

用宇宙线透视金字塔： μ 子成像

第 43 届决赛短训讲义组

2026 年 10 月

目录

1 导读	3
2 名词与符号	5
3 前置模块一：相对论运动学与衰变	5
3.1 洛伦兹因子、能量与动量	5
3.2 时间膨胀与固有时	7
3.3 指数衰变律	8
4 前置模块二：带电粒子穿过物质	9
4.1 面密度与不透明度	9
4.2 一次擦肩而过：玻尔的冲量估计	10
4.3 Bethe 公式与最小电离	11
4.4 高能 μ 子的辐射损失	13
4.5 连续减速近似与最小穿透能量	13
5 前置模块三：计数统计	15
5.1 泊松分布	15
5.2 显著性	15
5.3 用样本估计方差及其误差	16
6 前置模块四：多次库仑散射	16
6.1 单次小角散射	16
6.2 随机行走与高斯分布	16
6.3 辐射长度与 Highland 公式	17
7 宇宙线 μ 子	18

目录	2
7.1 立体角与强度	18
7.2 从初级宇宙线到 μ 子	19
7.3 π 介子：衰变还是再碰撞	19
7.4 通量与角分布	21
7.5 能谱	21
7.6 大气中的能量损失与存活	22
7.7 Frisch–Smith 实验	23
8 透射成像	23
8.1 测量量：沿视线的不透明度	23
8.2 透射强度对不透明度的灵敏度	24
8.3 空腔造成的超额	26
8.4 统计：需要多少 μ 子	26
8.5 系统误差与本底	28
9 散射成像	29
9.1 原理	29
9.2 动量未知的代价	30
9.3 所需 μ 子数	31
10 决赛风格例题	32
11 实验与数据处理：μ 子的天顶角分布	41
12 小结	45
A 能量损失公式中的对数	48
B 多次散射：从卢瑟福截面到 $E_s = 21 \text{ MeV}$	48
C 统计工具的推导	49
D 几何：立体角与接收度	50
E 名词解释	51

1 导读

每分钟大约有一个宇宙线 μ 子穿过你的指甲盖大小的面积。它们诞生在十几千米高的大气层里，本来平均只能活 2.2 微秒，却能以接近光速穿透整个大气，甚至穿透上百米厚的岩石。 μ 子穿过物质时几乎走直线，被吸收的多少取决于路上“有多少物质”；被偏折的多少取决于物质的原子序数。于是，把一台能记录 μ 子方向的探测器放在金字塔里、火山脚下或集装箱旁边，只要耐心计数，就能给这些庞然大物拍“X 光片”。本讲从狭义相对论、带电粒子与物质的相互作用和计数统计三块基础出发，一步一步算清楚：为什么 μ 子能到达地面，它能穿透多厚的石头，金字塔里的空腔会让计数多出多少，需要曝光多少天才能确信空腔存在，以及怎样用散射角把铀和铅区分开来。

背景： μ 子与“慢下来的时钟”

μ 子是 1936–1937 年在宇宙线云室照片中发现的带电粒子，质量约为电子的 207 倍 [1, 2]。现代测得其质量 $m_\mu c^2 = 105.66 \text{ MeV}$ ，静止时的平均寿命 $\tau_\mu = 2.197 \mu\text{s}$ [3]。1940 年，Rossi 与 Hall 在美国科罗拉多州的 Echo Lake（海拔 3240 m）和 Denver（海拔 1616 m）比较不同动量的宇宙线 μ 子在大气中的衰减（1941 年发表）。他们用铅吸收体把 μ 子按穿透本领分成两组，发现穿透本领较弱（较慢）的一组衰变速率约为较强一组的 3 倍 [4]，并由此推出 μ 子静止寿命约为 $(2.4 \pm 0.3) \mu\text{s}$ ，这是运动时钟变慢的第一批定量证据之一 [4, 5]。1962–1963 年，Frisch 与 Smith 在新罕布什尔州华盛顿山顶和海平面的剑桥分别计数，只选取在山顶速度为 $0.9950c$ 至 $0.9954c$ 的 μ 子，测得时间膨胀因子为 8.8 ± 0.8 ，与按其探测几何计算的有效值 8.4 ± 2 相符，并把实验过程拍成了教学影片 *Time Dilation: An Experiment with Mu-Mesons* (1962) [5, 6]。第 7.7 节和例题 1 会用本讲推出的公式重新分析这个实验。

背景： μ 子成像 (muography)

1955 年，澳大利亚物理学家 George 用宇宙线计数测量了雪山水电工程一条隧道上方岩层的面密度，这是已知最早的 μ 子“透射测量” [7]。1960 年代，Alvarez 领导的团队把火花室放进埃及哈夫拉 (Khafre) 金字塔底部的贝尔佐尼室，按方向统计穿过金字塔的 μ 子数，并与计算机模拟比较，1970 年在 *Science* 上发表结论：在所观测的范围内，没有与国王墓室体积相当的未知空腔 [8, 9]。2007 年，田中宏幸 (H. K. M. Tanaka) 等人用核乳胶片拍到了日本浅间山火山口下方的密度结构 [10]；2014 年他们用 μ 子“延时摄影”观察到萨摩硫黄岛火山通道中岩浆柱的升降 [11]。

2015 年起，国际合作 ScanPyramids 用三种不同技术的探测器（第 8.1 节介绍）观测胡夫金字塔（今高 139 m、底宽 230 m）：名古屋大学的核乳胶片放在王后墓室（位置 NE2）及其东侧的壁龛（位置 NE1），日本高能加速器研究机构 (KEK) 的闪烁体径迹仪放在王后墓室内，法国原子能委员会 (CEA) 的 Micromegas 气体探测器放在金字塔北面外侧。2017 年他们在 *Nature* 上报告，在大走廊（高 8.6 m、长 46.7 m）上方发现一个长度至少 30 m、截面与大走廊相当的“大空洞” (ScanPyramids Big Void)。核乳胶两个位置的统计显著性分别为 13.7σ 和 12.7σ ；KEK 径迹仪测得超额 5%–11%，多数切片超过 10σ ；CEA 两台望远镜合并为 5.8σ [9]。2023 年同一合作又精确测定了北面“人字形”石块后方一条长约 9 m、截面约 $2 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ 的走廊状结构 [12]（图 1）。

另一类方法利用 μ 子在物质中的偏折。2003 年，美国洛斯阿拉莫斯国家实验室的 Borozdin 等人在 *Nature* 上提出并演示：测量每个宇宙线 μ 子穿过物体前后的方向，由多次库仑散射的强弱可以为高原子序数材料成像，用于在货柜中寻找铀、钚等核材料 [13]。2011 年福岛第一核电站事故后， μ 子成像被用来从反应堆厂房外部估计熔毁燃料的位置：2012 年的模拟研究论证了散射法的可行性 [14]，KEK 等单位用透射法观测了 1 号机组，估计压力容器内残留燃料的多少 [15]。

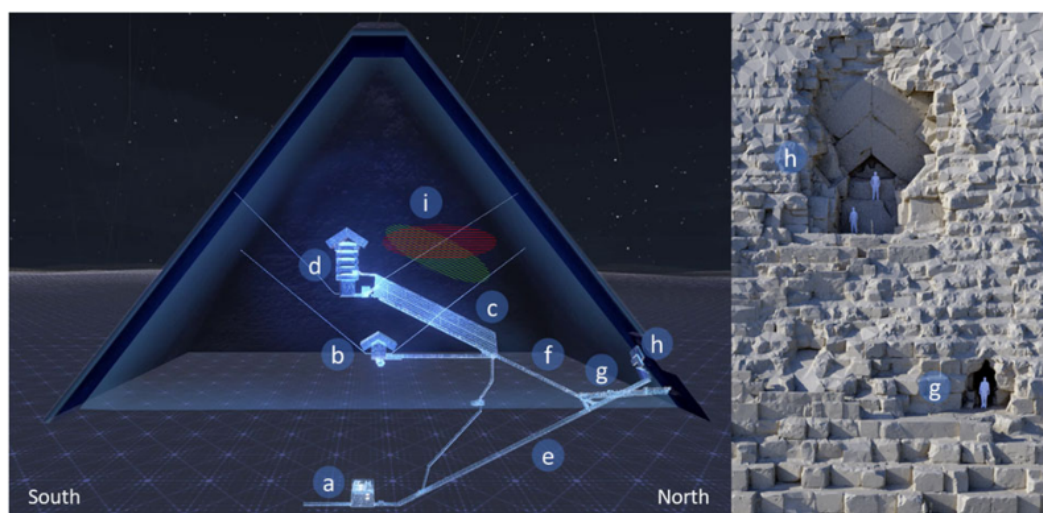


图 1 胡夫金字塔的南北向竖直剖面（左，三维模型，自东向西看；原文称 East-West cut view）与北面“人字形”石块区（右）。a 地下室，b 王后墓室，c 大走廊，d 国王墓室，e 下行通道，f 上行通道，g 马蒙通道（今游客入口），h 北面人字形区，i 2017 年发现的大空洞（红、绿两种阴影分别对应水平与倾斜两种几何假设）。本讲例题 2 就以 b 处的探测器观测 i 为情境。（图源：S. Procureur *et al.*, *Nat. Commun.* 14, 1144 (2023), Fig. 1（经缩放），CC BY 4.0, <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>）

学习目标 学完本讲，你应当能够：

1. 用固有时与指数衰变律计算运动 μ 子的存活概率，并计入沿途能量损失对时间膨胀的影响；
2. 由“一次擦肩而过的冲量”估计带电粒子的电离能量损失，理解 Bethe 公式的标度、最小电离值约 $2 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$ 与“不透明度” $X = \int \rho dl$ 的意义，并由 $-dE/dX = a + bE$ 求出穿透厚度 X 所需的最小能量；
3. 由积分能谱的局部斜率推出透射计数对不透明度的灵敏度 $d \ln \Phi / d \ln X$ ，估计空腔造成的超额与达到给定显著性所需的曝光时间，并理解系统误差设定的“显著性天花板”；
4. 由随机行走与卢瑟福散射理解多次散射角 $\psi_0 \propto (1/p) \sqrt{x/X_0}$ ，用它区分铁、铅、铀，并估计动量未知时所需的 μ 子数；
5. 完成“天顶角分布”实验数据的处理：几何接收度、线性化、加权最小二乘、不确定度与系统误差。

前置知识：本讲需要的普通物理与数学

- 力学与电磁学：冲量、动量与能量、库仑定律、电场的高斯定理；
- 近代物理：知道狭义相对论的时间膨胀与 $E = mc^2$ 即可，第 3 节会补齐本讲用到的全部公式；
- 数学：泰勒展开、定积分换元、对数求导、简单的概率（期望与方差）。

本讲新引入的工具（相对论运动学、固有时、衰变律、阻止本领与 Bethe 公式、连续减速近似、泊松分布与显著性、多次散射与辐射长度、强度与立体角、加权最小二乘）都在首次使用前给出定义和推导。

建议学时 共 2 学时（约 90 分钟）：前置模块 30 分钟；宇宙线 μ 子与 Frisch–Smith 实验 15 分钟；透射成像 25 分钟；散射成像 15 分钟；小结 5 分钟。例题与实验题供课后练习，附录供深入阅读。

推导路线 时间膨胀 + 衰变律 $\Rightarrow \mu$ 子能到达地面；玻尔冲量估计 $\Rightarrow$ Bethe 公式 $\Rightarrow -dE/dX = a + bE \Rightarrow$ 最小穿透能量 $E_{\min}(X)$ ；能谱 $\Rightarrow$ 透射强度 $\Phi(X) \Rightarrow$ 空腔超额 $\varepsilon \approx \eta'\ell/L$ ；泊松统计 $\Rightarrow$ 显著性 $n_\sigma = \varepsilon\sqrt{N} \Rightarrow$ 曝光时间。另一条线：卢瑟福散射 + 随机行走 $\Rightarrow \psi_0 \propto \sqrt{x/X_0}/p \Rightarrow$ 材料识别。

2 名词与符号

能量单位统一用电子伏特：1 eV = 1.602×10^{-19} J，1 GeV = 10^9 eV。动量用 GeV/c，质量用 GeV/c²，这样 pc 、 mc^2 与 E 都以 GeV 计。“米水当量”（m.w.e.）是不透明度的工程单位：1 m 厚的水的面密度，1 m.w.e. = 100 g/cm²。

3 前置模块一：相对论运动学与衰变

3.1 洛伦兹因子、能量与动量

定义：相对论能量与动量

静质量为 m 、速度为 $v = \beta c$ 的粒子，其能量与动量为

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2, & p &= \gamma mv, \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

由两式消去 γ 得能量-动量关系

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \quad (3.2)$$

表 1 本讲符号表

符号	含义	常用单位
$\beta = v/c, \gamma$	速度与光速之比；洛伦兹因子 $1/\sqrt{1-\beta^2}$	1
E, p, m	总能量（含静能）、动量、静质量	GeV, GeV/c, GeV/c ²
τ_μ, τ	μ 子静止平均寿命 2.197 μs ；运动粒子经历的固有时	μs
P	存活概率	1
ρ, X	密度；不透明度（面密度） $X = \int \rho dl$	$\text{g/cm}^3, \text{g/cm}^2$
$-dE/dX$	质量阻止本领（单位面密度的平均能量损失）	$\text{MeV cm}^2/\text{g}$
Z, A	原子序数、摩尔质量（数值上等于质量数）	1, g/mol
$\bar{I}$	平均激发能（Bethe 公式中）	eV
b	碰撞参数（第 4.2、6 节与附录 A、B）	m
K, r_e	Bethe 常数 $4\pi N_A r_e^2 m_e c^2$ ；经典电子半径	$\text{MeV cm}^2/\text{mol}, \text{m}$
$W_{\max}, \delta$	单次碰撞最大能量转移；密度效应修正	MeV, 1
a, b	能损参数： $-dE/dX = a + bE$ （此处 b 与碰撞参数无关）	$\text{MeV cm}^2/\text{g}, \text{cm}^2/\text{g}$
$E_{\min}(X)$	恰好穿透不透明度 X 所需的最小能量	GeV
θ, φ, Ω	天顶角、方位角、立体角	rad, sr
$\tan \theta_x, \tan \theta_y$	径迹在东西、南北竖直平面上投影倾角的正切	1
$\lambda_d, \lambda_I, \Lambda$	衰变长度；核相互作用长度；核子流衰减长度	m; g/cm ²
E_π^*, E_K^*	π 、K 介子“衰变/碰撞”分界能量	GeV
$I(p, \theta)$	微分强度：单位时间、单位垂直面积、单位立体角、单位动量的粒子数	$\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}(\text{GeV}/c)^{-1}$
$I(> p, \theta)$	积分强度（动量大于 p ）	$\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$
$\Phi(X, \theta)$	透射强度 $I(> E_{\min}(X), \theta)$	$\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$
J	穿过平面的通量	$\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$
$S_{\text{eff}}, \Delta\Omega, G$	有效面积；立体角窗口；接收度 $\int S_{\text{eff}} d\Omega$	$\text{m}^2, \text{sr}, \text{m}^2 \text{sr}$
$g(u)$	$ue^u/(e^u - 1), u = bX$	1
η, η'	积分谱局部斜率 $-d \ln I/d \ln p$ ；灵敏度 $-d \ln \Phi/d \ln X$	1
L, ℓ	视线方向岩石总长度；视线穿过空腔的长度	m
ε	空腔造成的相对计数超额	1
N, μ_N	计数；计数的期望值	1
n_σ	显著性（偏离几个标准差）	1
σ_{sys}	无目标预言的相对系统误差	1
w, Δ	空洞角宽；分析窗口宽度	1（以 $\tan \theta$ 计）
S, T	探测器面积、曝光时间（ T_a 为气温）	m^2, s 或天
X_0, E_s	辐射长度；Rossi-Greisen 能量 21.2 MeV	g/cm^2 或 cm, MeV
ψ_x, ψ_0	投影散射角；其均方根（Highland 公式）	mrad
κ	峰度比 $\langle \psi^4 \rangle / \langle \psi^2 \rangle^2$	1
p_{eff}, p_c	有效动量 $\langle (\beta p)^{-2} \rangle^{-1/2}$ ；截断动量	GeV/c
Q_1, Q_2, R	两种假设预言的均方投影角及其比值 Q_1/Q_2	$\text{rad}^2, 1$
M	入射重粒子质量（Bethe 公式）； M_a, R_g 为空气摩尔质量与气体常数	—
n	天顶角分布指数， $I \propto \cos^n \theta$	1
h, H	海拔高度；大气标高	km
d, D	实验题中探测平面边长、两平面间距	m
——	例题中另有局部定义的符号以题面为准（如例题 2 的 t_v, H_p, B_p, b_d ）	—

推导：几个常用组合

式 (3.1) 两式相除得 $\beta = pc/E$ ；相乘与相除可得

$$\beta\gamma = \frac{p}{mc}, \quad \gamma = \frac{E}{mc^2}. \quad (3.3)$$

验证式 (3.2): $E^2 - (pc)^2 = \gamma^2 m^2 c^4 (1 - \beta^2) = m^2 c^4$ 。当 $pc \gg mc^2$ (“极端相对论”) 时 $E \approx pc$, $\beta \approx 1 - \frac{1}{2}(mc^2/E)^2$ 。本讲的 μ 子能量多在 GeV 以上, $m_\mu c^2 = 0.1057 \text{ GeV}$, 所以常可不区分 E 与 pc ; 只在 $E \lesssim 1 \text{ GeV}$ 时需要用精确式。

例题：数值感觉

海平面 μ 子的平均能量约 4 GeV [16]。此时 $\gamma = 4/0.10566 = 37.9$, $\beta = 0.99965$ 。速度与光速只差万分之三点五, 但 γ 已经是 38。

3.2 时间膨胀与固有时**定义：固有时**

粒子随身携带的钟所走过的时间叫固有时, 记作 τ 。若在实验室 (地面) 参考系中粒子以速度 $v(t)$ 运动, 实验室时间 dt 内粒子的钟只走过

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma(t)} = \sqrt{1 - \beta^2} dt. \quad (3.4)$$

这就是时间膨胀：在实验室看来, 运动的钟走得慢了 γ 倍。

注：速度变化时的时间膨胀

狭义相对论中, 时间膨胀是对“相对实验室匀速运动的钟”导出的。若钟在加速, 可以把运动切成很多小段, 每一小段内速度近似不变, 用式 (3.4) 得到这一小段的固有时, 再求和 (积分)。这样做的前提是钟本身不因加速而损坏: μ 子的“钟”是它的衰变概率, 与加速度无关: 在储存环中做高速圆周运动 (加速度极大) 的 μ 子, 其寿命仍只由 γ 决定, 这已被实验证实 [17]。本讲中 μ 子在大气或岩石中逐渐减速, 正需要这种逐段积分。

μ 子沿竖直方向飞过距离 dx 用时 $dt = dx/v$, 于是

$$d\tau = \frac{dx}{\gamma v} = \frac{dx}{\beta \gamma c} = \frac{m dx}{p}. \quad (3.5)$$

