模型占据了试验段的一部分截面（**阻塞**），由连续性，模型周围的实际流速大于名义 U （系数偏大）；洞壁对尾涡的约束改变有效攻角与诱导阻力。改进：做阻塞与洞壁修正，或用更大试验段。

- **展弦比与“镜面”效应**：实船翼帆根部贴近甲板与水面，相当于一面镜子，使有效展弦比最多接近几何值的两倍， k 会显著减小；风洞中两端自由的模型不反映这一点。改进：在模型根部加地板/端板模拟甲板。
- **天平零漂与支杆阻力**：支撑模型的支杆自身受风阻，天平零点也会漂移。它们对所有攻角是近似相同的常量偏置，只会抬高拟合出的 C_{D0} ，而不改变 k 。注意：表中 $D(0^\circ) = 0.526 \text{ N}$ 大于 $D(2^\circ) = 0.466 \text{ N}$ ，差 0.06 N ，约为两次测量之差的不确定度 $\sqrt{2}u_D = 0.035 \text{ N}$ 的 1.7 倍，属于统计涨落范围，不能据此判断系统误差；常量偏置也不可能单独抬高某一个攻角。要发现并扣除它，应做无模型的空载测量，并在每次测量前后复零。
- **攻角定义**：实帆有扭转，各截面攻角不同；刚性翼帆可用襟翼与扭转分布逼近最优。

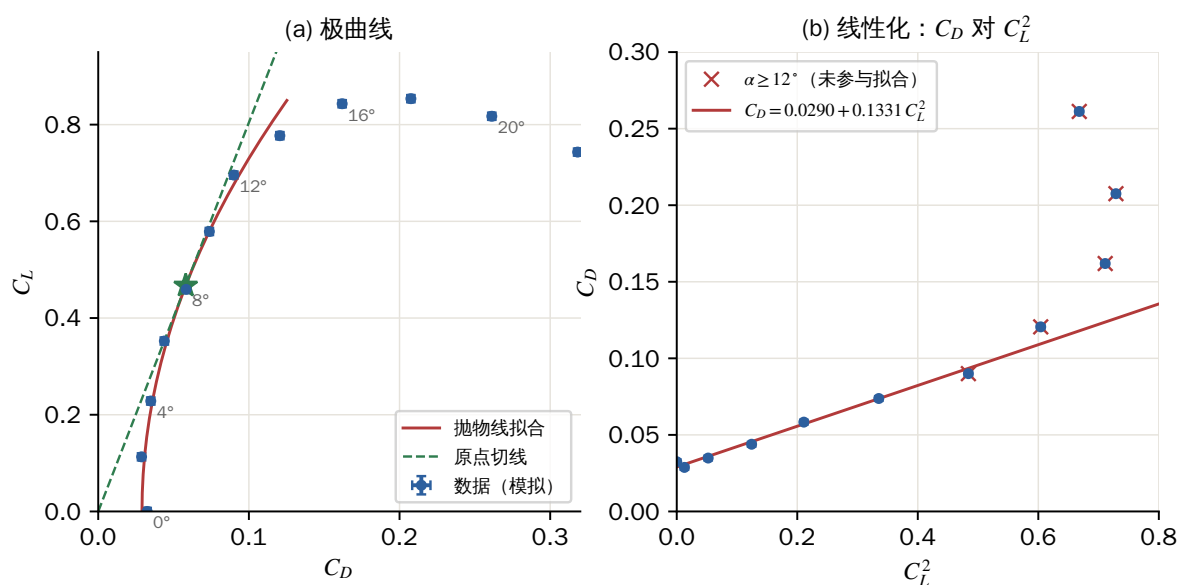


图 12 实验题解答用图（模拟数据）。(a) 极曲线与抛物线拟合、原点切线（星号为 $(L/D)_{\max}$ 点）；(b) 线性化： C_D 对 C_L^2 的直线拟合，叉号为未参与拟合的点（ $\alpha \geq 12^\circ$ ；其中 12° 的点仍在直线上， 14° 起进入分离区）。