最后一步用了式 (3.3)。式 (3.5) 说明: 每走单位路程, 粒子的钟走过的时间与动量成反比; 动量越大, “老得越慢”。

3.3 指数衰变律

假设：衰变的无记忆性

一个 μ 子在它自己的钟走过 $d\tau$ 的时间内衰变的概率为 $d\tau/\tau_\mu$ ，与它已经“活了多久”无关，也与它的速度、所处环境无关。 τ_μ 是一个常数，叫平均寿命。这是对大量粒子衰变实验的总结（量子力学给出其解释）。

推导：存活概率

设固有时 τ 时仍存活的概率为 $P(\tau)$ 。在接下来的 $d\tau$ 内，存活需要“到 τ 时还活着”且“这一小段内不衰变”，两者独立，故

$$\begin{aligned} P(\tau + d\tau) &= P(\tau) \left(1 - \frac{d\tau}{\tau_\mu}\right) \\ \Rightarrow \frac{dP}{d\tau} &= -\frac{P}{\tau_\mu}. \end{aligned}$$

以 $P(0) = 1$ 积分得

$$P = e^{-\tau/\tau_\mu}. \quad (3.6)$$

再用式 (3.5) 把固有时换成路程：若动量 p 在飞行中不变，飞过 L 后 $\tau = mL/p$,

$$\begin{aligned} P &= \exp\left(-\frac{L}{\lambda_d}\right), \\ \lambda_d &\equiv \beta\gamma c\tau_\mu = \frac{p}{mc} c\tau_\mu. \end{aligned} \quad (3.7)$$

λ_d 叫衰变长度。对 μ 子， $c\tau_\mu = 658.6 \text{ m}$ 。若动量在飞行中变化，则用 $\tau = \int m dx/p(x)$ 代入式 (3.6)。

检验：为什么必须有时间膨胀

设 μ 子在 15 km 高处产生（第 7.2 节说明这个数从何而来），竖直向下，能量 4 GeV，先忽略能量损失。

- 不考虑时间膨胀：飞行时间 $t = L/v \approx 15 \text{ km}/c = 50.0 \text{ } \mu\text{s} = 22.8 \tau_\mu$ ，存活概率 $e^{-22.8} \approx 1.3 \times 10^{-10}$ ；
- 考虑时间膨胀： $\lambda_d = 37.9 \times 658.6 \text{ m} = 24.9 \text{ km}$ ， $P = e^{-15/24.9} = 0.55$ 。

两者相差 9 个数量级。实际上地面每平方米每秒能接收到上百个 μ 子（第 7.4 节），没有时间膨胀就无法解释。用 μ 子自己的参考系看，同一件事表现为“大气层厚度被洛伦兹收缩为 $15 \text{ km}/\gamma = 0.40 \text{ km}$ ”， μ 子在寿命内足以飞过。图 2 给出不同到达能量下的三种计算结果。

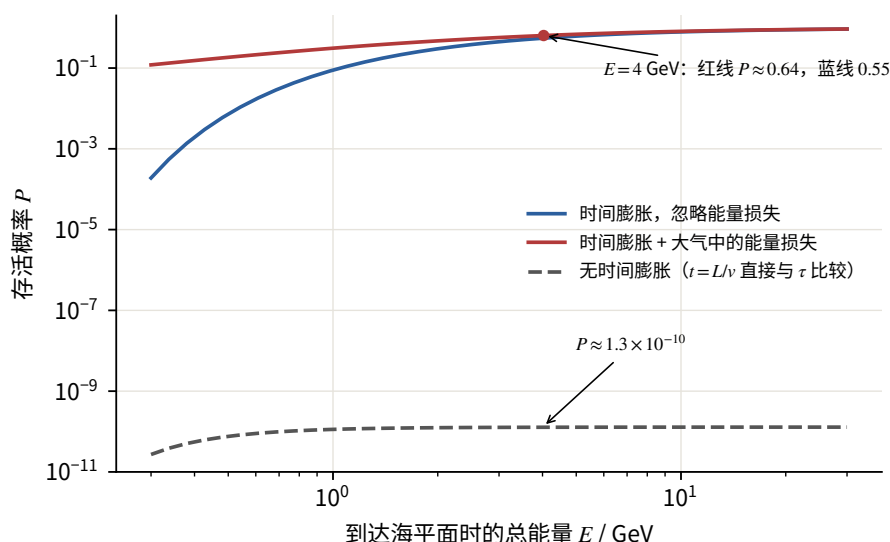


图 2 在 15 km 高处产生、竖直下落的 μ 子到达海平面的存活概率，横轴为到达海平面时的总能量。虚线：不考虑时间膨胀；蓝线：考虑时间膨胀，但假设能量不变；红线：考虑时间膨胀，并用 PDG 空气能损表与 1976 年美国标准大气逐段积分固有时（第 7.6 节）。红线高于蓝线，是因为在地面能量相同的条件下，计入能损意味着 μ 子在高空能量更高、钟走得更慢。

4 前置模块二：带电粒子穿过物质

4.1 面密度与不透明度

带电粒子穿过物质时，主要和物质中的电子与原子核打交道。穿过的“物质多少”用沿路径的质量面密度衡量：

定义：不透明度

沿粒子路径对密度积分

$$X = \int_{\text{路径}} \rho(l) dl \quad (4.1)$$

叫不透明度 (opacity) 或面密度，单位 g/cm^2 。它等于以路径为轴、截面为 1 cm^2 的细柱体内的物质质量。例如 90 m 厚、密度 $2.2 \text{ g}/\text{cm}^3$ 的石灰岩， $X = 2.2 \times 9000 = 1.98 \times 10^4 \text{ g}/\text{cm}^2$ ，即 198 米水当量。

定义：标准岩石

地下与岩石中的 μ 子计算常用 PDG 约定的“标准岩石”： $Z = 11$ ， $A = 22$ ($Z/A = 0.5$)， $\rho = 2.65 \text{ g}/\text{cm}^3$ ，平均激发能 $\bar{I} = 136.4 \text{ eV}$ (见第 4.3 节)，辐射长度 (第 6.3 节定义) $26.54 \text{ g}/\text{cm}^2$ [3, 18]。真实岩石的成分与密度不同 (金字塔的石灰岩约 $2.2 \text{ g}/\text{cm}^3$)，但以面密度计的能损与标准岩石相差不大，所以本讲用石灰岩的密度算不透明度，能损参数借用标准岩石。

为什么用 X 而不用长度？下面会看到，单位路程的电离能量损失正比于电子数密度 $n_e = \rho N_A Z/A$ (N_A 为阿伏伽德罗常数)，而绝大多数物质的 Z/A 都接近 $1/2$ (氢除外)。于是“单位面密度”的能量损失几乎与材料无关，岩石、水、铁的差别都在 30% 以内。用 X 作自变量，可以把“穿过多少物质”和“物质是什么”大致分开。

4.2 一次擦肩而过：玻尔的冲量估计

假设：重带电粒子与静止自由电子

一个电荷 ze 、速度 v 的重粒子（质量 $M \gg m_e$ ）从一个电子旁边飞过，最近距离（碰撞参数）为 b 。在碰撞的短暂时间内，(i) 重粒子几乎不偏转，速度不变；(ii) 电子来不及移动，可视为静止的自由电子（原子束缚的作用在下文用 $b_{\max}$ 计入）。

推导：电子获得的冲量与能量

取重粒子沿 x 轴运动， $t = 0$ 时最靠近电子。电子受的力沿运动方向的分量在 t 与 $-t$ 时大小相等、方向相反，积分为零；只剩垂直分量。这个分量由库仑定律给出（非相对论情形）：

$$F_{\perp}(t) = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{(b^2 + v^2t^2)^{3/2}}.$$

对时间积分（令 $u = vt/b$ ， $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + u^2)^{-3/2} du = 2$ ）得冲量

$$\Delta p_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp} dt = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{bv}. \quad (4.2)$$

一个更快捷的看法分两步。(i) 在某一时刻，以重粒子轨迹为轴作一个半径 b 、长度无限的圆柱面，由高斯定理，穿过侧面的电通量 $\int E_{\perp}(x) 2\pi b dx = ze/\epsilon_0$ （ x 为沿轴坐标）。(ii) 匀速运动电荷的场随电荷整体平移： $E_{\perp}(x, t) = E_{\perp}(x - vt)$ 。所以固定在 $x = 0$ 处的电子感受到的场随时间的变化 $E_{\perp}(-vt)$ ，与某一时刻场沿轴的分布形状相同， $\int E_{\perp} dt = \int E_{\perp} dx/v$ 。两式合起来， $e \int E_{\perp} dt = 2ze^2/(4\pi\epsilon_0 bv)$ 。这个论证只用到高斯定理和“场随电荷平移”，不依赖场的具体形状，因此对高速（相对论）粒子也成立；相对论下垂直场的峰值增大、作用时间缩短，两者恰好抵消（运动电荷电场的这一结论本讲不推导）。

电子获得的动能为 $\Delta E(b) = \Delta p_{\perp}^2/(2m_e)$ 。引入经典电子半径 $r_e = e^2/(4\pi\epsilon_0 m_e c^2) = 2.818 \times 10^{-15} \text{ m}$ ，写成

$$\Delta E(b) = \frac{2z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{1}{b^2}. \quad (4.3)$$

推导：对碰撞参数求和

重粒子前进 dx 时，碰撞参数在 b 到 $b + db$ 之间的电子位于体积为 $2\pi b db dx$ 的薄圆筒内，个数为 $n_e 2\pi b db dx$ 。把每个电子获得的能量相加：

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dx} &= \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} n_e \Delta E(b) 2\pi b db \\ &= \frac{4\pi n_e z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}. \end{aligned}$$

积分在 $b \rightarrow 0$ 和 $b \rightarrow \infty$ 都发散（对数发散），所以必须有物理上的截断：

- $b_{\min}$ ： b 太小时式 (4.3) 给出的能量超过运动学允许的最大值 $W_{\max} \approx 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$ （正碰时电子能得到的最大能量），冲量近似失效；
- $b_{\max}$ ：碰撞持续时间约为 $b/(\gamma v)$ 。若它长于电子在原子中的典型运动周期 $1/\bar{\omega}$ ，电子会“绝热地”跟随，几乎得不到能量。所以 $b_{\max} \approx \gamma v/\bar{\omega}$ 。

除以 ρ 化为质量阻止本领，并代入 $n_e = \rho N_A Z/A$:

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dX} &= K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \\ &\quad \times \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}, \\ K &\equiv 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 \\ &= 0.307 \text{ MeV cm}^2/\text{mol}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

式 (4.4) 是 1913 年玻尔给出的经典结果的核心 [19]。它已经告诉我们三件事：能损只依赖于粒子的速度（而非质量）；在 $\beta \rightarrow 1$ 之前按 $1/\beta^2$ 下降；对材料的依赖只通过 Z/A （以及对数里的弱依赖）。

4.3 Bethe 公式与最小电离

要点：Bethe 公式（只用结论）

量子力学的完整计算（Bethe, 1930 年代）给出重带电粒子的平均质量阻止本领 [3]:

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dX} &= K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 W_{\max}}{\bar{I}^2} \right. \\ &\quad \left. - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

$\bar{I}$ 是物质的平均激发能（原子中电子的平均“束缚能标”，约 $10 \text{ eV} \times Z$ ，例如标准岩石 136.4 eV 、铅 823 eV ）； $W_{\max}$ 为单次碰撞的最大能量转移（精确式为

$$W_{\max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma m_e/M + (m_e/M)^2},$$

M 为入射粒子质量；当 $2\gamma m_e/M \ll 1$ 、对 μ 子即 $\gamma \ll 100$ 时 $\approx 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$ 。 $\gamma \sim 100$ 时 $W_{\max}$ 约减半，但它只在对数里，对能损的影响约 3%）； δ 是密度效应修正：高速粒子的电场使介质极化，屏蔽了远处的电子，削弱了对数项的增长。适用范围约 $0.1 \lesssim \beta\gamma \lesssim 1000$ ，精度为百分之几 [3]。

对照式 (4.4)：取 $b_{\max} = \gamma v/\bar{\omega}$ ，量子力学中 $b_{\min}$ 由电子在粒子参考系中的德布罗意波长决定， $b_{\min} \approx \hbar/(2\gamma m_e v)$ ，于是

$$\begin{aligned} \ln(b_{\max}/b_{\min}) &= \ln(2\gamma^2 m_e v^2/\hbar\bar{\omega}) \\ &= \ln(2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2/\bar{I}) \end{aligned}$$

($\hbar\bar{\omega} \equiv \bar{I}$)，正是 $W_{\max} \approx 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$ 时式 (4.5) 方括号中的主项。附录 A 给出这一对应的细节。

检验：最小电离值的手算

β^{-2} 随速度增大而下降，对数项随 γ 缓慢上升，两者之间有一个宽而平的极小值，位置约在 $\beta\gamma \approx 3\text{--}3.5$ [3]。对标准岩石 ($Z/A = 0.5$, $\bar{I} = 136.4\text{ eV}$)，取 $\beta\gamma = 3.5$ ($\beta^2 = 0.925$)，忽略 δ ：

$$\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{\bar{I}} = \ln \frac{2 \times 0.511 \times 10^6 \times 12.25}{136.4}$$

$$= 11.4,$$

$$-\frac{dE}{dX} \approx \frac{0.307 \times 0.5}{0.925} (11.4 - 0.93)$$

$$= 1.74 \text{ MeV cm}^2/\text{g}.$$

PDG 表值为 $1.69 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$ ，位于 $\beta\gamma = 3.7$ [18]。手算误差 3%。

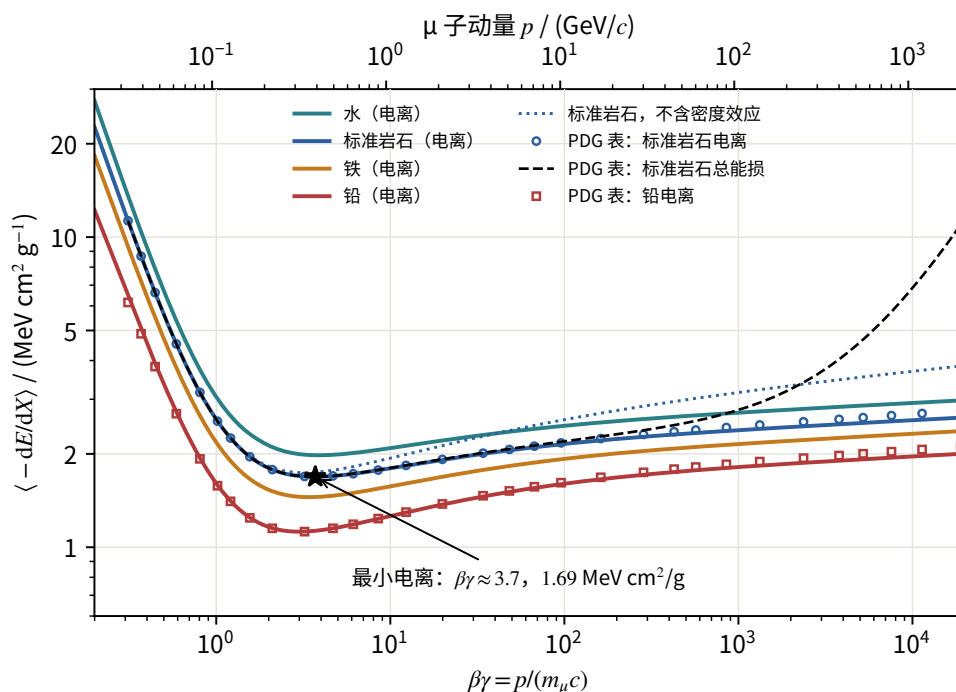


图 3 μ 子在水、标准岩石、铁、铅中的平均质量阻止本领。实线由式 (4.5) (含 Sternheimer 密度效应参数) 计算；圆点与方点为 PDG/Groom 表值 [18]；虚线为标准岩石的总能损 (含辐射损失)， $p \gtrsim 100 \text{ GeV}/c$ 后迅速上升。星号标出标准岩石的最小电离点，脚本核对其位置与数值与表值相差小于 3% 和 0.5%。

要点：最小电离粒子

宇宙线 μ 子的 $\beta\gamma$ 多在 10–100 之间，处在极小值右侧的平坦区，能损率接近极小值： $-dE/dX \approx 2 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$ (准确值随材料在 1.1–2.0 之间，图 3)。这样的粒子叫最小电离粒子 (minimum ionizing particle, MIP)。以后我们把岩石中的电离能损近似为常数 $a \approx 2.2 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$ (略高于极小值，计入了对数上升)。

注：平均值与涨落

式 (4.5) 给的是平均能损。单次碰撞偶尔把很大能量交给一个电子（产生“ δ 电子”），所以一段薄物质中的实际能损分布有一条长尾，最可几值低于平均值。穿过很厚的物质（如上百米岩石）时，大量碰撞的总和的相对涨落变小，用平均能损描述是合理的，但仍有百分之几到十几的“射程歧离”。本讲在需要精确数值时直接查 PDG 表。

4.4 高能 μ 子的辐射损失

能量高于几百 GeV 时，三种“辐射”过程变得重要：韧致辐射（ μ 子在原子核电场中被急剧偏转而辐射光子）、直接电子对产生（在核电场中直接产生一对电子与正电子）、光核作用（ μ 子通过交换一个虚光子打碎原子核）。这三种过程损失的能量都与 μ 子自身的能量成正比（粗略地说，每个过程都以一定概率带走 μ 子能量的一个固定比例）。于是总能损可以写成 [16]

$$-\frac{dE}{dX} = a + bE, \quad (4.6)$$

a 是电离损失， b 是三种辐射过程的“分数能损率”之和。（注意：这里的 b 与第 4.2 节的碰撞参数 b 无关，本讲中二者不会在同一处出现。）两者都随能量缓慢变化：对标准岩石， $E = 10$ GeV 到 10 TeV， a 从 2.17 增至 2.93 MeV cm²/g， b 从 1.9×10^{-6} 增至 4.35×10^{-6} cm²/g [16]。两项相等的能量

$$E_{\mu c} = \frac{a}{b} \quad (4.7)$$

叫 μ 子的临界能量，标准岩石约 500 GeV–700 GeV [16, 18]。本讲取常数 $a = 2.2$ MeV cm²/g、 $b = 4.0 \times 10^{-6}$ cm²/g ($E_{\mu c} = 550$ GeV)。用这对常数由式 (4.8) 算出的穿透（动）能，与 PDG 射程表相比：10 GeV–1 TeV 内相差在 $\pm 9\%$ 以内，5 GeV 处偏高 14%，1 GeV 处偏高约 22%，2 TeV 处偏低 11%（图 4a）。本讲关心的金字塔（几十 GeV）与火山（几百 GeV）都在精度较好的区间。

4.5 连续减速近似与最小穿透能量**假设：连续减速近似（CSDA）**

把 μ 子的能量损失看成沿路径连续、确定的过程，每一段都按平均能损 $a + bE$ 减速；忽略能损的涨落（射程歧离）、大角散射造成的路径弯曲，也忽略 μ 子在岩石中衰变（第 3.2 节的衰变长度在 GeV 以上为几十千米，远大于岩石厚度）。

推导：最小穿透能量

由式 (4.6) 分离变量： $dX = -dE/(a + bE)$ 。设 μ 子以能量 E_0 进入岩石，恰好在走完 X 时停下。积分下限取 0 意味着这里的 E 应理解为动能；在 $E \gg m_\mu c^2$ 时动能、总能量与 pc 不必区分。

$$X = \int_0^{E_0} \frac{dE}{a + bE} = \frac{1}{b} \ln \left(1 + \frac{bE_0}{a} \right).$$

反解出“恰好穿透”的入射能量，记为 $E_{\min}$ ：

$$E_{\min}(X) = \frac{a}{b} (e^{bX} - 1). \quad (4.8)$$

能量高于 $E_{\min}$ 的 μ 子能穿透，低于的被“吃掉”。

检验：两个极限

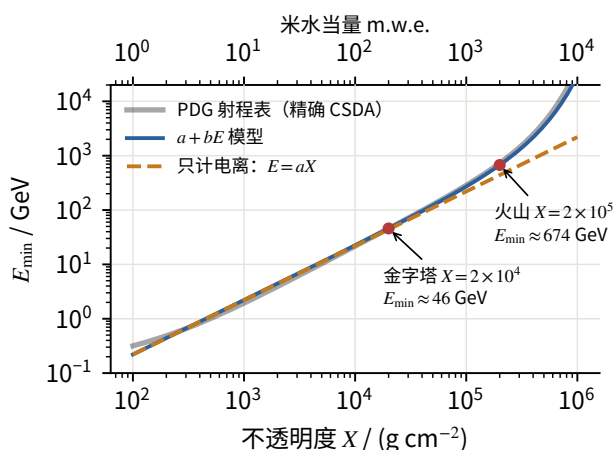
- $bX \ll 1$ (只有电离损失重要): $e^{bX} - 1 \approx bX + \frac{1}{2}(bX)^2$, $E_{\min} \approx aX(1 + \frac{1}{2}bX)$ 。金字塔 $X \approx 2 \times 10^4 \text{ g/cm}^2$, $bX = 0.08$,

$$\begin{aligned} E_{\min} &\approx 2.2 \text{ MeV cm}^2/\text{g} \\ &\times 2 \times 10^4 \text{ g/cm}^2 \times 1.04 \\ &= 46 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

- $bX \gtrsim 1$ (辐射损失主导): $E_{\min}$ 随 X 指数增长。火山 $X \approx 2 \times 10^5 \text{ g/cm}^2$, $bX = 0.8$, $E_{\min} \approx 550 \text{ GeV} \times 1.23 = 670 \text{ GeV}$; PDG 射程表给出 728 GeV 。

量纲: a/b 是能量, bX 无量纲。

(a) 最小穿透能量 (标准岩石)



(b) 透射率随不透明度的变化

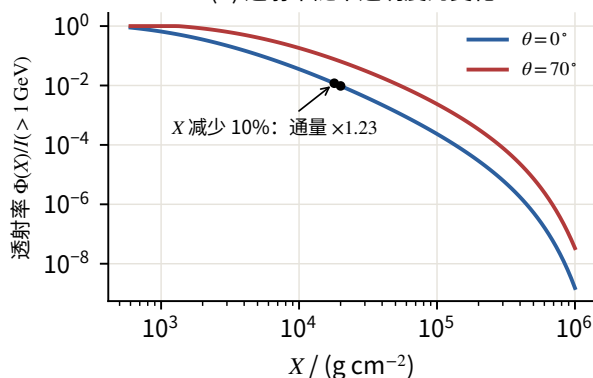


图 4 (a) 穿透不透明度 X 所需的最小能量: 灰色粗线由 PDG 标准岩石 CSDA 射程表反求 [18]; 蓝线为式 (4.8) ($a = 2.2 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$, $b = 4.0 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{g}$); 虚线只计电离。(b) 透射率: 穿透 X 的强度与开阔天空中动量大于 $1 \text{ GeV}/c$ 的强度之比 (谱见第 7.5 节)。金字塔附近不透明度减少 10%, 通量增加 23%。

注：与“射程测量”的区别

第 41 届复赛“质子断层扫描”利用的是质子射程对能量的依赖。本讲反过来用：入射粒子的能量不受我们控制（宇宙线谱是给定的），能量损失只用来决定“哪些 μ 子能穿过来”，测量的是穿透数目，而不是单个粒子的射程。

5 前置模块三：计数统计

5.1 泊松分布

推导：计数的期望与方差

把曝光时间 T 切成 n_s 个很短的小段，每段内到达一个 μ 子的概率为 $q \ll 1$ ，到达两个的概率可忽略，各段相互独立（宇宙线 μ 子的到达彼此无关）。第 k 段的计数 N_k 只取 0 或 1：

$$\begin{aligned}\langle N_k \rangle &= q, & \langle N_k^2 \rangle &= q, \\ \text{Var } N_k &= \langle N_k^2 \rangle - \langle N_k \rangle^2 = q(1 - q) \approx q.\end{aligned}$$

总计数 $N = \sum_k N_k$ 。期望相加： $\mu_N \equiv \langle N \rangle = n_s q$ 。独立随机量之和的方差等于方差之和（交叉项 $\langle (N_j - q)(N_k - q) \rangle = 0$ ）：

$$\begin{aligned}\text{Var } N &= n_s q(1 - q) \\ &\rightarrow n_s q = \mu_N, \\ \sigma_N &= \sqrt{\mu_N}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

这里取了 $n_s \rightarrow \infty$ 、 $q \rightarrow 0$ 、 $n_s q$ 固定的极限。在同样的极限下， N 的分布是泊松分布 $\text{Pr}(N) = \mu_N^N e^{-\mu_N} / N!$ （附录 C）； $\mu_N \gtrsim 20$ 时它很接近均值 μ_N 、标准差 $\sqrt{\mu_N}$ 的高斯分布。

要点：计数的相对误差

计到 N 个事例，其统计误差约 $\sqrt{N}$ ，相对误差 $1/\sqrt{N}$ 。想把相对误差减小一半，计数（即曝光时间或面积）要增大 4 倍。

5.2 显著性

定义：显著性 n_σ

设某方向“没有空腔”时期望计数为 μ_0 （由模拟或参照区域预言，假定其误差可忽略），实测为 N 。定义

$$n_\sigma = \frac{N - \mu_0}{\sqrt{\mu_0}},\tag{5.2}$$

即实测偏离预言几个标准差。若没有空腔， N 近似为均值 μ_0 、标准差 $\sqrt{\mu_0}$ 的高斯分布，纯属涨落而超过 n_σ 的概率（单侧）为 $n_\sigma = 2$: 2.3%; $n_\sigma = 3$: 1.3×10^{-3} ; $n_\sigma = 5$: 2.9×10^{-7} 。粒子物理习惯以 5σ 作为“发现”的门槛。

注：两点提醒

(i) 若 μ_0 不是可靠的理论预言，而来自另一个计数 N_0 （如参照方向），则差值 $N - N_0$ 的方差为 $N + N_0$ （独立量方差相加），显著性变为 $(N - N_0)/\sqrt{N + N_0}$ 。(ii) 在一张图像的成百上千个像素里寻找“最显著”的一个，即使没有空腔，也很可能遇到 3σ 的涨落，这叫“到处找”效应（look-elsewhere effect）；这正是门槛定在 5σ 而不是 3σ 的原因之一。

5.3 用样本估计方差及其误差

散射成像要由 N 个散射角 $\psi_1, \dots, \psi_N$ (均值为零) 估计分布的方差 $\langle \psi^2 \rangle$ 。最自然的估计量是 $\hat{s}^2 = \frac{1}{N} \sum \psi_i^2$ 。

推导： $\hat{s}^2$ 的相对误差

$\hat{s}^2$ 是 N 个独立随机量 ψ_i^2 的平均，其期望 $\langle \psi^2 \rangle$ ，方差为单个 ψ^2 的方差除以 N ：

$$\text{Var } \hat{s}^2 = \frac{\langle \psi^4 \rangle - \langle \psi^2 \rangle^2}{N} = \frac{(\kappa - 1) \langle \psi^2 \rangle^2}{N},$$

$$\kappa \equiv \frac{\langle \psi^4 \rangle}{\langle \psi^2 \rangle^2}.$$

所以

$$\frac{\sigma(\hat{s}^2)}{\langle \psi^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\kappa - 1}{N}}. \quad (5.3)$$

高斯分布 $\kappa = 3$ ，相对误差 $\sqrt{2/N}$ 。若分布有长尾 (κ 大)，同样的 N 给出的估计更差。附录 C 证明：宽度不同的高斯分布按权重混合后， $\kappa = 3 \langle \sigma^4 \rangle / \langle \sigma^2 \rangle^2 \geq 3$ 。

6 前置模块四：多次库仑散射

6.1 单次小角散射

μ 子从原子核旁飞过时也受到库仑力。核的质量远大于 μ 子，核几乎不动， μ 子被偏折。仿照式 (4.2)，把电子换成电荷 Ze 的原子核、把“受冲量者”换成 μ 子： μ 子获得横向冲量 $\Delta p_{\perp} = 2zZe^2/(4\pi\epsilon_0 bv)$ ，偏转角

$$\psi(b) = \frac{\Delta p_{\perp}}{p} = \frac{2zZr_e m_e c^2}{pvb}$$

$$= \frac{2zZr_e}{b} \cdot \frac{m_e c^2}{\beta pc}. \quad (6.1)$$

这是卢瑟福散射的小角极限。偏转角与 $pv = \beta pc$ 成反比（非相对论时 pv 等于两倍动能，极端相对论时 $pv \approx E$ ）：能量越高的粒子越“硬”，越难被偏折。

6.2 随机行走与高斯分布

推导：均方角随厚度线性增长

厚度 x 的物质中， μ 子会与成千上万个原子核发生小角碰撞，每次偏折的方向（在垂直于运动方向的平面内）是随机的。把总偏转角在 x 方向的投影写成 $\psi_x = \sum_j \psi_{x,j}$ 。各次碰撞相互独立且 $\langle \psi_{x,j} \rangle = 0$ ，所以和的方差等于方差之和，正如式 (5.1) 的推导：

$$\langle \psi_x^2 \rangle = \sum_j \langle \psi_{x,j}^2 \rangle \propto \text{碰撞次数} \propto x.$$

这就是随机行走：均方偏离随步数线性增长，均方根随 $\sqrt{x}$ 增长。由中心极限定理（大量独立小量之和近似服从高斯分布）， ψ_x 近似为高斯分布，其标准差记为 ψ_0 。少数近距离的“硬”碰

撞会在分布外侧形成比高斯更长的尾巴。

推导：单位厚度的均方偏转

原子数密度 $n_A = \rho N_A / A$ 。走过 dx 时碰撞参数在 $b-b+db$ 的核数为 $n_A 2\pi b db dx$ ，每次贡献空间偏转角平方 $\psi(b)^2$ 。求和：

$$\begin{aligned} \frac{d\langle\psi_{\text{sp}}^2\rangle}{dx} &= n_A \int \psi(b)^2 2\pi b db \\ &= 8\pi n_A z^2 Z^2 r_e^2 \left(\frac{m_e c^2}{\beta pc}\right)^2 \\ &\quad \times \ln \frac{b_{\text{max}}}{b_{\text{min}}}. \end{aligned}$$

积分与能量损失的积分（第 4.2 节）完全同形，也是对数发散： b_{max} 取原子电子云对核电荷的屏蔽半径， b_{min} 取原子核半径。空间角是两个垂直投影的合成， $\psi_{\text{sp}}^2 = \psi_x^2 + \psi_y^2$ ，故投影角的均方为其一半。原子中 Z 个电子也会使 μ 子偏转，粗略计入的办法是把 Z^2 换成 $Z(Z+1)$ 。于是

$$\langle\psi_x^2\rangle \propto \frac{Z(Z+1)\rho}{A} \cdot \frac{x}{(\beta pc)^2}. \quad (6.2)$$

6.3 辐射长度与 Highland 公式

定义：辐射长度

高能电子在物质中主要通过韧致辐射损失能量，平均每走过一个辐射长度 X_0 ，能量降为原来的 $1/e$ 。PDG 给出 [3]

$$\begin{aligned} \frac{1}{X_0} &\approx 4\alpha r_e^2 \frac{N_A}{A} Z(Z+1) \\ &\quad \times \ln(184 Z^{-1/3}) \end{aligned} \quad (6.3)$$

($\alpha = 1/137$ 为精细结构常数。此式略去了库仑修正等项，对铅、铀偏小约 10%，对铁小于 1%；本讲的数值一律用 PDG 表值)。表值：水 36.08 g/cm^2 (36.1 cm)，标准岩石 26.54 g/cm^2 ，铁 13.84 g/cm^2 (1.76 cm)，铅 6.37 g/cm^2 (0.56 cm)，铀 6.00 g/cm^2 (0.32 cm) [3]。

为什么一个描述“电子辐射”的长度会出现在 μ 子的散射里？比较式 (6.2) 与式 (6.3)：两者都正比于 $Z(Z+1)\rho/A$ ——韧致辐射本质上也是电子在原子核库仑场中的“偏转”。所以 x/X_0 恰好就是散射公式里与材料有关的那个组合。附录 B 计算两个对数之比（约为 2），得到

$$\begin{aligned} \langle\psi_{\text{sp}}^2\rangle &\approx \left(\frac{E_s}{\beta pc}\right)^2 \frac{x}{X_0}, \\ E_s &= m_e c^2 \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} = 21.2 \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

即 Rossi 与 Greisen 1941 年的结果 [20]。

要点：Highland 公式（给定结论）

实用中，投影角分布中央 98% 用高斯近似，其标准差为 [3, 21, 22]

$$\psi_0 = \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta pc} z \sqrt{\frac{x}{X_0}} \times \left[1 + 0.038 \ln \frac{xz^2}{X_0 \beta^2} \right]. \quad (6.5)$$

适用于 $10^{-3} < x/X_0 < 100$ ，精度约 11%。与式 (6.4) 的投影版本 $E_s/\sqrt{2} = 15.0 \text{ MeV}$ 相比，系数 13.6 与对数修正来自对精确的 Molière 理论分布的拟合：中央部分比“全部散射角的均方根”窄，因为后者被少数大角单次散射拉大。多层材料要先把 x/X_0 相加，再代入一次式 (6.5)（不能把各层的 ψ_0 平方相加）[3]。

检验：标度与数值

$p = 3 \text{ GeV}/c$ 的 μ 子 ($\beta \approx 1$) 穿过 10 cm 铁： $x/X_0 = 10/1.757 = 5.69$,

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \frac{13.6}{3000} \sqrt{5.69} (1 + 0.038 \ln 5.69) \\ &= 11.5 \text{ mrad}. \end{aligned}$$

换成 10 cm 铅： $x/X_0 = 17.8$, $\psi_0 = 21.2 \text{ mrad}$ ；铀： $x/X_0 = 31.6$, $\psi_0 = 28.8 \text{ mrad}$ 。动量加倍， ψ_0 减半；厚度加倍， ψ_0 增大 $\sqrt{2}$ 倍（略多，来自对数项）。

7 宇宙线 μ 子

7.1 立体角与强度

定义：立体角

从一点 O 看一块小面元 dA ，面元到 O 的距离为 r ，面元法线与视线夹角为 χ 。面元在垂直于视线方向上的投影为 $dA \cos \chi$ ，它对 O 所张的立体角定义为

$$d\Omega = \frac{dA \cos \chi}{r^2}, \quad (7.1)$$

单位为球面度 (sr)，整个球面对球心张 $4\pi \text{ sr}$ 。取以 O 为心的单位球面上的面元 ($\chi = 0, r = 1$)，用天顶角 θ 与方位角 φ 表示，面元为 $(d\theta)(\sin \theta d\varphi)$ ，所以 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ 。

定义：强度与通量

(积分) 强度 $I(\theta, \varphi)$ ：单位时间内、穿过垂直于方向 (θ, φ) 的单位面积、方向落在单位立体角内的粒子数，单位 $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$ 。微分强度 $I(p, \theta)$ 再“按动量分档”，多一个 $(\text{GeV}/c)^{-1}$ ；对动量从 p 积到无穷，得积分强度 $I(> p, \theta)$ 。

穿过平面的通量 J ：单位时间穿过某个平面单位面积的粒子数。方向与平面法线成 θ 角的粒子“看到”的平面面积缩小为 $\cos \theta$ 倍（投影），所以

$$J = \int I(\theta, \varphi) \cos \theta d\Omega. \quad (7.2)$$

7.2 从初级宇宙线到 μ 子

背景：初级宇宙线

从宇宙空间射到大气顶部的高能粒子叫初级宇宙线，主要是质子，其次是氦核和少量更重的原子核。在几 GeV 到约 10^6 GeV 之间，其强度随能量近似按 $E^{-2.7}$ 下降 [16]。它们在大气中与氮、氧原子核碰撞，产生大量次级粒子，统称空气簇射（图 5）。

推导：首次碰撞发生在多高

质子在空气中的核相互作用长度 $\lambda_I = 90.1 \text{ g/cm}^2$ [3]：平均每穿过 90.1 g/cm^2 的空气发生一次核碰撞。首次碰撞所在的深度服从均值为 λ_I 的指数分布，所以首次碰撞的平均深度为 $X = \lambda_I$ 。竖直大气深度 $X(h)$ 是高度 h 以上单位面积空气柱的质量，由流体静力学平衡 $dp/dh = -\rho g$ 得 $X(h) = p(h)/g$ ；海平面 $X = 1033 \text{ g/cm}^2$ 。若某一层大气等温（温度 T_a ），由理想气体 $\rho = pM_a/(R_g T_a)$ （ M_a 为空气摩尔质量， R_g 为气体常数）可得 $dp/p = -dh/H$ ，即在这一层内

$$\begin{aligned} X(h) &= X(h_1) e^{-(h-h_1)/H}, \\ H &= \frac{R_g T_a}{M_a g}, \\ \rho(h) &= \frac{X(h)}{H}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