10 小结：推导链

1. **伽利略变换** $\Rightarrow$ 视风 $\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_T - \mathbf{V}_s$ (式 (3.2)); 功率 $P' = P - \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0$ (式 (3.5)); 耗散与稳态外力总功率不随参考系变 (式 (3.7)、(3.8)); 柯尼希定理 $\Rightarrow$ 两介质间释放功率 $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ (式 (3.9))。
2. **升力 $\perp$ 来流** $\Rightarrow$ 维持力 F 的耗散为 $F \sin \varepsilon \cdot V$; 抛物线极曲线 $\Rightarrow \tan \varepsilon_{\min} = 2\sqrt{C_{D0}k}$ (式 (3.14)); 把机翼当作致动盘 $\Rightarrow$ 诱导阻力 $C_{Di} = C_L^2 / (\pi AR)$ (式 (6.13))。
3. **力平衡** $\Rightarrow$ 航向定理 $\beta = \varepsilon_A + \varepsilon_H$ (式 (4.1)); **正弦定理** $\Rightarrow V_s/V_T = \sin(\gamma - \beta) / \sin \beta$ (式 (4.2)); **圆周角定理** $\Rightarrow$ 极图为圆; **求极值** $\Rightarrow$ VMG 最优 (式 (4.5)–(4.7)); 两系账本 $\Rightarrow$ 耗散 $= \mathbf{F}_A \cdot \mathbf{V}_T$ (式 (4.8))。

4. 库仑摩擦 + 视风 $\propto$ 船速 $\Rightarrow$ 冰帆船 $\varepsilon_H \rightarrow 0$, 自治方程 (5.3), 速度比 $\rightarrow 1/\sin \varepsilon_A$; 起动条件 (5.4); 三个解 (两稳一不稳)、折叠与滞后。
5. 动量定理 + 盘前/盘后分别用伯努利 $\Rightarrow$ Froude 定理 $u_d = (U + u_w)/2$ (式 (6.5)) $\Rightarrow C_P = 4a(1-a)^2 \leq 16/27$ (式 (6.9)); 反向使用 $\Rightarrow$ 螺旋桨 $\eta_F = 2/(1 + \sqrt{1 + C_T})$ (式 (6.12))。
6. 力平衡 + 功率链 (两种介质、两种速度) $\Rightarrow$ Blackbird $V/W = 1/[1 - \eta(1 - D/T)]$ (式 (7.3)); 迎风车 $V/W = \eta/(1 - \eta + D_b/D_t)$ (式 (7.7)); 交换空气与地面的对称性; 两系账本与式 (3.9) 一致 (式 (7.5))。

一句话: 风能装置利用的是两种介质的相对运动; 升力面以几乎为零的代价在介质间传递动量, 速度比的上限由耗散 (阻力角、效率) 决定, 而不是由“风速”决定。

11 名词解释

参考文献

- [1] 1851 America's Cup. Wikipedia, 2026. URL https://en.wikipedia.org/wiki/1851_America%27s_Cup. 22 August 1851, Royal Yacht Squadron £100 Cup around the Isle of Wight. Accessed 3 Oct 2026.
- [2] AC75. Wikipedia, 2026. URL <https://en.wikipedia.org/wiki/AC75>. Class rule 2018, first used at the 36th America's Cup (2021); recorded speeds up to 55.5 kn (INEOS Britannia, 1 Oct 2024). Accessed 3 Oct 2026.
- [3] 2024 America's Cup. Wikipedia, 2026. URL https://en.wikipedia.org/wiki/2024_America%27s_Cup. Barcelona; Emirates Team New Zealand beat INEOS Britannia 7–2. Accessed 3 Oct 2026.
- [4] Toby Heppell. America's Cup boats: 8 facts about the AC75 and why they're unique. Yachting World, August 2024. URL <https://www.yachtingworld.com/americas-cup/americas-cup-boats-7-things-you-might-not-know-about-the-ac75s-129881>.
- [5] Bob Dill. Sailing Yacht Design for Maximum Speed. In *The 16th Chesapeake Sailing Yacht Symposium*, Annapolis, MD, March 2003.
- [6] International DN Ice Yacht Racing Association. DN Specifications. IDNIYRA North America website. URL <https://www.idniyra.org/about/specifications/>. Sail area 60 sq ft, length 12 ft, mast 16 ft, typical weight 100–150 lb. Accessed 3 Oct 2026.
- [7] North American Land Sailing Association. Land Speed Records. NALSA website. URL <https://v1.nalsa.org/speedrecord.html>. Greenbird (R. Jenkins), Ivanpah Dry Lake, March 2009, 126.2 mph (about 203.1 km/h). Accessed 3 Oct 2026.

表 5 名词中英对照

中文	英文	一句话定义
真风	true wind	空气相对水（地面）的速度
视风	apparent wind	空气相对船（车）的速度
横漂角	leeway angle	船艏向与实际航向之间的小夹角
升力 / 阻力	lift / drag	流体合力垂直 / 平行于来流的分量
升阻比	lift-to-drag ratio	L/D
阻力角	drag angle	合力偏离升力方向的角, $\tan \varepsilon = D/L$
极曲线	drag polar	C_L 对 C_D 的曲线
展弦比	aspect ratio	翼展平方 / 翼面积
诱导阻力	induced drag	有限翼展尾涡引起、 $\propto C_L^2$ 的阻力
速度极图	velocity polar	各航向船速矢量端点的轨迹
VMG	velocity made good	沿真风方向的速度分量
换舷	tacking / gybing	之字形航行中由一舷来风换到另一舷
控制体	control volume	记账用的固定空间区域
流管	stream tube	由流线围成、流体不穿过侧壁的管
致动盘	actuator disk	无厚度、压强跃变均匀的理想叶轮
轴向诱导因子	axial induction factor	风轮处来流速度减少的比例 a
功率系数	power coefficient	$C_P = P/(\frac{1}{2}\rho AU^3)$
叶尖速比	tip speed ratio	叶尖线速度 / 风速
桨距	blade pitch	叶片截面相对旋转平面的安装角
翼弦	chord	翼剖面前缘到后缘的连线
尾随涡、下洗	trailing vortex, downwash	翼尖旋涡及其造成的向下气流
扶正力矩	righting moment	抵抗横倾的重力-浮力力矩
折叠（分岔）	fold (saddle-node)	参数变化时一稳定解与一不稳定解合并消失
阻塞	blockage	模型占据风洞截面使周围流速增大
转捩带	trip strip	迫使边界层提前变为湍流的粗糙带
Froude 效率	Froude (ideal propulsive) efficiency	理想螺旋桨的有用功率 / 轴功率