这里 h_1 是该层的下边界。真实大气在 11 km 以下（对流层）温度随高度近似线性下降，在 11–20 km（平流层下部）近似等温， $T_a \approx 217 \text{ K}$ ， $H = 6.34 \text{ km}$ （1976 年美国标准大气）。对流层顶 $h_1 = 11 \text{ km}$ 处的深度由标准大气算得 $X(h_1) = 231 \text{ g/cm}^2$ 。令 $X = \lambda_I$ ： $h = 11 \text{ km} + H \ln(231/90.1) = 17.0 \text{ km}$ ；对标准大气直接数值求解也得 17.0 km。（若把 217 K 的等温大气一直用到海平面，会得到 15.5 km；但对流层并不等温，这个数与下面的 15 km 接近只是巧合。）PDG 说“ μ 子大多产生在约 15 km 高处” [16]，依据的是另一个量： μ 子的母粒子 π 介子（下一小节介绍）由首次及后续几代碰撞不断产生，同时母核子流按 $e^{-X/\Lambda}$ 衰减（ $\Lambda \approx 121 \text{ g/cm}^2$ 为核子流的衰减长度，比 λ_I 长，因为碰撞后的领头核子仍带走相当一部分能量），低能（ $E_\pi \ll E_\pi^*$ ，几乎全部衰变）的 π 的强度在 $X = \Lambda$ 处达到极大 [16]。按标准大气， $X = 121 \text{ g/cm}^2$ 对应 15.1 km。

7.3 π 介子：衰变还是再碰撞

π 介子是最轻的一类强相互作用粒子（介子），有 π^+ 、 π^- 、 π^0 三种；中微子是几乎不与物质发生作用的中性轻子；K 介子是比较 π 重的另一类介子。碰撞产生的带电 π 介子（ $m_\pi c^2 = 139.6 \text{ MeV}$ ，静止寿命 26.0 ns ， $c\tau_\pi = 7.80 \text{ m}$ [3]）有两种命运：衰变成 μ 子和中微子（ $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ ， $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ ），或者在衰变前再次撞上原子核。

推导：两种命运的分界能量

考虑竖直向下、能量 E 的 π 介子位于平流层下部、大气深度 X 处（该层近似等温）。它走过面密度 dX ，对应路程 $dl = dX/\rho = H dX/X$ （式 (7.3)）。

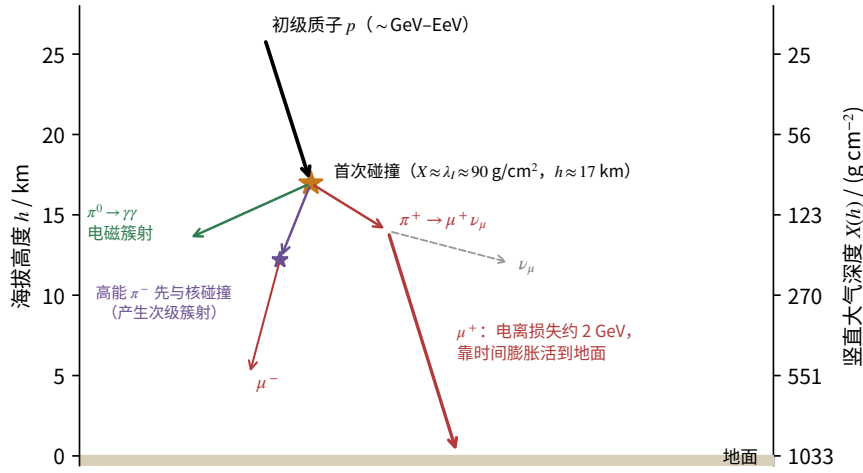


图 5 空气簇射示意。左轴为海拔，右轴为由 1976 年美国标准大气算出的竖直大气深度 $X(h)$ ；首次碰撞的高度按 $X = \lambda_I = 90.1 \text{ g/cm}^2$ 计算。 π^0 立即衰变为两个光子，引发电磁簇射； $\pi^\pm$ 衰变为 μ 子与中微子；高能 $\pi^\pm$ 来不及衰变就再次与核碰撞。

- 衰变概率：由式 (3.7)，每走 dl 衰变的概率为 $dl/(\gamma c \tau_\pi)$ ($\beta \approx 1$)，即 $\frac{m_\pi c^2}{E} \frac{H}{c \tau_\pi} \frac{dX}{X}$ ；
- 相互作用概率： dX/λ (λ 为 π 的相互作用长度，与 λ_I 同量级)。

两者之比为 $\frac{E_\pi^*}{E} \cdot \frac{\lambda}{X}$ ，其中

$$\begin{aligned} E_\pi^* &\equiv \frac{m_\pi c^2 H}{c \tau_\pi} \\ &= \frac{0.1396 \text{ GeV} \times 6340 \text{ m}}{7.80 \text{ m}} \\ &= 113 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

在 π 产生的深度 $X \sim \lambda$ 处， $E \ll E_\pi^*$ 的 π 几乎都衰变， $E \gg E_\pi^*$ 的 π 多半先碰撞。对带电 K 介子 ($m_K c^2 = 493.7 \text{ MeV}$, $c \tau_K = 3.71 \text{ m}$) 同样得到 $E_K^* = 844 \text{ GeV}$ 。

要点： μ 子谱的两个区域

- $E_\mu \ll E_\pi^*$ ： π 衰变概率接近 1， μ 子谱基本“继承”初级谱的形状， $dI/dE \propto E^{-2.7}$ （在 10–100 GeV 范围成立；更低能量处还受 μ 子自身衰变和能量损失的影响而变平）；
- $E_\mu \gg E_\pi^*$ ：衰变概率 $\propto E_\pi^*/E$ ， μ 子谱比初级谱陡一个幂次， $\propto E^{-3.7}$ 。

PDG 给出的 Gaisser 公式正体现了这一点（适用于 $E_\mu > 100/\cos \theta \text{ GeV}$ 、 $\theta < 70^\circ$ ）[16]：

$$\begin{aligned} \frac{dN_\mu}{dE_\mu d\Omega} &\approx \frac{0.14 E_\mu^{-2.7}}{\text{cm}^2 \text{ sr GeV}} \\ &\times \left[\frac{1}{1 + \frac{1.1 E_\mu \cos \theta}{115 \text{ GeV}}} + \frac{0.054}{1 + \frac{1.1 E_\mu \cos \theta}{850 \text{ GeV}}} \right], \end{aligned} \quad (7.5)$$

式中 E_μ 以 GeV 为单位。两个分母中的 115 GeV 与 850 GeV 正是式 (7.4) 估计的 E_π^* 与 E_K^* 。因子 1.1 反映 μ 子只继承母介子的一部分能量（由衰变运动学， E_μ 在 $0.57E_\pi$ 到 E_π 之间），按陡峭的能谱加权后近似为 $E_\pi \approx 1.1E_\mu$ ；这是 Gaisser 解析近似中的有效系数，本讲不推导。 $\cos\theta$ 的出现是因为斜着穿过大气时，同样的深度处空气更稀薄（ $\rho = X \cos\theta/H$ ）， π 更容易衰变，分界能量变为 $E_\pi^*/\cos\theta$ 。

7.4 通量与角分布

强度与通量的定义见第 7.1 节。

推导：水平探测器的计数率

设 $I = I_0 \cos^n \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$ ，与 φ 无关)。代入式 (7.2)，令 $u = \cos\theta$ ：

$$\begin{aligned} J &= 2\pi I_0 \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi I_0 \int_0^1 u^{n+1} du = \frac{2\pi I_0}{n+2}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

海平面实测：动量大于 1 GeV/c 的竖直强度 $I_0 \approx 70 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ ，角分布 $n \approx 2$ [16]。于是

$$\begin{aligned} J &= \pi I_0 / 2 \\ &= 110 \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \\ &= 0.66 \text{ cm}^{-2} \cdot \text{min}^{-1}; \end{aligned}$$

计入 1 GeV/c 以下的 μ 子，实验者常记的数是“水平探测器约 $1 \text{ cm}^{-2} \text{ min}^{-1}$ ” [16]。注意：若忘了式 (7.2) 中的 $\cos\theta$ ，结果会变成 $2\pi I_0/(n+1)$ ，偏大 33%。

注：为什么是 $\cos^2 \theta$

天顶角 θ 方向的 μ 子要穿过 $\sec\theta$ 倍的大气：一方面路程更长、飞行时间更长，衰变得更多；另一方面能量损失更多（ $\sec\theta \times 2 \text{ GeV}$ ），低能 μ 子到不了地面。两者都使斜向强度降低。 $\cos^2 \theta$ 是 $E_\mu \sim 3 \text{ GeV}$ 附近的典型行为；能量更低时分布更陡，能量更高（ $E_\mu \gg E_\pi^*$ ）时反而接近 $\sec\theta$ （上一小节的 $\cos\theta$ 效应占优） [16]。所以“ n ”与探测器的能量阈值有关，这正是实验题（第 11 节）要测的量。

7.5 能谱

本讲需要在 1 GeV 到几 TeV 的整个范围内使用海平面 μ 子谱。我们采用 Reyna 对多组实验数据的拟合 [23]：先给出竖直方向的微分强度

$$I_v(p) = c_1 p^{-(c_2 + c_3 \lg p + c_4 \lg^2 p + c_5 \lg^3 p)}, \quad (7.7)$$

$\lg$ 表示以 10 为底的对数， p 以 GeV/c 计， I_v 以 $\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} (\text{GeV/c})^{-1}$ 计， $c_1 = 0.00253$ ， $c_2 = 0.2455$ ， $c_3 = 1.288$ ， $c_4 = -0.2555$ ， $c_5 = 0.0209$ ；再用经验标度关系推到任意天顶角：

$$I(p, \theta) = \cos^3 \theta I_v(p \cos \theta). \quad (7.8)$$

适用范围 $p > 1 \text{ GeV}/c$ 、 $p < 2000/\cos\theta \text{ GeV}/c$ 。这是对数据的经验拟合，没有简单的理论推导，我们把它当作“测得的谱”使用。

检验：与 PDG 数据核对

对式 (7.7) 从 $1 \text{ GeV}/c$ 积分到无穷，得竖直积分强度 $70.2 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ ，与 PDG 的 ≈ 70 一致（脚本 `fig_spectrum.py` 用 `assert` 核对）。与式 (7.5)（竖直）相比：100–300 GeV/c 内两者相差不到 13%，但 Gaisser 公式在更高能量处偏低，500 GeV/c 处约低 20%，1 TeV/c 处约低 30%（图 6a）。不同参数化在更高能段的这种差别，就是火山成像（ $E_{\min}$ 为几百 GeV ）中谱形不确定度的量级（第 8.5 节）。

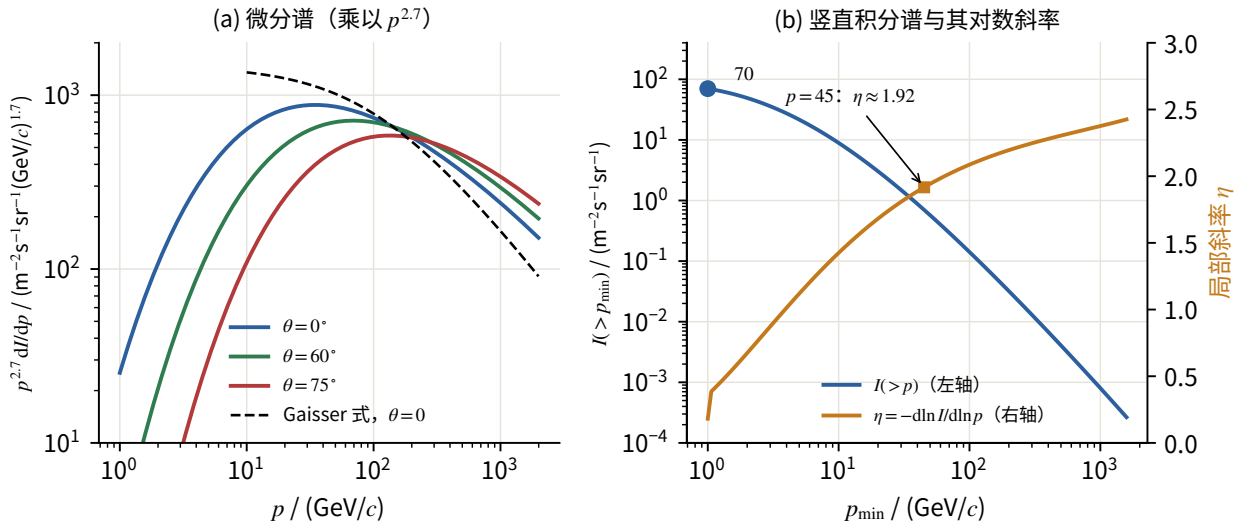


图 6 (a) 式 (7.7)–(7.8) 给出的海平面微分谱（乘以 $p^{2.7}$ 以压缩纵轴），三条曲线对应三个天顶角；虚线为 Gaisser 公式 (7.5)（只在 $p \gtrsim 100 \text{ GeV}/c$ 有效）。(b) 竖直积分强度 $I(> p_{\min})$ （蓝）及其局部对数斜率 η （橙，右轴）。

定义：积分谱的局部斜率

$$\eta(p) \equiv -\frac{d \ln I(> p)}{d \ln p}. \quad (7.9)$$

若 $I(> p) \propto p^{-\eta}$ 是严格幂律， η 就是那个幂指数；对真实谱， η 随 p 缓慢变化。由图 6b： $p = 10 \text{ GeV}/c$ 时 $\eta \approx 1.4$ ，45 GeV/c 时 $\eta \approx 1.9$ ，700 GeV/c 时 $\eta \approx 2.3$ 。 η 将决定透射成像的灵敏度。

7.6 大气中的能量损失与存活

整层大气的面密度 $1033 \text{ g}/\text{cm}^2$ ，按最小电离约 $2 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$ 计，竖直穿过大气的 μ 子损失约 2 GeV ，这与 PDG 的说法一致 [16]。能量变化使式 (3.7) 中的衰变长度沿途变化，固有时要逐段积分：

$$\tau = \int \frac{m dx}{p(x)}, \quad P = e^{-\tau/\tau_\mu}. \quad (7.10)$$

$p(x)$ 由能损方程 $dE/dx = -\rho(x) (dE/dX)$ 与 $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ 给出。

检验：与 PDG 的例子核对

PDG 写道：“能量 2.4 GeV 的 μ 子衰变长度为 15 km，计入能量损失后缩短为 8.7 km” [16]。由式 (3.7)， $\lambda_d = (2.4/0.1057) \times 658.6 \text{ m} \times \beta = 14.9 \text{ km}$ 。本讲的脚本 (atmos.py) 从 15 km 高处以 2.4 GeV 出发，按标准大气和 PDG 空气能损表积分式 (7.10)， μ 子到达地面时剩 0.51 GeV， $\tau = 1.67\tau_\mu$ ；定义“有效衰变长度” $15 \text{ km}/(\tau/\tau_\mu) = 9.0 \text{ km}$ ，与 PDG 的 8.7 km 相差 3%。

7.7 Frisch–Smith 实验

Frisch 与 Smith 的实验设计很巧妙 [6]。探测器是一大块塑料闪烁体，上方放置吸收体。只有那些恰好停在闪烁体里的 μ 子才被记录： μ 子进入闪烁体时发出一次闪光，停下来后衰变出的电子发出第二次闪光，两次闪光的时间差就是这个 μ 子静止时的寿命样本。这一设计一举两得：

1. 能停在闪烁体里，意味着 μ 子在进入吸收体前的能量落在一个窄范围内，即选出了一个确定的速度窗口（山顶处 $0.9950c$ – $0.9954c$ ）；
2. 同一台仪器测出的衰变时间分布给出静止 μ 子的寿命，就是“ μ 子钟”的定标。

在山顶每小时约记录 563 个，在高度低约 1.9 km 的海平面每小时约 412 个（据文献转述 [5]）。若没有时间膨胀， μ 子从山顶飞到海平面用时 $t \approx 1.9 \text{ km}/(0.995c) = 6.4 \mu\text{s}$ ，约 2.9 个寿命，海平面只应剩 $563 \times e^{-2.9} \approx 30$ 个/小时（作者用实测衰变曲线算得约 27 个）。实测 412 个，意味着 μ 子在这段路上只经历了约 $0.7 \mu\text{s}$ 的固有时，时间膨胀因子约 9。

还有一个细节： μ 子在 1.9 km 空气中损失几百 MeV，速度从 $0.995c$ 降到约 $0.988c$ ， γ 从约 10 降到约 6.3，所以“膨胀因子”沿途变化。例题 1 将定量处理，并说明为什么海平面的吸收体必须比山顶的薄。（据转述，Frisch 与 Smith 给出的海平面速度为 $0.9881c$ – $0.9897c$ 、 $\gamma \approx 6.8$ [5]，比本讲按 PDG 空气能损与标准大气算出的 6.3 大约 8%。差别可能来自他们所用的能损数据或空气柱面密度，原文正文未能核实。若取 $\gamma_2 = 6.8$ ，固有时约减小 4%，有效时间膨胀因子正好是他们给出的 8.4。）

交互演示： μ 子从产生高度竖直下落。调节产生高度与地面能量，比较“无时间膨胀”“时间膨胀、能量不变”“时间膨胀 + 能损”三种情况下存活比例随高度的变化；也可切换为 Frisch–Smith 模式（山顶 1.91 km， $v = 0.9952c$ ），读出海平面的期望计数率。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 muon-decay）。

8 透射成像**8.1 测量量：沿视线的不透明度****定义：径迹探测器**

能测出带电粒子穿过位置的探测平面叫位置灵敏探测器；两层以上这样的平面上下排列，由各层的击中点连线得到粒子方向，整套装置叫径迹探测器（或“望远镜”）。只有在很短时间窗口内各层同时有信号才记为一个事例，叫符合，用以排除噪声。径迹方向常用它在两个竖直平面（东西、南北）上投影的倾角正切表示：若方向单位矢量为 $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ （ x 向东、 y 向北、

z 向上), 则 $\tan \theta_x = n_x/n_z$, $\tan \theta_y = n_y/n_z$ (附录 D)。本讲提到的几种:

- 塑料闪烁体: 带电粒子穿过时发出微弱荧光, 由光电倍增管或硅光电倍增器 (MPPC) 转为电信号。KEK 径迹仪由宽 1 cm 的闪烁体条排成两层正交阵列, 读出条号即得坐标 [9]。
- 核乳胶: 特制的厚层照相乳胶, 带电粒子穿过处的溴化银晶粒在显影后变黑, 用自动显微镜扫描可重建三维径迹, 角精度可达几 mrad。它不耗电, 但只能累计一段时间后取回显影, 没有时间信息 [9]。
- 气体探测器 (如 Micromegas): 粒子使气体电离, 电离电子在强电场中雪崩放大后被细读出条收集, 给出坐标 [9]。1960 年代 Alvarez 使用的火花室也是一种气体探测器: 粒子经过后加高压, 沿电离径迹打出可见的火花。

把能测出 μ 子入射方向的探测器 (径迹探测器) 放在待测物体下方或内部。对方向 (θ, φ) 附近的一个小立体角 $\Delta\Omega$, 曝光时间 T 内的期望计数为

$$\mu_N = \Phi(X(\theta, \varphi), \theta) S_{\text{eff}} \Delta\Omega T, \\ \Phi(X, \theta) \equiv I(> E_{\min}(X), \theta), \quad (8.1)$$