- [8] Andrew Marshall. 222 Kilometres Per Hour – By Wind Power Alone! ExplorersWeb, December 2022. URL <https://explorersweb.com/222kph-wind-powered-landspeed-record/>.
- [9] Bob Dill and Kimball Livingston. Observers Report for a NALSA Dead Down Wind Record Attempt and an Attempt for a Top Speed Record in the Non-Conventional Sailing Craft Category (Blackbird, El Mirage, July 2–3, 2010). Technical report, North American Land Sailing Association, 2010. URL <https://v1.nalsa.org/BlackBirdDDWSR/Observers%20ReportNALSA%20C4BlackbirdJuly2and%2032010.pdf>.
- [10] Bob Dill and Kimball Livingston. Observers Report for Proposed Records for Dead Upwind Sailing and Maximum Speed for a Turbine Driven Craft. Technical report, North American Land Sailing Association, July 2012. URL https://v1.nalsa.org/BlackBirdDDWSR/ObserversReportDUW_RecordAttempt.pdf.
- [11] Andrew B. Bauer. Faster than the wind. In P. B. S. Lissaman, editor, *The Ancient Interface: Proceedings of the First AIAA Symposium on the Aero/Hydronautics of Sailing*, volume 8 of *AIAA Lecture Series*, Marina del Rey, CA, 1969.
- [12] Mark Drela. Dead-Downwind Faster Than The Wind (DDWFTTW) Analysis, 2009. URL <https://www.blueplanettimes.com/wp-content/uploads/2010/08/Drela-DDWFTTW-Analysis.pdf>. Unpublished note, MIT, 1 Jan 2009.
- [13] Derek Muller. Risking My Life To Settle A Physics Debate. Veritasium (YouTube), 2021. URL <https://www.youtube.com/watch?v=jyQwgBAaBag>. 29 May 2021.
- [14] Derek Muller. A Physics Prof Bet Me \$10,000 I’m Wrong (video page). veritasium.com, 2021. URL <https://www.veritasium.com/videos/2021/6/30/a-physics-prof-bet-me-10000-im-wrong>.
- [15] Derek Muller. A Physics Prof Bet Me \$10,000 I’m Wrong. Veritasium (YouTube), 2021. URL https://www.youtube.com/watch?v=yCsgoLc_fzI. 30 June 2021.
- [16] Aylin Woodward. YouTuber Wins Crazy \$10,000 Bet With Professor by ‘Breaking’ The Laws of Physics. ScienceAlert (originally Business Insider), July 2021. URL <https://www.sciencealert.com/a-youtuber-just-won-10-000-from-a-scientist-in-a-crazy-bet-over-the-laws-of-physics>.
- [17] Albert Betz. Das Maximum der theoretisch möglichen Ausnützung des Windes durch Windmotoren. *Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen*, 26:307–309, 1920.
- [18] A. Betz. The Maximum of the Theoretically Possible Exploitation of Wind by Means of a Wind Motor. *Wind Engineering*, 37(4):441–446, 2013. doi: 10.1260/0309-524X.37.4.441.
- [19] Karl H. Bergey. The Lanchester–Betz limit (energy conversion efficiency factor for windmills). *Journal of Energy*, 3(6):382–384, 1979. doi: 10.2514/3.48013.

- [20] F. W. Lanchester. A contribution to the theory of propulsion and the screw propeller. *Transactions of the Institution of Naval Architects*, 57:98–116, 1915.
- [21] Gijs A. M. van Kuik. The Lanchester–Betz–Joukowsky limit. *Wind Energy*, 10(3):289–291, 2007. doi: 10.1002/we.218.
- [22] N. E. Joukowsky. Windmill of the NEJ type. In *Transactions of the Central Institute for Aero-Hydrodynamics of Moscow*. 1920. Reprinted in *Collected Papers Vol. VI (1937)*, pp. 405–409, in Russian.
- [23] Valery L. Okulov and Gijs A. M. van Kuik. The Betz–Joukowsky limit: on the contribution to rotor aerodynamics by the British, German and Russian scientific schools. *Wind Energy*, 15(2):335–344, 2012. doi: 10.1002/we.464.
- [24] J. Jonkman, S. Butterfield, W. Musial, and G. Scott. Definition of a 5-MW Reference Wind Turbine for Offshore System Development. Technical Report NREL/TP-500-38060, National Renewable Energy Laboratory, 2009.
- [25] Evan Gaertner, Jennifer Rinker, Latha Sethuraman, Frederik Zahle, Benjamin Anderson, Garrett Barter, Nikhar Abbas, Fanzhong Meng, Pietro Bortolotti, Witold Skrzypinski, George Scott, Roland Feil, Henrik Bredmose, Katherine Dykes, Matthew Shields, Christopher Allen, and Anthony Viselli. Definition of the IEA 15-Megawatt Offshore Reference Wind Turbine. Technical Report NREL/TP-5000-75698, National Renewable Energy Laboratory, 2020.
- [26] John D. Anderson, Jr. *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill Education, New York, 6th edition, 2017.
- [27] Czesław A. Marchaj. *Aero-Hydrodynamics of Sailing*. Adlard Coles Nautical, London, 3rd edition, 2000. ISBN 0713650737.
- [28] Ross Garrett. *The Symmetry of Sailing: The Physics of Sailing for Yachtsmen*. Sheridan House, 1996.
- [29] Jos J. de Koning, Gert de Groot, and Gerrit Jan van Ingen Schenau. Ice friction during speed skating. *Journal of Biomechanics*, 25(6):565–571, 1992. doi: 10.1016/0021-9290(92)90099-M.
- [30] Bob Dill. Speed on Ice. LakeIce.org. URL <http://lakeice.squarespace.com/speed-on-ice/>. Accessed 3 Oct 2026.
- [31] R. E. Froude. On the part played in propulsion by differences of fluid pressure. *Transactions of the Institution of Naval Architects*, 30:390–405, 1889.
- [32] Tony Burton, Nick Jenkins, David Sharpe, and Ervin Bossanyi. *Wind Energy Handbook*. Wiley, Chichester, 2nd edition, 2011. doi: 10.1002/9781119992714.
- [33] Mac Gaunaa, Stig Øye, and Robert Flemming Mikkelsen. Theory and design of flow driven vehicles using rotors for energy conversion. In *Proceedings of the European Wind Energy*