其中 $X(\theta, \varphi) = \int \rho dl$ 沿这条视线从探测器积分到物体表面, S_{eff} 是探测器对该方向的有效面积 (平板探测器为 $S \cos \theta_d$, θ_d 是视线与探测器法线的夹角), $E_{\min}$ 由式 (4.8) 给出。测出 μ_N 的估计值 N , 反解出 X , 再除以由几何测量得到的路径长度 L , 就得到这条视线上的平均密度 $\bar{\rho} = X/L$ 。一张 “ μ 子照片” 的每个像素就是一条视线上的 X 或 $\bar{\rho}$ (图 7)。

定义: 接收度

探测器对某个方向范围的接收度定义为 $G = \int S_{\text{eff}}(\theta, \varphi) d\Omega$, 单位 $\text{m}^2 \text{sr}$, 即 “有效面积 $\times$ 立体角”。若强度在该范围内近似不变, 计数 $= I \times G \times T$ 。式 (8.1) 中的 $S_{\text{eff}} \Delta\Omega$ 就是小立体角 $\Delta\Omega$ 的接收度。

8.2 透射强度对不透明度的灵敏度

推导: 对数灵敏度

由链式法则,

$$\frac{d \ln \Phi}{d \ln X} = \left. \frac{d \ln I(> E)}{d \ln E} \right|_{E=E_{\min}} \cdot \frac{d \ln E_{\min}}{d \ln X}.$$

第一个因子是 $-\eta(E_{\min})$ (式 (7.9), 在 $E \gg mc^2$ 时不区分 E 与 pc)。第二个因子由式 (4.8) 求导:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln E_{\min}}{d \ln X} &= \frac{X}{E_{\min}} \frac{d E_{\min}}{d X} = \frac{X \cdot a e^{bX}}{(a/b)(e^{bX} - 1)} \\ &= \frac{bX e^{bX}}{e^{bX} - 1} \equiv g(bX). \end{aligned}$$

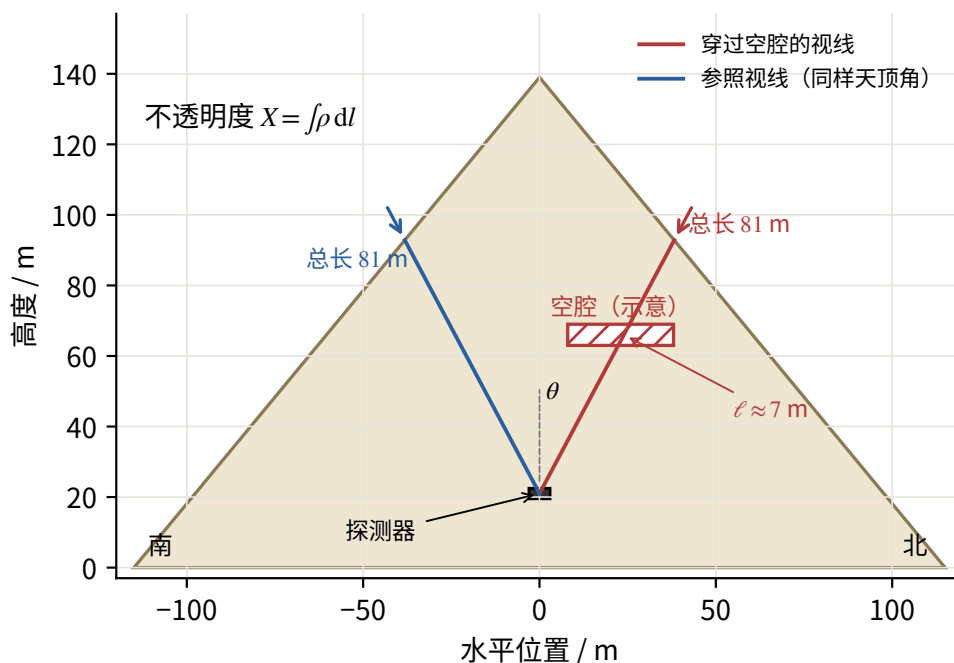


图 7 透射成像原理示意。金字塔外形按真实尺寸（底宽 230 m，高 139 m）；探测器在王后墓室高度（21 m），空腔位置与大小仅为示意。两条视线天顶角相同（ 28° ），从探测器到表面的总长都约 81 m；红色视线其中约 7 m 在空腔中，岩石长约 74 m，不透明度较小， μ 子计数更多。图中尺寸只是示意，与第 8.3 节所取的 $\theta = 29^\circ$ 、 $L = 90$ m 不同。

于是

$$\begin{aligned}
 \eta' &\equiv -\frac{d \ln \Phi}{d \ln X} \\
 &= \eta(E_{\min}) g(bX), \\
 g(u) &= \frac{u e^u}{e^u - 1} \\
 &= 1 + \frac{u}{2} + \mathcal{O}(u^2).
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

要点：灵敏度的含义

不透明度相对变化 $\delta X/X$ 引起透射强度相对变化 $\delta \Phi/\Phi \approx -\eta' \delta X/X$ 。金字塔（ $X \approx 2 \times 10^4$ g/cm²， $\eta \approx 1.9$ ， $bX = 0.08$ ）： $\eta' \approx 2.0$ ；火山（近水平视线 $\theta \approx 80^\circ$ ， $X \approx 1.25 \times 10^5$ g/cm²， $bX = 0.5$ ，该天顶角下 $\eta \approx 2.0$ ， $g = 1.27$ ）： $\eta' \approx 2.5$ 。（若误用竖直谱的斜率， $E_{\min} \approx 360$ GeV 处 $\eta = 2.27$ ，会得到 $\eta' \approx 2.9$ 。）反过来，用 N 个计数测定的平均密度的统计精度为

$$\frac{\delta \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{\delta X}{X} = \frac{1}{\eta'} \frac{\delta N}{N} = \frac{1}{\eta' \sqrt{N}}. \tag{8.3}$$

因为 $\eta' \approx 2$ ，测 1% 的密度只需要约 2500 个计数。

8.3 空腔造成的超额

推导：超额与空腔长度

设视线上岩石密度均匀为 ρ ，总长 L ，其中一段长 ℓ 是空腔（充满空气，密度可忽略）。不透明度从 $X = \rho L$ 变为 $X' = \rho(L - \ell) = X(1 - \ell/L)$ 。相对计数超额定义为

$$\varepsilon \equiv \frac{\Phi(X') - \Phi(X)}{\Phi(X)}.$$

若 $\ell \ll L$ ，对 $\ln \Phi$ 在 $\ln X$ 处作一阶泰勒展开：

$$\begin{aligned} \ln \Phi(X') - \ln \Phi(X) & \\ & \approx -\eta' [\ln X' - \ln X] \\ & = -\eta' \ln(1 - \ell/L) \approx \eta' \ell/L. \end{aligned}$$

于是

$$\varepsilon \approx \eta' \frac{\ell}{L} \quad (\ell \ll L). \quad (8.4)$$

保留的是 ℓ/L 的一阶项；略去的二阶项来自 $\ln(1 - \ell/L)$ 的展开、 $e^{(\cdot)} - 1$ 的展开和 η' 随 X 的变化；前两项使超额增大，第三项使之略减小（ η' 随 X 增大），合计使真实超额略大于一阶估计。

检验：数值与文献对照

取王后墓室中的乳胶片看向大空洞的方向：天顶角约 29° ，岩石长度 $L \approx 90 \text{ m}$ （文献给出该视场内岩石厚度 65–115 m[9]），石灰岩 $\rho = 2.2 \text{ g/cm}^3$ 。 $X = 1.98 \times 10^4 \text{ g/cm}^2$ ， $E_{\min} = 45 \text{ GeV}$ ，在 $\theta = 29^\circ$ 的谱上 $\eta = 1.88$ ， $\eta' = 1.96$ 。

- $\ell = 3 \text{ m}$ ：式 (8.4) 给出 6.5%，用完整谱精确计算为 6.8%；
- $\ell = 5 \text{ m}$ ：10.9%，精确 11.8%。

KEK 径迹仪在不同切片中测得的超额为 5.2%–11%[9]，按式 (8.4) 相当于视线穿过约 2.5–5 m 的空腔，与“截面与大走廊相当”的描述相容。

交互演示：透射强度随不透明度变化。 滑块选择天顶角、岩石密度与长度、空腔长度，图中给出 $E_{\min}(X)$ 、透射强度 $\Phi(X)$ 曲线，并标出空腔造成的超额 ε 与一阶近似 $\eta'\ell/L$ 的对比。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 muon-opacity）。

8.4 统计：需要多少 μ 子

推导：显著性与曝光时间

记“无空腔”时窗口内的期望计数为 μ_0 ，有空腔时为 $(1 + \varepsilon)\mu_0$ 。按式 (5.2)，期望的显著性

$$n_\sigma = \frac{(1 + \varepsilon)\mu_0 - \mu_0}{\sqrt{\mu_0}} = \varepsilon\sqrt{\mu_0}. \quad (8.5)$$

要达到 n_σ ，需要 $\mu_0 = (n_\sigma/\varepsilon)^2$ 个本底计数；结合式 (8.1)，曝光时间

$$T = \frac{(n_\sigma/\varepsilon)^2}{\Phi S_{\text{eff}} \Delta\Omega}. \quad (8.6)$$

超额减半，所需时间变为 4 倍；这是计数实验的“平方律”。地球物理中评估 μ 子成像可行性时用的正是这一类估计 [24]。

检验：核算 ScanPyramids 的 13.7σ

名古屋大学的乳胶片有效面积 0.45 m^2 ，在位置 NE1 曝光 98 天 [9]。取分析窗口 $\Delta(\tan\theta_x) = 0.05$ 、 $0.4 \leq \tan\theta_y < 0.7$ ($\tan\theta_y$ 的范围是文献中用于展示超额的切片， $\tan\theta_x$ 的窗宽为本讲的假设)，由附录 D 的式 (D.1)，

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= 0.05 \times 0.3 \times (1 + 0.55^2)^{-3/2} \\ &= 0.0101 \text{ sr}. \end{aligned}$$

乳胶片平放， $S_{\text{eff}} = 0.45 \cos 29^\circ = 0.39 \text{ m}^2$ 。由上一小节， $\Phi = I(> 45 \text{ GeV}, 29^\circ) = 0.68 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ 。于是每天 $\mu_0 = 0.68 \times 0.39 \times 0.0101 \times 86400 = 234$ 个，98 天 2.3×10^4 个。取 $\varepsilon = 8\%$ ： $n_\sigma = 0.08 \times \sqrt{2.3 \times 10^4} = 12.1$ 。文献报告 13.7σ [9]。考虑到我们对窗口、岩石厚度和超额都只取了代表值，这个一致程度说明式 (8.5) 抓住了问题的主要部分。达到 5σ 只需 $(5/0.08)^2/234 \approx 17$ 天。

注：为什么把探测器放进金字塔里

探测器若放在金字塔外面（如 CEA 的望远镜在北面外侧），看向空洞的视线要穿过更多石头， Φ 迅速下降： X 增大一倍， Φ 约降为 $2^{-2} = 1/4$ ($\eta' \approx 2$)。同时 ℓ/L 变小，超额也降低。CEA 用两台望远镜各两个月得到合并 5.8σ [9]，正反映了这一点。

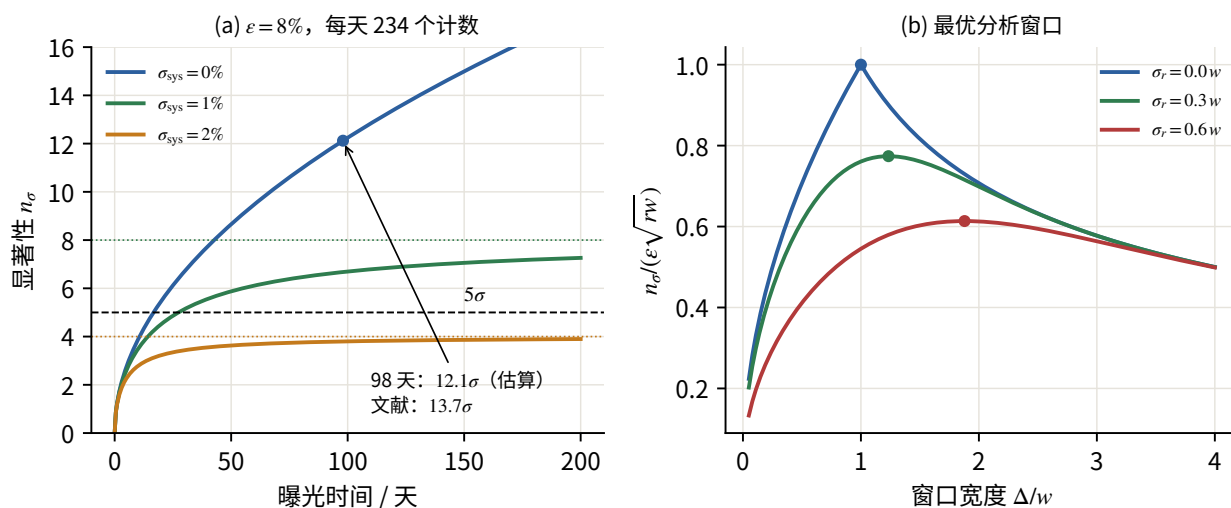
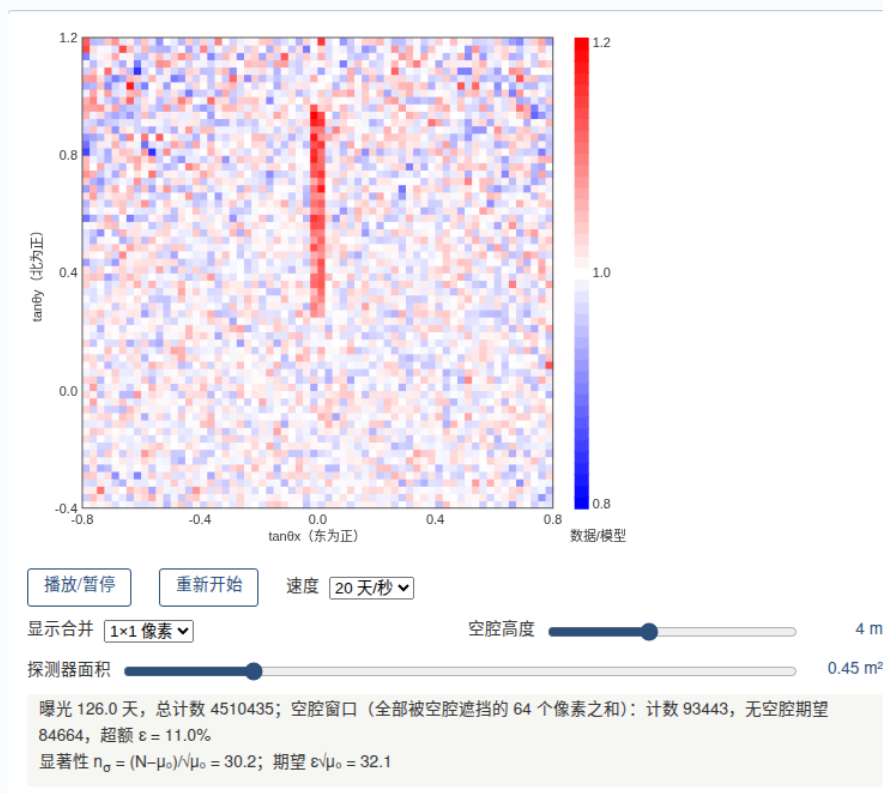


图 8 (a) 以上述乳胶片参数估算的显著性随曝光时间的增长 ($\varepsilon = 8\%$)，三条曲线对应不同的、与统计无关的系统误差 σ_{sys} ；点线为天花板 $\varepsilon/\sigma_{\text{sys}}$ (式 (8.7))。(b) 分析窗口宽度 Δ 与空腔角宽 w 之比对显著性的影响（例题 2 第 (4) 问）， σ_r 为探测器角分辨。

交互演示：模拟金字塔内探测器的 μ 子成像：按式 (8.1) 对每个方向像素用泊松分布抽样累积计数，显示“数据/无空腔模型”的比值图；随曝光天数增加，空腔逐渐从噪声中浮现。可把相邻像素合并显示（体会第 8.4 节“分析窗口”的取舍），读数给出空腔窗口（取所有被空腔遮挡的像素之和，与上面检验框中 0.05×0.3 的窗口不同，所以超额与显著性数值也不同）的超额与显著性 n_σ ，并可与 $\varepsilon\sqrt{\mu_0}$ 的预期比较。



网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 muon-imaging）。

8.5 系统误差与本底

推导：系统误差设定的天花板

若“无空腔”期望 μ_0 本身有相对系统误差 σ_{sys} （岩石密度与几何的不确定、谱的形状误差、探测效率的不均匀等），它与泊松涨落独立，方差相加： $\sigma^2 = \mu_0 + \sigma_{\text{sys}}^2 \mu_0^2$ 。于是

$$\begin{aligned}
 n_\sigma &= \frac{\varepsilon \mu_0}{\sqrt{\mu_0 + \sigma_{\text{sys}}^2 \mu_0^2}} \\
 &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{1/\mu_0 + \sigma_{\text{sys}}^2}} \\
 &\xrightarrow{\mu_0 \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{\sigma_{\text{sys}}}.
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

无论曝光多久，显著性都不会超过 $\varepsilon/\sigma_{\text{sys}}$ 。 $\varepsilon = 8\%$ 、 $\sigma_{\text{sys}} = 2\%$ 时上限只有 4σ （图 8a）。

实际分析靠两个办法压低 σ_{sys} ：(i) 用物体内部没有目标的区域对模拟做归一化，让谱的整体幅度、探测效率等大尺度误差相消（谱的整体幅度本身就有 10%–15% 的不确定 [16]）。但谱的形状误差不能这样消去：火山成像的 E_{min} 在几百 GeV，那里不同参数化相差 20%–30%（第 7.5 节），由

式 (8.3) 相当于密度的系统误差 8%–12%，必须用同一探测器在开阔天空方向实测谱来标定；(ii) 寻找的是局部的鼓包，与相邻方向比较，只有在小角度尺度上起伏的误差才进入 σ_{sys} 。ScanPyramids 估计石块尺度（约 1 m）的表面起伏造成的相对误差小于 2% [9]。

注：本底与分辨

- 假信号本底：低能电子、质子、被散射偏转的 μ 子，甚至从背后入射被误判方向的粒子，会混入“穿过岩石”的计数。它们与岩石厚度无关，使厚岩石方向的计数偏高，因而把密度测低（例题 4）。火山观测常在探测平面之间夹铅板以吸收低能粒子 [11]。
- 岩石中的多次散射：若按入射能量 45 GeV 计算，穿过 90 m 石灰岩（约 750 个辐射长度，已超出式 (6.5) 的适用范围，只作量级估计）投影角的高斯宽度 $\psi_0 \approx 10 \text{ mrad}$ （相应地 $|\psi_x|$ 的中位数只有 $0.67\psi_0 \approx 7 \text{ mrad}$ ）。但能透射过来的 μ 子在路径末端——恰好是“空腔到探测器”这一段——能量最低，而散射正比于 $\int dX/(pc)^2$ ，主要发生在末段。按透射谱抽样、计入沿途能损（脚本 `rock_ms.py`）：每个 μ 子的 ψ_0 的中位数约 14 mrad，比按入射能量算的 10 mrad 大； $|\psi_x|$ 的中位数约 8 mrad（45 m 外约 0.4 m）。约 1/5 的 μ 子出射能量低于 5 GeV，散射大得多，10% 的 μ 子偏角超过约 40 mrad（45 m 外约 1.8 m）。所以空腔的像有一个清晰的核心和一圈 1–2 m 的晕；ScanPyramids 的模拟必须计入散射，原因正在于此。

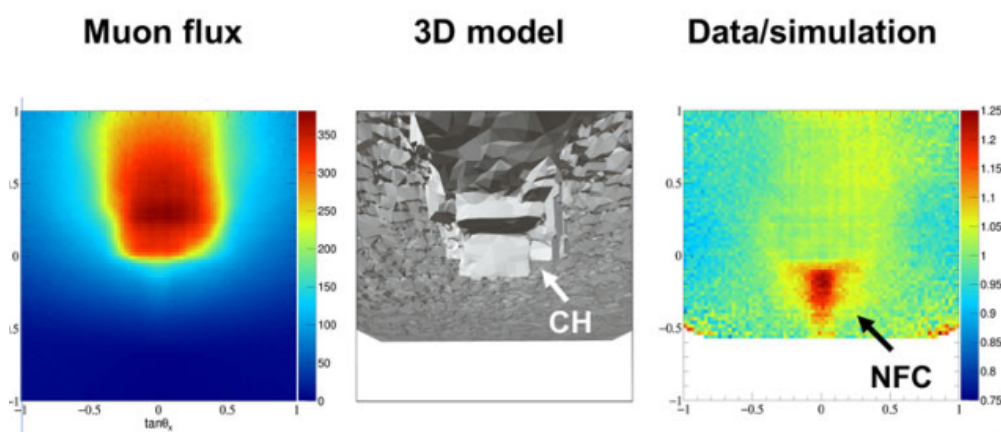


图 9 2023 年 ScanPyramids 对北面走廊 (NFC) 的核乳胶观测 (位置 EM1)。左：实测 μ 子通量的角分布 (横、纵轴为 $\tan \theta_x$ 、 $\tan \theta_y$ ，色标单位：径迹/($\text{cm}^2 \cdot \text{天} \cdot \text{sr}$))；中：三维模型；右：数据与“无走廊”模拟之比，箭头处的红色区域即走廊造成的超额，可达 20% 以上。（图源：S. Procureur *et al.*, Nat. Commun. 14, 1144 (2023), Fig. 3b (EM1 一行的前三幅，经裁剪)，CC BY 4.0, <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

9 散射成像

9.1 原理

透射成像只对“挡住了多少 μ 子”敏感，适合几十米到几千米的大物体。对集装箱这样只有几米大、但可能藏着几厘米重金属的物体，大部分 μ 子都能穿过，透射几乎不变；有用的信息在偏折里。在物体上方和下方各放一组径迹探测器，测出每个 μ 子的入射方向与出射方向，两者之

差就是散射角 (ψ_x, ψ_y)；把入射与出射径迹外推，求两条直线的最近点，可以估计散射主要发生在哪里（“最近点法”）。对很多 μ 子统计，就得到“散射强度”的三维分布。

由式 (6.5)，散射角的宽度由 x/X_0 决定，而 X_0 随原子序数急剧下降（式 (6.3) 中的 $Z(Z+1)/A$ ）。表 2 列出几种材料的数值。

表 2 10 cm 厚的几种材料（水取 1 m）对 $p = 3 \text{ GeV}/c$ 的 μ 子的投影散射角宽度（式 (6.5)）

材料	X_0/cm	厚度/cm	x/X_0	ψ_0/mrad
水	36.1	100	2.77	7.8
铁	1.76	10	5.69	11.5
铅	0.561	10	17.8	21.2
铀	0.317	10	31.6	28.8

9.2 动量未知的代价

宇宙线 μ 子的动量分布很宽，而简单的径迹探测器不测动量。每个 μ 子的散射角来自宽度 $\psi_0(p) \propto 1/(\beta p)$ 的高斯分布， p 因 μ 子而异，所以实测分布是许多不同宽度的高斯分布的混合。

推导：混合分布的均方与峰度

对给定的 p ， $\langle \psi_x^2 | p \rangle = \psi_0(p)^2$ 。对 p 的分布求平均（忽略 Highland 公式中对数项随 p 的缓慢变化）：

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_x^2 \rangle &= \psi_0(p_{\text{ref}})^2 (\beta p)_{\text{ref}}^2 \\
 &\quad \times \left\langle \frac{1}{(\beta p)^2} \right\rangle \\
 &\equiv \psi_0(p_{\text{ref}})^2 \frac{(\beta p)_{\text{ref}}^2}{p_{\text{eff}}^2}, \\
 p_{\text{eff}} &\equiv \langle (\beta p)^{-2} \rangle^{-1/2}.
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

高斯分布的四阶矩为 $3\sigma^4$ ，所以混合后 $\langle \psi_x^4 \rangle = 3 \langle \psi_0^4 \rangle$ ，峰度比 $\kappa = 3 \langle (\beta p)^{-4} \rangle / \langle (\beta p)^{-2} \rangle^2 \geq 3$ （附录 C）。

假设：海平面动量分布模型

$p > 1 \text{ GeV}/c$ 用式 (7.7) 的竖直谱； $p < 1 \text{ GeV}/c$ 取平坦谱（PDG：“1 GeV 以下谱几乎平坦” [16]）。这是一个模型假设。

要点：截断由被测物体决定

只有穿透整个物体（以及下方探测器中的吸收层）的 μ 子才会被下方径迹探测器记录，所以被记录的 μ 子谱在某个截断动量 p_c 以下为零。 p_c 由沿途的总能损决定：物体越厚、越重， p_c 越高；同一台装置看“铀块”和“铅块”时截断不同（例题 3）。 p_{eff} 与 κ 对 p_c 很敏感（表 3，按入射动量计算、不计物体内的减速）：

表 3 入射动量谱在截断 p_c 以上部分的有效动量 $p_{\text{eff}} = \langle (\beta p)^{-2} \rangle^{-1/2}$ 与峰度比 κ (脚本 `scatter_model.py`)

$p_c/(\text{GeV}/c)$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0
$p_{\text{eff}}/(\text{GeV}/c)$	1.07	1.26	1.43	1.59	1.74	1.89	2.18
κ	15.9	12.4	10.5	9.28	8.46	7.87	7.09

以 $p_c = 0.5 \text{ GeV}/c$ 为例: $p_{\text{eff}} = 1.43 \text{ GeV}/c$, $\kappa = 10.5$ 。不测动量时, 实测均方根散射角约为“ $3 \text{ GeV}/c$ 单一动量”值的 $3/1.43 = 2.1$ 倍, 分布有很长的尾巴 (图 10b)。 μ 子在物体内部减速会使最慢的那部分散射得更厉害, 实际的 κ 还要更大; 单次大角散射 (Highland 公式只描述中央 98%) 也会进一步加长尾巴。

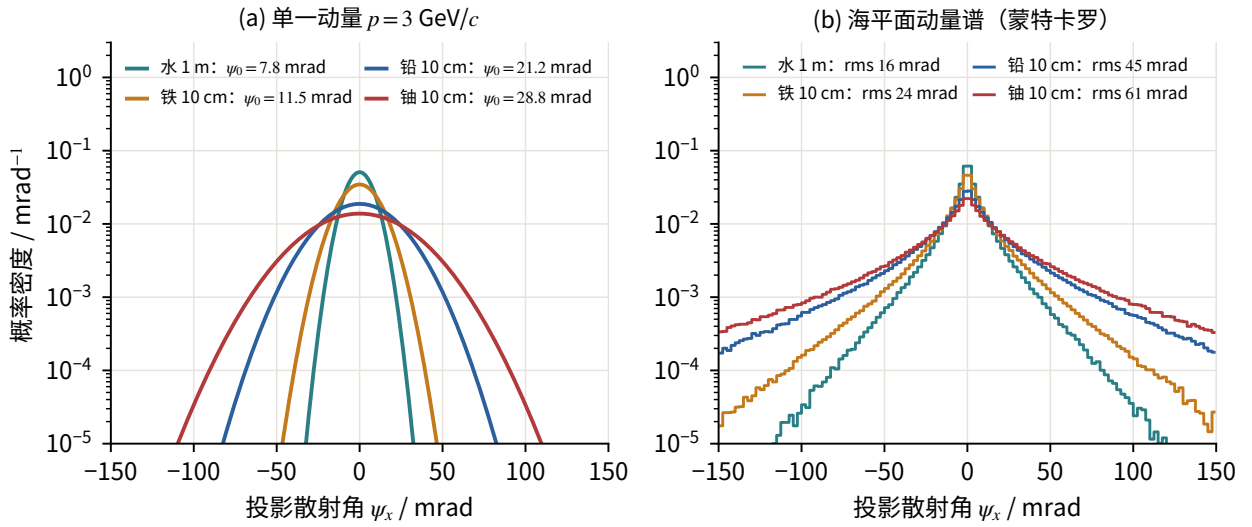


图 10 投影散射角分布。(a) 单一动量 $3 \text{ GeV}/c$, 按 Highland 公式的高斯分布; (b) 按上述海平面动量模型 (截断 $p_c = 0.5 \text{ GeV}/c$, 不计减速) 抽样 4×10^5 个 μ 子 (蒙特卡罗), 分布中心尖、尾巴长, 峰度比约 10.5。脚本核对了 (a) 中铀与铅 ψ_0^2 之比等于辐射长度之比乘以对数修正。

9.3 所需 μ 子数

推导: 两个投影角并不独立

每个 μ 子测得两个投影角 ψ_x, ψ_y 。给定动量 p 时, 二者是宽度同为 $\sigma(p) = \psi_0(p)$ 的独立高斯变量; 但 p 未知且对两者相同: 动量小的 μ 子两个投影都大, 动量大的两个都小。所以 ψ_x^2 与 ψ_y^2 正相关, 不能当作 $2N$ 个独立样本。正确的做法是把每个 μ 子当作一个样本, 取 $m_i = \frac{1}{2}(\psi_{x,i}^2 + \psi_{y,i}^2)$, N 个 μ 子的 m_i 相互独立。先对给定 p 求条件矩, 再对 p 平均 (附录 C):

$$\begin{aligned}\langle m \rangle &= \langle \sigma^2 \rangle, \\ \langle m^2 \rangle &= \frac{1}{4} \langle 3\sigma^4 + 2\sigma^4 + 3\sigma^4 \rangle = 2 \langle \sigma^4 \rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\text{Var } m}{\langle m \rangle^2} &= \frac{2 \langle \sigma^4 \rangle - \langle \sigma^2 \rangle^2}{\langle \sigma^2 \rangle^2} \\ &= \frac{2\kappa}{3} - 1.\end{aligned}\tag{9.2}$$

单一动量时 $\kappa = 3$, 结果为 1, 与 “ $2N$ 个独立高斯样本” 的 $\sqrt{2/(2N)}$ 一致; $\kappa = 10.5$ 时为 6.0, 而错误地把两投影当独立样本会得到 $(\kappa-1)/2 = 4.75$, 低估 26%。蒙特卡罗 (`ex3_numbers.py`, 按例题 3 中铅假设的截断抽样, $\kappa = 10.0$; 每组 300 个 μ 子、重复 2×10^4 组) 测得的相对误差与式 (9.2) 相符到 0.1%。

推导：区分两种材料

设两个假设(如“铀块”与“铅块”)预言的均方投影角为 $Q_1 > Q_2$, 比值 $R = Q_1/Q_2$ 。由式 (9.2), N 个 μ 子的均方估计 $\bar{m}$ 的相对误差为 $\sqrt{(2\kappa/3-1)/N}$ 。要求两种预言之差 $Q_1 - Q_2 = (R-1)Q_2$ 达到 n_σ 个标准差:

$$(R-1) \geq n_\sigma \sqrt{\frac{2\kappa/3-1}{N}} \\ \Rightarrow N \geq \left(\frac{2\kappa}{3}-1\right) \left(\frac{n_\sigma}{R-1}\right)^2. \quad (9.3)$$

这里用了一个近似: 误差按假设 2 的预言 Q_2 与峰度计算。例题 3 把能损截断、两投影相关、“走满厚度”的接收度都计入后, 区分 10 cm 铀块与铅块 ($n_\sigma = 5$) 需要约 700 个 μ 子、约半小时; 计入物体内部减速的完整数值模型给出约 20–90 分钟 (取决于下方是否有剔除慢 μ 子的吸收层, 也与块体在货物中的竖直位置有关)。实际系统常同时粗测 μ 子动量 (例如利用探测器自身各层中的散射), 把慢 μ 子单独处理, 以缩短时间。

交互演示: 与例题 3 相同的简化模型: μ 子竖直穿过货物与箱壁 (公共 x/X_0 与能损可调, 默认值即例题 3 的 2.84 与 305 MeV) 和块体。选择 “材料” 与 “对照材料” (水、铝、铁、铅、钨、铀)、块体厚度与动量模式 (单一动量或入射谱); 两种假设各自由能损算出截断, 所以记录到的不是同一批 μ 子。演示实时抽样并累积投影散射角直方图, 读数给出两种假设的截断与预言均方根、对照假设的峰度 κ_2 、比值 R 、按式 (9.2)–(9.3) 所需的 μ 子数 (默认设置下约 750 个; 与例题 3 的约 700 个的差别来自演示对每个 μ 子按其自身动量计算 Highland 公式中的对数项与 β , 而例题按 3 GeV/c 计算后整体换算), 以及当前样本已达到的显著性。不计物体内部的减速。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 `muon-scatter`)。

10 决赛风格例题

例题 1: 重做 Frisch–Smith 实验

山顶探测器比海平面探测器高 $h = 1.91$ km。山顶选出的 μ 子速度取 $v_1 = 0.9952c$ 。山顶计数率 $N_1 = 563$ 个/小时, 海平面计数率 $N_2 = 412$ 个/小时。已知 $\tau_\mu = 2.197 \mu\text{s}$, $m_\mu c^2 = 105.66$ MeV; 两探测器之间的竖直空气柱面密度 $\Delta X = 213.5$ g/cm²; 在 $\beta\gamma \approx 6$ –10 时, μ 子在空气中的能损取常数 $a_{\text{air}} = 1.95$ MeV cm²/g, 在铁中取 $a_{\text{Fe}} = 1.54$ MeV cm²/g; 铁的密度 7.87 g/cm³。

1. 若没有时间膨胀, 海平面每小时应有多少个?
2. 若有时间膨胀但忽略能量损失, 海平面每小时应有多少个?
3. 计入能量损失。(a) 求 μ 子到达海平面时的 γ_2 与速度。(b) 把空气密度视为均匀, 证明

μ 子飞行的固有时与实验室时间分别为

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\operatorname{arcosh} \gamma_1 - \operatorname{arcosh} \gamma_2}{kc}, \\ t &= \frac{\sqrt{\gamma_1^2 - 1} - \sqrt{\gamma_2^2 - 1}}{kc}, \\ k &\equiv \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{h}.\end{aligned}$$

($\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ 。) (c) 求预期计数率与“有效时间膨胀因子” t/τ 。

4. 由实测计数率反推时间膨胀因子。若山顶与海平面各计数 1 小时，统计误差多大？要使时间膨胀因子的统计误差降到 10%，两地各需计数多久？
5. 海平面探测器上方的吸收体若与山顶相同，选出的是不是“同一批 μ 子”？若要选出在山顶速度为 v_1 的那批 μ 子，海平面的铁吸收体应比山顶薄多少？
6. 在 μ 子的瞬时静止参考系中，它能“活着”到达海平面的原因是迎面而来的大气层被洛伦兹收缩。写出该参考系中“收缩后的空气层逐段掠过 μ 子所需时间”的积分，证明它等于第 (3)(b) 问的 τ 。

解答

(1) 实验室飞行时间

$$\begin{aligned}t_0 &= h/v_1 \\ &= 1910 \text{ m} / (0.9952 \times 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}) \\ &= 6.40 \text{ } \mu\text{s} = 2.91\tau_\mu.\end{aligned}$$

由式 (3.6) (此时固有时等于实验室时)， $N_1 e^{-2.91} = 563 \times 0.0543 = 31$ 个/小时 (作者按实测衰变曲线算得 27 个，差别来自衰变时间分布的细节)。

(2) $\gamma_1 = 1/\sqrt{1 - 0.9952^2} = 10.22$ ，固有时 $\tau = t_0/\gamma_1 = 0.627 \text{ } \mu\text{s}$ ，预期 $563 e^{-0.627/2.197} = 423$ 个/小时。

(3)(a) 能量 $E = \gamma m_\mu c^2$ 。穿过 ΔX 损失 $a_{\text{air}} \Delta X = 1.95 \times 213.5 \text{ MeV} = 416 \text{ MeV}$ ，故 $\gamma_2 = \gamma_1 - 416/105.66 = 10.22 - 3.94 = 6.28$ ， $v_2 = c\sqrt{1 - 1/\gamma_2^2} = 0.9872c$ 。(用 PDG 空气能损表与标准大气数值积分得 $\gamma_2 = 6.27$ 。)

(b) 能损率均匀、密度均匀时， γ 随路程线性减小： $\gamma(x) = \gamma_1 - kx$ 。由式 (3.5)， $d\tau = dx/(c\sqrt{\gamma^2 - 1})$ (用了 $\beta\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1}$)。换元 $dx = -d\gamma/k$ ：

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{kc} \int_{\gamma_2}^{\gamma_1} \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \\ &= \frac{\operatorname{arcosh} \gamma_1 - \operatorname{arcosh} \gamma_2}{kc}.\end{aligned}$$

实验室时间 $dt = dx/v = dx \gamma/(c\sqrt{\gamma^2 - 1})$ ，同样换元： $t = \frac{1}{kc} \int_{\gamma_2}^{\gamma_1} \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} = \frac{\sqrt{\gamma_1^2 - 1} - \sqrt{\gamma_2^2 - 1}}{kc}$ 。

(c)

$$\begin{aligned} kc &= 3.94 \times 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} / 1910 \text{ m} \\ &= 6.18 \times 10^5 \text{ s}^{-1}, \end{aligned}$$