- Conference and Exhibition (EWEC 2009)*, Marseille, France, 2009. URL <https://orbit.dtu.dk/en/publications/theory-and-design-of-flow-driven-vehicles-using-rotors-for-energy/>.
- [34] Karl Svozil. Traction Constraints and the Physics of Faster-Than-the-Wind Travel. *arXiv preprint*, 2026. URL <https://arxiv.org/abs/2507.22081>. arXiv:2507.22081.
- [35] Racing Aeolus. History. [racingaeolus.org](https://www.racingaeolus.org/history). URL <https://www.racingaeolus.org/history>. 2008 Den Helder; 2009–2010 Denmark; from 2011 Den Helder; 2020–2021 cancelled; first 100% in 2016 (DTU); efficiency record 120.76%. Accessed 3 Oct 2026.
- [36] Wind turbine cars setting record speeds. [hamburg-business.com](https://hamburg-business.com/en/news/wind-turbine-cars-setting-record-speeds), December 2020. URL <https://hamburg-business.com/en/news/wind-turbine-cars-setting-record-speeds>.
- [37] DTU’s wind-powered cars perform well racing against the wind. DTU News, Technical University of Denmark, 2018. URL <https://www.dtu.dk/english/news/all-news/nyhed?id=5eaf5266-bfe4-4e40-aefc-dc7660b690ef>.

A 致动盘问题中动量定理的严格使用

正文式 (6.1) 对流管用动量定理时, 需要流管边界上压力的净轴向分量为零。这并不显然: 风力机的流管侧壁单调扩张, 侧壁上的压强也不处处等于 p_∞ (盘前高于 p_∞ , 盘后低于 p_∞)。下面换一个远大于流管的控制体, 直接求推力, 从而避开这个问题。

推导: 大圆柱控制体

取一个以风轮轴为轴、截面积 A_{cv} 很大的圆柱形控制体, 两端面分别在远前方与远尾流处, 侧面离风轮很远。

(1) 压力: 远前方、远尾流、远处侧面上的压强都是 p_∞ 。均匀压强作用在一个封闭面上的合力为零, 所以压力对控制体内流体的净力为零。

(2) 质量: 左端面流入 $\rho U A_{cv}$ 。右端面: 尾流区 (面积 A_w) 以 u_w 流出, 其余 (面积 $A_{cv} - A_w$) 以 U 流出。尾流比来流慢, 右端面流出的质量少于流入, 差额只能从侧面流出:

$$\dot{m}_{\text{侧}} = \rho U A_{cv} - \rho u_w A_w - \rho U (A_{cv} - A_w) = \rho A_w (U - u_w).$$

侧面离风轮很远, 那里流体的轴向速度为 U 。

(3) 动量: 对控制体用式 (3.15) (多个进出口), 流体所受合力 $= -T$ (只有风轮的力):

$$-T = [\rho u_w^2 A_w + \rho U^2 (A_{cv} - A_w) + \dot{m}_{\text{侧}} U] - \rho U^2 A_{cv}.$$