即 $1/(kc) = 1.617 \mu\text{s}$ 。 $\text{arcosh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$: $\text{arcosh } 10.22 = 3.015$, $\text{arcosh } 6.28 = 2.524$ 。于是 $\tau = 0.491 \times 1.617 \mu\text{s} = 0.794 \mu\text{s}$, $t = (10.17 - 6.20) \times 1.617 \mu\text{s} = 6.42 \mu\text{s}$ 。预期计数 $563 e^{-0.794/2.197} = 392$ 个/小时; 有效时间膨胀因子 $t/\tau = 8.1$, 介于 $\gamma_1 = 10.2$ 与 $\gamma_2 = 6.3$ 之间 (Frisch 与 Smith 给出 8.4 ± 2 [6])。按标准大气 (密度随高度变化) 数值积分得 $\tau = 0.791 \mu\text{s}$, 393 个/小时: 密度不均匀只改变 γ 随 x 变化的快慢分布, 对固有时影响很小。检验: $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1$ ($k \rightarrow 0$) 时,

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow (\gamma_1 - \gamma_2)/(kc\sqrt{\gamma_1^2 - 1}) \\ &= h/(c\beta_1\gamma_1) \\ &= t_0/\gamma_1, \end{aligned}$$

回到第 (2) 问。

(4) 由 $N_2 = N_1 e^{-\tau/\tau_\mu}$,

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_\mu \ln(N_1/N_2) \\ &= 2.197 \times \ln(563/412) \mu\text{s} \\ &= 0.686 \mu\text{s}, \end{aligned}$$

时间膨胀因子 $t/\tau = 6.42/0.686 = 9.4$ 。两个计数独立, $\ln(N_1/N_2)$ 的方差为 $1/N_1 + 1/N_2$ ($\delta \ln N = \delta N/N = 1/\sqrt{N}$), 故 $\sigma[\ln(N_1/N_2)] = \sqrt{1/563 + 1/412} = 0.0648$, 相对误差 $0.0648/0.312 = 21\%$: 9.4 ± 1.9 , 与 (3) 的 8.1 相差 0.7σ 。各计数 T_h 小时, 相对误差按 $1/\sqrt{T_h}$ 下降, 要降到 10% 需 $T_h = (0.21/0.10)^2 \approx 4.3$ 小时。

(5) 不是。吸收体相同时, 海平面选出的是“到达海平面时”速度为 v_1 的 μ 子, 它们在山顶时能量更高, 是另一批粒子, 其在山顶的计数率并不是 563。要选出同一批, 海平面的吸收体要“少吃掉”空气已经吃掉的那部分能量, 即 416 MeV: 铁的面密度应减少 $\Delta X_{\text{Fe}} = 416/1.54 \text{ g/cm}^2 = 270 \text{ g/cm}^2$, 即约 34 cm 铁 (用 PDG 铁的 CSDA 射程表计算两能量的射程差, 得 270 g/cm^2)。这一步是“比较同一批粒子的存活率”的关键, 也说明为什么不能简单比较两地的全部 μ 子计数: 全部 μ 子的能谱在两地不同。

(6) 取 μ 子在某一时刻的瞬时静止系 (速度 $v(x)$ 处的惯性系)。在这个参考系中, 大气以速度 v 迎面而来; 地面系中 dx 的一段空气, 在 μ 子系中被收缩为 dx/γ , 它以速度 v 掠过 μ 子所需的时间为 $(dx/\gamma)/v = dx/(\gamma v)$ ——这正是式 (3.5) 中的 $d\tau$ 。对整段路程求和, $\int dx/(\gamma v) = \int dx/(c\sqrt{\gamma^2 - 1})$, 与第 (3)(b) 问完全相同。 μ 子按自己的寿命 τ_μ 衰变, 但它需要“经历”的时间只有 $\tau \approx 0.79 \mu\text{s}$ 。两种参考系的描述给出同一个可观测量 (到达海平面的数目)。

例题 2: 金字塔里的空洞是水平的还是倾斜的

探测器位于胡夫金字塔中轴上、高出地面 21 m 处 (王后墓室高度); 金字塔看作底宽 230 m、高 139 m 的正四棱锥, 石灰岩 $\rho = 2.2 \text{ g/cm}^3$ 。在探测器北上方有一个空洞, 可以看作厚度为 t_v (垂直于空洞自身平面量)、范围足够大的“板”, 板面与水平面成 α 角 ($\alpha > 0$ 表示向北升高, $\alpha < 0$ 表示向南升高, 大走廊对应 $\alpha \approx -26^\circ$)。只考虑南北竖直平面内、天顶角为 θ (向北) 的视线。在 $\theta \approx 20^\circ - 35^\circ$ 内取 $\eta' = 1.96$ 。

1. 证明视线穿过空洞的长度为 $\ell = t_v / \cos(\theta + \alpha)$, 视线方向的岩石总长为 $L(\theta) = (H_p - z_0) / (\cos \theta + \frac{2H_p}{B_p} \sin \theta)$ (H_p 、 B_p 为金字塔高与底宽, z_0 为探测器高度)。
2. 两个方向测得的超额为 $\varepsilon(20^\circ) = (6.0 \pm 0.3)\%$, $\varepsilon(35^\circ) = (7.7 \pm 0.35)\%$ 。“水平” ($\alpha = 0$) 与“平行于大走廊” ($\alpha = -26^\circ$) 两种假设各预言比值 $\varepsilon(35^\circ)/\varepsilon(20^\circ)$ 为多少? 数据更支持哪一种, 可信度有多高? 由数据求 t_v , 并说明两个方向给出的 t_v 是否自洽可以作为另一种检验。
3. 某一分析窗口内“无空洞”的期望计数为每天 234 个, 空洞造成的超额 $\varepsilon = 9.3\%$ 。求只计统计误差时达到 5σ 的天数; 若“无空洞”预言有 1% 或 2% 的不相关系统误差, 结果如何?
4. 空洞在 $\tan \theta_x$ 方向的角宽为 w (顶帽形)。分析窗口宽 Δ 取多大时显著性最大? 若探测器角分辨不可忽略, 最优窗口变宽还是变窄?
5. 两台探测器在东西方向相距 $b_d = 10.3 \text{ m}$ (东边的 A 位于大走廊轴线以东 5.8 m, 西边的 B 位于以西 4.5 m)。设它们测得的超额中心分别位于 $\tan \theta_x = -0.130$ 和 $+0.100$ (向东为正), 每个读数的不确定度为 ± 0.0125 。求空洞中心高出探测器多少、在东西方向的位置, 以及高度的误差。

解答

(1) 取南北竖直平面内的坐标 (北为正、向上为正)。视线方向 $\hat{\mathbf{u}} = (\sin \theta, \cos \theta)$ 。向北升高 α 的板, 其法线向南倾 α : $\hat{\mathbf{n}} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$ 。穿过厚度 t_v 的板, 沿视线走过的长度 ℓ 满足 $\ell(\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = t_v$, 而 $\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha = \cos(\theta + \alpha)$, 所以 $\ell = t_v / \cos(\theta + \alpha)$ 。检验: $\alpha = 0$ 时 $\ell = t_v / \cos \theta$ (斜穿水平板); 视线与板面平行 ($\theta + \alpha = 90^\circ$) 时 $\ell \rightarrow \infty$ 。北坡面方程为 $z = H_p - (2H_p/B_p)y$; 视线上的点 $(y, z) = (t \sin \theta, z_0 + t \cos \theta)$, 代入解出 $t = L(\theta)$ 即得所给公式。数值:

$$\begin{aligned} L(20^\circ) &= 118 / (0.940 + 1.209 \times 0.342) \\ &= 87.2 \text{ m}, \end{aligned}$$

$$L(35^\circ) = 78.0 \text{ m}.$$

(2) 由式 (8.4), $\varepsilon \approx \eta' \ell / L = \eta' t_v / [L \cos(\theta + \alpha)]$, 比值中 η' 与 t_v 消去:

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon(35^\circ)}{\varepsilon(20^\circ)} \\ &= \frac{L(20^\circ)}{L(35^\circ)} \cdot \frac{\cos(20^\circ + \alpha)}{\cos(35^\circ + \alpha)} \\ &= \begin{cases} 1.118 \times 1.147 = 1.28, & \alpha = 0, \\ 1.118 \times 1.007 = 1.13, & \alpha = -26^\circ. \end{cases} \end{aligned}$$

实测比值 $7.7/6.0 = 1.283$, 误差 (两个独立相对误差平方相加) $1.283\sqrt{(0.3/6.0)^2 + (0.35/7.7)^2} = 0.087$ 。它与“水平”假设完全一致, 与“平行于大走廊”相差 $(1.283 - 1.126)/0.087 = 1.8\sigma$ ——倾向于水平, 但还不足以排除倾斜。由 $\varepsilon(20^\circ)$ 求 t_v : 水平假设

$$\begin{aligned} t_v &= \varepsilon L \cos \theta / \eta' \\ &= 0.060 \times 87.2 \times 0.940 / 1.96 \\ &= 2.5 \text{ m}, \end{aligned}$$

由 35° 方向同样得 2.5 m, 自洽; 倾斜假设由两个方向分别得 2.7 与 3.0 m, 相差约 1.9σ (与比值检验基本是同一信息)。2017 年的数据不能区分这两种几何 (图 1 中红、绿两种阴影), 原因正在于此: 两种假设预言的超额剖面差别只有十几个百分点, 需要每个方向都有百分之几以下的统计精度。

(3) 由式 (8.5), 只计统计: $\mu_0 = (5/0.093)^2 = 2.9 \times 10^3$, 需 $2.9 \times 10^3/234 = 12$ 天。由式 (8.7), $1/\mu_0 = (\varepsilon/5)^2 - \sigma_{\text{sys}}^2$ 。 $\sigma_{\text{sys}} = 1\%$: $1/\mu_0 = 3.46 \times 10^{-4} - 1.0 \times 10^{-4}$, $\mu_0 = 4.1 \times 10^3$, 需 17 天; $\sigma_{\text{sys}} = 2\%$: $(\varepsilon/5)^2 = 3.46 \times 10^{-4} < 4 \times 10^{-4}$, 天花板 $\varepsilon/\sigma_{\text{sys}} = 4.6 < 5$, 再久也达不到 5σ , 必须压低系统误差 (例如与相邻方向比较、用无目标区域归一化)。

(4) 设单位角宽内本底计数为 r 。窗口 $\Delta \geq w$ 时, 超额计数 $\varepsilon r w$, 本底 $r \Delta$, $n_\sigma = \varepsilon r w / \sqrt{r \Delta} \propto \Delta^{-1/2}$; $\Delta \leq w$ 时, 超额 $\varepsilon r \Delta$, $n_\sigma = \varepsilon \sqrt{r \Delta} \propto \Delta^{1/2}$ 。所以 $\Delta = w$ 最优, $n_\sigma^{\text{max}} = \varepsilon \sqrt{r w}$: 窗口过宽, 信号被稀释; 过窄, 丢掉信号。角分辨 σ_r 使空腔像被抹宽, 信号溢出到窗口外, 最优窗口变宽: $\sigma_r = 0.3w$ 时最优 $\Delta \approx 1.23w$, 最大显著性降为 0.77 倍 (图 8b, 数值计算)。

(5) 设空腔中心在 A、B 上方高度 z 处, 东西坐标为 x_c (以大走廊轴线为原点, 向东为正)。A 在 $x = +5.8$, B 在 $x = -4.5$:

$$\frac{x_c - 5.8}{z} = -0.130, \quad \frac{x_c + 4.5}{z} = +0.100.$$

两式相减: $10.3/z = 0.230$, $z = 44.8 \text{ m}$; 代回得 $x_c = 5.8 - 0.130 \times 44.8 = -0.02 \text{ m}$, 即在大走廊轴线正上方。高度误差: $z = b_d/\Delta t$, $\Delta t = t_B - t_A$ 的误差 $\sqrt{2} \times 0.0125 = 0.0177$,

$$\begin{aligned} \delta z &= z \delta(\Delta t) / \Delta t \\ &= 44.8 \times 0.0177 / 0.230 \\ &= 3.4 \text{ m}. \end{aligned}$$

文献报告空腔中心距王后墓室地面 40–50 m[9] (本题读数为设定值, 用来说明三角测量的原理)。基线越长、角分辨越好, 定位越准。

例题 3: 集装箱里藏着铀还是铅

集装箱上下各有一组径迹探测器, 测每个 μ 子的入射与出射方向 (角分辨可忽略), 不测动量。下方探测器之下还有一块 10 cm 厚的钢板, 只有穿透它的 μ 子才计入分析 (用来剔除低能本底)。箱内是 1 m 厚的“水等效”货物, 箱壁上下合计 0.6 cm 钢 (钢均按铁计, 密度 7.87 g/cm^3)。怀疑货物中藏有一块边长 10 cm 的立方体金属块 (铀或铅), 只考虑竖直穿过块体中部的 μ 子: 它们穿过 90 cm 水、10 cm 金属块与上下箱壁。已知 X_0 (cm): 水 36.1, 铁 1.757, 铅 0.561, 铀 0.317; 密度: 铀 18.95 、铅 11.35 g/cm^3 ; 能损 ($\text{MeV cm}^2/\text{g}$, 在相关能区取常数): 水 2.0, 铁 1.5, 铀 1.15, 铅 1.18。入射动量谱用第 9.2 节的模型, 表 3 可线性插值。

1. 对 $p = 3 \text{ GeV}/c$ 的 μ 子, 分别求穿过“铀块路径”和“铅块路径”时的 ψ_0 。
2. 求两种假设下能被记录的 μ 子的最小入射动量 p_c , 进而求实测投影角均方根之比 R 。为什么 R 比第 (1) 问中单一动量的比值小?
3. 同一个 μ 子的 ψ_x 与 ψ_y 是否独立? 求以 5σ 区分“铀”与“铅”所需的 μ 子数。
4. 只有从块体上表面进入、从下表面穿出的 μ 子才走满 10 cm 厚度。取天顶角 $\theta < 45^\circ$ 、积分强度 $I(\theta) = J_v \cos^2 \theta$, 其中 $J_v = 0.0083 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ 是第 9.2 节谱模型中 $p > 0.5 \text{ GeV}/c$ 的竖直积分强度, 求这类 μ 子的计数率与所需时间。(提示: 借用实验题第 (1) 问的接收度公式。)
5. 多厚的铅块与 10 cm 的铀块散射相同? 怎样打破这种“厚度-材料简并”?
6. 走私者用上下各 5 cm 厚的铅壳包住铀块以屏蔽其 γ 射线。这对“发现可疑重物”和“区分铀与铅”分别有利还是不利?

解答

(1) 多层材料先把 x/X_0 相加: 公共部分 $90/36.1 + 0.6/1.757 = 2.493 + 0.341 = 2.836$; 铀块路径 $2.836 + 31.58 = 34.42$; 铅块路径 $2.836 + 17.82 = 20.65$ 。 $\beta(3 \text{ GeV}/c) = 0.9994$, 前因子 $13.6/(0.9994 \times 3000) = 4.536 \text{ mrad}$ 。由式 (6.5):

$$\begin{aligned}\psi_0^{\text{U}} &= 4.536 \sqrt{34.42} (1 + 0.038 \ln 34.42) \text{ mrad} \\ &= 30.2 \text{ mrad}, \quad \psi_0^{\text{Pb}} = 23.0 \text{ mrad},\end{aligned}$$

单一动量下的比值 $(30.2/23.0)^2 = 1.73$ 。

(2) 被记录的 μ 子必须穿透全部材料与下方钢板。按题给能损, 公共部分 (90 g/cm^2 水 + 4.7 g/cm^2 箱壁) 损失 $180 + 7 = 187 \text{ MeV}$; 钢板 78.7 g/cm^2 损失 118 MeV ; 铀块 $189.5 \times 1.15 = 218 \text{ MeV}$, 铅块 $113.5 \times 1.18 = 134 \text{ MeV}$ 。所以入射动能至少为: 铀 523 MeV , 铅 439 MeV 。换成动量 $p_c = \sqrt{(T + m_\mu c^2)^2 - (m_\mu c^2)^2}/c$: 铀 $0.62 \text{ GeV}/c$, 铅 $0.53 \text{ GeV}/c$ 。由表 3 线性插值:

铀 $p_{\text{eff}} \approx 1.62 \text{ GeV/c}$ 、 $\kappa \approx 9.1$ ；铅 $p_{\text{eff}} \approx 1.48 \text{ GeV/c}$ 、 $\kappa \approx 10.0$ 。由式 (9.1)，均方根为

$$\begin{aligned}\text{铀: } 30.2 \times \frac{3.00}{1.62} &= 56 \text{ mrad}, \\ \text{铅: } 23.0 \times \frac{3.00}{1.48} &= 46.5 \text{ mrad}, \\ R &= \left(\frac{56}{46.5} \right)^2 = 1.45.\end{aligned}$$

R 比 1.73 小，是因为铅的能损小、截断低，“铅”假设下被记录的样本里含更多慢 μ 子，它们散射大，部分抵消了铅辐射长度较长的效果。两个假设下记录到的不是同一批 μ 子，这一点不能忽略。

(3) 不独立： ψ_x 、 ψ_y 共享同一个未知动量（第 9.3 节）。每个 μ 子的 $m = \frac{1}{2}(\psi_x^2 + \psi_y^2)$ 的相对方差为 $2\kappa/3 - 1$ （式 (9.2)），按“铅”假设取 $\kappa = 10.0$ ，得 5.7。由式 (9.3)：

$$N \geq 5.7 \times \left(\frac{5}{0.45} \right)^2 \approx 700.$$

若误把两投影当独立样本（因子 $(\kappa - 1)/2 = 4.5$ ），会低估为约 550。

(4) 实验题第 (1) 问的结果对任何两块相同的正方形平面都成立。这里两块“平面”就是块体的上下表面，取 $D = d = 10 \text{ cm}$ ， $\tan \theta \leq 1$ 正好满足 $D \tan \theta \leq d$ 。计数率

$$\begin{aligned}\dot{N} &= J_v d^2 \int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \cos \theta \\ &\quad \times (2\pi - 8 \tan \theta + 2 \tan^2 \theta) d\theta.\end{aligned}$$

三项积分分别为

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta &= (1 - \cos^4 45^\circ)/4 \\ &= 0.1875,\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/4} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \pi/32 = 0.0982, \quad \int_0^{\pi/4} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta = \sin^4 45^\circ/4 = 0.0625, \quad \text{括号积分为}$$

$$\begin{aligned}2\pi \times 0.1875 - 8 \times 0.0982 + 2 \times 0.0625 \\ = 0.518.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\dot{N} &= 0.0083 \times 100 \times 0.518 \text{ s}^{-1} \\ &= 0.43 \text{ s}^{-1} \\ &= 26 \text{ 个/分钟}.\end{aligned}$$

若把从上表面进入的 μ 子全算上（只积第一项），会得到 59 个/分钟——其中 56% 从侧面穿出，没有走满厚度。所需时间 $700/26 \approx 27$ 分钟。（按截断严格说铅假设应取 $p > 0.53 \text{ GeV/c}$ 的强度，比 J_v 小约 1%，可忽略。第 (1)–(3) 问都按竖直路径计算；走满厚度的 μ 子按接收度加权， $\langle \sec \theta \rangle = 1.09$ ，块体中的路程、 x/X_0 与能损平均约大 9%，对 R 的影响很小，这里只作估计。）