代入 $\dot{m}_{\text{侧}}$ 并化简: $-T = \rho A_w u_w^2 - \rho A_w U^2 + \rho A_w U (U - u_w) = \rho A_w u_w (u_w - U)$, 即

$$T = \rho A_w u_w (U - u_w) = \dot{m} (U - u_w),$$

与式 (6.1) 相同。 A_{cv} 消掉了, 结果与控制体大小无关。

B Froude 定理的另一视角：涡柱与螺线管

本附录给出 Froude 定理 $u_d = (U + u_w)/2$ 的一个独立论证，用到电磁学中熟悉的数学。

前置知识：速度场与磁场的类比

不可压缩流体的速度场满足 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ；定义涡量 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ 。静磁场满足 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 、 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ 。两组方程形式相同：只要把 $\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{u}$ 、 $\mu_0 \mathbf{J} \leftrightarrow \boldsymbol{\omega}$ ，由电流求磁场的毕奥-萨伐尔定律就变成由涡量求速度的公式。特别地，一个环量为 Γ 的圆形涡环，在轴线上产生的速度与电流 I 的圆线圈在轴线上的磁场同形 ($\mu_0 I \rightarrow \Gamma$)：

$$u_{\text{轴}} = \frac{\Gamma R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

推导：半无限长涡柱

致动盘的尾流边界是一层速度间断面：外侧速度 U ，内侧速度 u_w 。这样的间断面等价于一层涡，正如面电流使磁场切向分量跳变。在轻载（速度变化小）近似下，尾流边界的扩张可以忽略，近似为半径 R 、从盘面延伸到无穷远的等半径圆柱面（这是一阶近似；重载时尾流扩张，但盘处“速度减少量为尾流的一半”这一结论与动量理论一致），单位长度上的环量（涡面强度）为 Γ' ——就像一个半无限长螺线管。轴线上 x 处 ($x=0$ 为盘面， $x>0$ 为下游) 的诱导速度是各涡环贡献之和：

$$\Delta u(x) = \int_0^\infty \frac{\Gamma' R^2 dx'}{2[R^2 + (x - x')^2]^{3/2}} = \frac{\Gamma'}{2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right),$$

这与半无限长螺线管轴线磁场 $\frac{\mu_0 n I}{2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$ 完全同形 (verify_numeric.py 对积分作了数值核对)。于是：远上游 $x \rightarrow -\infty$ ， $\Delta u \rightarrow 0$ ；盘面 $x=0$ ， $\Delta u = \Gamma'/2$ ；远下游 $x \rightarrow +\infty$ ， $\Delta u \rightarrow \Gamma'$ 。即盘处的速度变化恰为远尾流速度变化的一半——这正是 Froude 定理：螺线管端面处的磁场是内部磁场的一半。取 $\Gamma' = 2aU$ (减速) 就得到图 5 中的轴线速度分布 $u(x) = U[1 - a(1 + x/\sqrt{x^2 + R^2})]$ 。同一事实也是第 6.5 节中“机翼处下洗为远尾流一半”的依据：机翼的尾随涡系同样从翼处开始、向下游延伸到无穷远。

C 最小二乘直线拟合与不确定度

推导：公式

对 n 组数据 (x_i, y_i) 拟合 $y = c_0 + c_1 x$ ，令残差平方和 $\sum (y_i - c_0 - c_1 x_i)^2$ 最小。对 c_0 、 c_1 求偏导并令其为零，解得

$$c_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \quad c_0 = \bar{y} - c_1 \bar{x}, \quad S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2, \quad S_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

用残差估计 y 的单点散布 $s^2 = \sum (y_i - c_0 - c_1 x_i)^2 / (n - 2)$ (减 2 是因为两个参数已由数据定出)，则

$$u_{c_1} = \sqrt{\frac{s^2}{S_{xx}}}, \quad u_{c_0} = \sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right)}, \quad \text{cov}(c_0, c_1) = -\frac{\bar{x} s^2}{S_{xx}}.$$

相关系数 $r = S_{xy}/\sqrt{S_{xx}S_{yy}}$ 。 $\bar{x} > 0$ 时截距与斜率负相关：斜率估大了，截距就会估小。若各点有已知的不确定度 σ_i ，可改用以 $w_i = 1/\sigma_i^2$ 为权的加权最小二乘：令 $\sum w_i(y_i - c_0 - c_1x_i)^2$ 最小，记

$$S_w = \sum w_i, \quad S_x = \sum w_i x_i, \quad S_y = \sum w_i y_i, \\ S_{xx}^{(w)} = \sum w_i x_i^2, \quad S_{xy}^{(w)} = \sum w_i x_i y_i, \quad \Delta = S_w S_{xx}^{(w)} - S_x^2,$$

则

$$c_1 = \frac{S_w S_{xy}^{(w)} - S_x S_y}{\Delta}, \quad c_0 = \frac{S_{xx}^{(w)} S_y - S_x S_{xy}^{(w)}}{\Delta}, \\ u_{c_1} = \sqrt{\frac{S_w}{\Delta}}, \quad u_{c_0} = \sqrt{\frac{S_{xx}^{(w)}}{\Delta}}.$$

所有 w_i 相等时退化为上面的公式。拟合优度用 $\chi^2 = \sum r_i^2/\sigma_i^2$ 与自由度 $\nu = n - 2$ 比较： $\chi^2/\nu \approx 1$ 表示残差与仪器不确定度相符；明显大于 1 时，常把 u_{c_0} 、 u_{c_1} 乘以 $\sqrt{\chi^2/\nu}$ 。

函数的不确定度 对 $f(c_0, c_1)$ ，一阶泰勒展开给出 $u_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial c_0}\right)^2 u_{c_0}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c_1}\right)^2 u_{c_1}^2 + 2\frac{\partial f}{\partial c_0}\frac{\partial f}{\partial c_1}\text{cov}(c_0, c_1)$ 。实验题中 $c_0 = C_{D0}$ 、 $c_1 = k$ ， $f = (L/D)_{\max} = \frac{1}{2}(C_{D0}k)^{-1/2}$ ， $\frac{\partial \ln f}{\partial C_{D0}} = -\frac{1}{2C_{D0}}$ ， $\frac{\partial \ln f}{\partial k} = -\frac{1}{2k}$ ；因 $\text{cov} < 0$ ，计入协方差后不确定度变小（0.30 降为 0.17）。笔试中可只给不计协方差的结果，但应知道它偏保守。

D Blackbird 致动盘模型的求解与最大车速

例题 2 的三个方程可归结为关于 w 的一个方程

$$h(w) \equiv 2\rho A(u+w)w \left[1 - \frac{u+w}{\eta'V}\right] = D(V), \quad 0 < w < \eta'V - u.$$

$h(w)$ 是 w 的三次多项式，在区间两端为零、中间有一个极大值。若 $\max h < D$ ，该车速下无论桨距（载荷）如何都不能维持匀速；若 $\max h > D$ ，有两个根：小 w 的轻载根（Froude 效率高，实际采用）与大 w 的重载根。

迭代 把方程写成 $w = D\eta'V/[2\rho A(u+w)(\eta'V - u - w)]$ ，从 $w = 0$ 迭代。轻载根处右边对 w 的导数的绝对值小于 1，迭代收敛（例题 2 中 5 次迭代即达三位有效数字）。

最大车速 随 V 增大， $D(V) = \frac{1}{2}\rho C_D S(V-W)^2 + F_{rr}$ 增大，而 $\max_w h$ 的增长受 $\eta'V - u = W - (1 - \eta')V$ 收缩的限制，最终两者相切：此即最大稳态车速 $V_{\max}$ 。例题 2 参数下数值求得 $V_{\max} = 14.12 \text{ m/s} = 2.82W$ 。若 $\eta' = 1$ 、 D 为常数，则 $\eta'V - u = W$ 不收缩， $\max_w h \rightarrow \frac{1}{2}\rho AW^2$ ，得到正文的“无上限”条件。