(5) 散射只依赖 x/X_0 : $x_{\text{Pb}} = 10 \times 0.561/0.317 = 17.7 \text{ cm}$ 的铅与 10 cm 铀一样。打破筒并的办法: (i) 用最近点法做三维成像, 直接测出块体厚度 (cm 级分辨即可区分 10 与 18 cm); (ii) 比较不同入射角的 μ 子——斜穿时路径变长, 按已知几何拟合可同时得到尺寸与 X_0 ; (iii) 利用能损: 铀块使截断更高, 被“吃掉”的 μ 子比例不同 (第 (2) 问)。从 X_0 再推 Z : 铀 X_0 (cm) 比铅小 44%, 而 Z 只差 12%, 因为以 cm 计的 X_0 还含密度 (19.0 对 11.3 g/cm^3)。

(6) 对“发现”有利: 铅壳使穿过块体的 x/X_0 再增加 $2 \times 5/0.561 = 17.8$, 散射更强, 可疑重物更显眼。对“区分”不利: 铅壳给两种假设加上同一个 x/X_0 , 单一动量下 R 从 1.73 降到 $[\psi_0(34.42 + 17.8)/\psi_0(20.65 + 17.8)]^2 = 1.39$, 所需 μ 子数增加约 $(0.73/0.39)^2 \approx 3.5$ 倍; 而且“铅壳 + 铀”可被一块更大的纯铅冒充。所以实际检查先用散射找出“高 Z 重物”, 再用其他手段 (几何成像、诱发裂变的中子或 γ 测量等) 确认成分。

注: 完整数值模型

上面的解答用入射动量计算 p_{eff} , 没有计入 μ 子在块体与货物中的减速。脚本 `ex3_numbers.py` 用 PDG 射程表逐层积分减速, 并用 Highland 公式的逐层形式 $\psi_0^2 \propto \int dx/[X_0(\beta pc)^2]$ 计算散射。块体放在货物中部 (上下各 45 cm 水) 时, 得到 $R = 1.58$, $\kappa_{\text{Pb}} = 12.4$, $N \approx 540$, 约 21 分钟, 与上面的估算 (27 分钟) 同量级。若去掉下方钢板, 最慢的 μ 子也被记录, 它们在路径末端散射极大, κ 升到约 20, 所需时间增到约 47 分钟。慢 μ 子的散射集中在路径末端, 所以结果还与块体的竖直位置有关 (脚本 `ex3_position.py`): 块体在货物顶部、中部、底部时, 有钢板分别约为 19、21、25 分钟, 无钢板约为 39、47、94 分钟。这说明剔除 (或测出) 慢 μ 子对散射成像很重要。

例题 4: 火山的平均密度

探测器在火山脚下, 视线仰角 10° (天顶角 $\theta = 80^\circ$), 由地形图得这条视线在山体中的长度 $L = 500 \text{ m}$ 。探测器对该方向的有效“面积 $\times$ 立体角”为 $S_{\text{eff}}\Delta\Omega = 1.0 \text{ m}^2 \times 4.0 \times 10^{-3} \text{ sr}$, 曝光 60 天, 记录到 $N = 260$ 个穿山 μ 子。在 $\theta = 80^\circ$ 、 $E \approx 350 \text{ GeV}$ 附近, $I(> E) = I_1(E/E_1)^{-\eta}$, $I_1 = 1.176 \times 10^{-2} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$, $E_1 = 350 \text{ GeV}$, $\eta = 1.99$ 。能损参数同上。

1. 求视线上岩石的平均密度。
2. 求密度的统计误差。
3. 怀疑“穿山 μ 子”中混有与岩石厚度无关的本底 (低能电子、被散射进来的 μ 子、从背后入射被误判方向的粒子等), 其强度 Φ_{bg} 未知。同一台探测器在同样的曝光中还记录了另一条视线: 天顶角也约 80° , 山体中长 $L_B = 1000 \text{ m}$, 计数 $N_B = 85$ ($S_{\text{eff}}\Delta\Omega$ 相同)。在 $E \approx 800 \text{ GeV}$ 附近 $I(> E) = I_2(E/E_2)^{-\eta_2}$, $I_2 = 2.127 \times 10^{-3} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$, $E_2 = 800 \text{ GeV}$, $\eta_2 = 2.14$ 。假设两条视线上岩石平均密度相同、单位立体角的本底强度相同, 求 $\bar{\rho}$ 与 Φ_{bg} , 以及 $\bar{\rho}$ 的统计误差。与第 (1) 问比较, 并推出“本底比例 $f = \Phi_{\text{bg}}/\Phi_{\text{sig}}$ 造成的密度偏差”的一般公式。
4. 若火山口下方这条视线上有一段 50 m 长的岩石 (2.4 g/cm^3) 被平均密度 1.0 g/cm^3 的含气泡岩浆取代, 计数率变化多少? 若想在一周内以 3σ 看出这一变化, $S_{\text{eff}}\Delta\Omega$ 至少要增大多少倍?

解答

(1) 透射强度

$$\begin{aligned}
\Phi &= N/(S_{\text{eff}}\Delta\Omega T) \\
&= 260/(1.0 \times 4.0 \times 10^{-3} \times 5.184 \times 10^6 \text{ s}) \\
&= 1.254 \times 10^{-2} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}.
\end{aligned}$$

由 $\Phi = I_1(E_{\text{min}}/E_1)^{-\eta}$:

$$\begin{aligned}
E_{\text{min}} &= 350 \times (1.254/1.176)^{-1/1.99} \text{ GeV} \\
&= 339 \text{ GeV}.
\end{aligned}$$

由式 (4.8) 反解:

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{b} \ln(1 + bE_{\text{min}}/a) \\
&= \frac{\ln(1 + 339/550)}{4.0 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{g}} \\
&= \frac{0.480}{4.0 \times 10^{-6}} \text{ g/cm}^2 \\
&= 1.200 \times 10^5 \text{ g/cm}^2.
\end{aligned}$$

平均密度

$$\begin{aligned}
\bar{\rho} &= X/L = 1.200 \times 10^5 / (5.0 \times 10^4) \text{ g/cm}^3 \\
&= 2.40 \text{ g/cm}^3.
\end{aligned}$$

(用完整谱数值反演同样得 2.40。)

(2) $bX = 0.480$, $g = 0.480 e^{0.480} / (e^{0.480} - 1) = 1.257$, $\eta' = 1.99 \times 1.257 = 2.50$ 。由式 (8.3), $\delta\bar{\rho}/\bar{\rho} = 1/(2.50\sqrt{260}) = 2.5\%$, 即 $\bar{\rho} = (2.40 \pm 0.06) \text{ g/cm}^3$ 。注意 η' 比金字塔大: 辐射损失使 E_{min} 随 X 增长得比线性快, 密度测量反而更灵敏。

(3) 两个观测量 ($N_A = 260$ 、 $N_B = 85$)、两个未知量 ($\bar{\rho}$ 、 Φ_{bg}), 可以解出。实测强度 $\Phi_A = 1.254 \times 10^{-2}$ 、

$$\begin{aligned}
\Phi_B &= 85/(4.0 \times 10^{-3} \times 5.184 \times 10^6) \\
&= 4.10 \times 10^{-3} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}.
\end{aligned}$$

两式相减消去本底:

$$\begin{aligned}
\Phi_A - \Phi_B &= \Phi_{\text{sig}}(\bar{\rho}L_A) - \Phi_{\text{sig}}(\bar{\rho}L_B) \\
&= 8.44 \times 10^{-3} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1},
\end{aligned}$$

右边是 $\bar{\rho}$ 的单调减函数, 试几个值 (E_{min} 由式 (4.8), 强度由两段幂律):

$\bar{\rho}$	$E_{\text{min},A}/\text{GeV}$	$E_{\text{min},B}/\text{GeV}$	$\Phi_{\text{sig},A}$	$\Phi_{\text{sig},B}$	差
2.40	339	886	12.54×10^{-3}	1.71×10^{-3}	10.84×10^{-3}
2.60	375	1006	10.25×10^{-3}	1.30×10^{-3}	8.95×10^{-3}
2.70	394	1070	9.31×10^{-3}	1.14×10^{-3}	8.16×10^{-3}

线性插值得 $\bar{\rho} = 2.66$ (精确求根 2.663, 用完整谱 2.663),

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{bg}} &= \Phi_B - \Phi_{\text{sig},B} \\ &= 4.10 \times 10^{-3} - 1.20 \times 10^{-3} \\ &= 2.90 \times 10^{-3} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1},\end{aligned}$$

占视线 A 真实透射强度的 30%。第 (1) 问忽略本底, 密度偏低 0.26。误差: $\Phi_A - \Phi_B$ 的统计误差 $\sqrt{N_A + N_B}/(S_{\text{eff}}\Delta\Omega T) = 0.90 \times 10^{-3}$, 除以上表中“差”对 $\bar{\rho}$ 的斜率 (约 7.7×10^{-3} 每 g/cm^3), 得 $\delta\bar{\rho} \approx 0.12$, 即 $\bar{\rho} = (2.66 \pm 0.12) \text{ g}/\text{cm}^3$ 。扣本底的代价是误差从 2.5% 增大到 4.4%: 长视线 B 的计数主要用来测本底。这一解法依赖“两条视线密度相同”的假设; 若不同, 还需要第三个观测量 (例如探测器背向山体、朝向天空下方的方向, 那里只有本底)。

一般地, 实测 $\Phi_m = \Phi_{\text{sig}}(1 + f)$, $\ln \Phi$ 偏高 $\ln(1 + f)$, 由 $d \ln \Phi = -\eta' d \ln X$ 得

$$\frac{\delta\bar{\rho}}{\bar{\rho}} \approx -\frac{\ln(1 + f)}{\eta'} = -\frac{\ln 1.30}{2.50} = -10\%,$$

与上面 2.40 对 2.66 (−9.8%) 一致。本底总是让密度偏低; 视线越长 (透射越弱), 同样绝对强度的本底所占比例 f 越大, 偏差越严重。

(4) 按第 (1) 问的密度 2.40 计算 (忽略本底)。

$$\begin{aligned}\Delta X &= -(2.4 - 1.0) \times 5000 \\ &= -7.0 \times 10^3 \text{ g}/\text{cm}^2,\end{aligned}$$

$\Delta X/X = -5.8\%$ 。一阶估计 $\varepsilon \approx \eta' \times 5.8\% = 14.6\%$; 按幂律严格计算, E_{min} 从 339 降到 314 GeV, $\varepsilon = (314/339)^{-1.99} - 1 = 16.1\%$ ($\Delta X/X$ 已不算很小, 一阶估计偏低 1.5 个百分点)。一周内 3σ : 若“变化前”的计数率由长期测量精确知道, 需 $\mu_0 = (3/0.161)^2 = 347$ 个/周, 即 50 个/天; 现在只有 $260/60 = 4.3$ 个/天, $S_{\text{eff}}\Delta\Omega$ 需增大约 11 倍。若基线也只测了一周, 两周的计数之差的方差是单周的 2 倍 (第 5.2 节注 (i)), 需增大约 25 倍 (差值的方差为 $\mu_0(2 + \varepsilon)$; 按 $2\mu_0$ 近似为 23 倍); 或者把时间分辨率放宽到几个月。这说明“动态 μ 子成像”要求的探测器规模远大于“静态”。

11 实验与数据处理： μ 子的天顶角分布

例题：实验题： μ 子望远镜 (模拟数据)

两块相同的正方形位置灵敏探测平面 (边长 $d = 1.00 \text{ m}$) 水平放置, 上下正对, 间距 $D = 0.50 \text{ m}$ (图 11)。每个 μ 子在两平面上的击中点决定其方向, 按天顶角 θ 每 5° 分一组, 计数 $T = 600 \text{ s}$ 。假设 μ 子强度 $I(\theta) = I_0 \cos^n \theta$, 与方位角无关。表 4 给出各组计数 N_i 与主办方按组中心 θ_i 算出的接收度 G_i (第 8.1 节: 该组所有方向的 $\int S_{\text{eff}} d\Omega$, 期望计数 $\approx TG_i I(\theta_i)$)。本题数据是按题述模型 (I_0 、 n 取某组值) 计算期望后, 按泊松分布抽样生成的模拟数据, 随机种子 20261017 在出题前固定。

1. 一个方向为 (θ, φ) 的 μ 子要被记录, 必须同时穿过两块平面。证明对该方向的有效面积

为

$$S_{\text{eff}} = (d - D \tan \theta |\cos \varphi|) \times (d - D \tan \theta |\sin \varphi|) \cos \theta$$

($D \tan \theta \leq d$)，并由此证明第 i 组的期望计数为 $\mu_i = T \int_{\text{组}i} I(\theta) g(\theta) d\theta$,

$$g(\theta) = \sin \theta \cos \theta \times (2\pi d^2 - 8dD \tan \theta + 2D^2 \tan^2 \theta).$$

用组中心近似验证表中 30° – 35° 一组的 G_i 。

2. 把模型线性化，说明为什么拟合时第 i 个点的权重应取 $w_i = N_i$ ，用加权最小二乘求 n 与 I_0 及其标准误差，并计算 χ^2 。
3. 某同学只除以立体角与投影面积 $2\pi d^2 \sin \theta \cos \theta \Delta\theta$ ，忘记了两平面重叠面积随 θ 的缩小。他会得到多大的 n ？偏差方向如何理解？
4. 讨论系统误差（至少三项），说明它们使 n 偏大还是偏小，并提出改进方案。

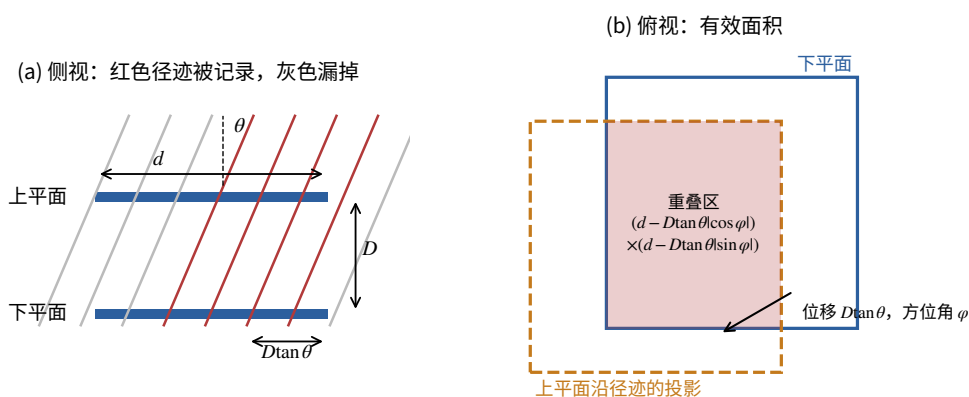


图 11 双平面 μ 子望远镜的几何接收度。(a) 侧视：一组平行的倾斜径迹中，只有同时穿过两平面的（红）被记录；(b) 俯视：沿径迹方向把上平面投影到下平面，两者的重叠区面积就是该方向的“有效面积”（再乘 $\cos \theta$ 化为垂直于径迹的面积）。

解答

(1) 方向 (θ, φ) 的径迹从上平面上的点 (x, y) 落到下平面上的点 $(x - D \tan \theta \cos \varphi, y - D \tan \theta \sin \varphi)$ 。被记录要求两个点都在各自的正方形内：在 x 方向，上平面的击中点要落在一个长 $d - D \tan \theta |\cos \varphi|$ 的区间内， y 方向同理。所以“能被记录的上平面击中点”的集合是一个矩形，面积 $(d - D \tan \theta |\cos \varphi|)(d - D \tan \theta |\sin \varphi|)$ （图 11b）。这是水平面积；垂直于径迹的面积要再乘 $\cos \theta$ ，得到 S_{eff} 。由强度定义，单位时间计数 $\int I S_{\text{eff}} d\Omega$ ， $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ 。对

表 4 天顶角分布的模拟数据 ($T = 600\text{ s}$) 与解答中的线性化变量。 G_i 按组中心计算, 单位 $10^{-3}\text{ m}^2\text{ sr}$; $x_i = \ln \cos \theta_i$, $y_i = \ln[N_i/(TG_i)]$ (TG_i 以 $\text{m}^2\text{ sr s}$ 计)

θ 范围	N_i	G_i	x_i	y_i
$0^\circ\text{--}5^\circ$	925	23.23	-0.0010	4.195
$5^\circ\text{--}10^\circ$	2485	65.11	-0.0086	4.153
$10^\circ\text{--}15^\circ$	3665	99.96	-0.0240	4.113
$15^\circ\text{--}20^\circ$	4416	126.93	-0.0474	4.060
$20^\circ\text{--}25^\circ$	4738	145.38	-0.0792	3.995
$25^\circ\text{--}30^\circ$	4771	154.99	-0.1199	3.938
$30^\circ\text{--}35^\circ$	4105	155.72	-0.1703	3.783
$35^\circ\text{--}40^\circ$	3660	147.86	-0.2315	3.720
$40^\circ\text{--}45^\circ$	2771	132.04	-0.3048	3.555
$45^\circ\text{--}50^\circ$	1892	109.25	-0.3922	3.363
$50^\circ\text{--}55^\circ$	1110	80.90	-0.4963	3.130
$55^\circ\text{--}60^\circ$	507	48.89	-0.6212	2.850

φ 积分要用 (附录 D)

$$\int_0^{2\pi} |\cos \varphi| d\varphi = \int_0^{2\pi} |\sin \varphi| d\varphi = 4,$$

$$\int_0^{2\pi} |\sin \varphi \cos \varphi| d\varphi = 2,$$

得 $\int_0^{2\pi} (\cdots) d\varphi = 2\pi d^2 - 8dD \tan \theta + 2D^2 \tan^2 \theta$, 即题给的 $g(\theta)$ 。组中心近似: $G_i = g(\theta_i)\Delta\theta$, $\Delta\theta = 5^\circ = 0.08727\text{ rad}$ 。对 $\theta_i = 32.5^\circ$: $\tan \theta_i = 0.6371$, $\sin \theta_i \cos \theta_i = 0.4532$, 括号内 $6.2832 - 2.5484 + 0.2029 = 3.9377\text{ m}^2$,

$$G = 0.4532 \times 3.9377 \times 0.08727$$

$$= 0.1557\text{ m}^2\text{ sr},$$

与表值一致。(要求 $D \tan \theta \leq d$, 即 $\theta \leq 63.4^\circ$, 本题的组都满足。)

(2) 期望计数 $\mu_i \approx TG_i I_0 \cos^n \theta_i$, 取对数:

$$y_i \equiv \ln \frac{N_i}{TG_i} = \ln I_0 + n x_i,$$

$$x_i = \ln \cos \theta_i.$$

这是关于 $(\ln I_0, n)$ 的直线。 y_i 的误差来自 N_i 的泊松涨落: $\delta y_i = \delta N_i / N_i = 1/\sqrt{N_i}$, 所以各点精度差别很大 (N 从 507 到 4771), 应以方差的倒数 $w_i = 1/\delta y_i^2 = N_i$ 为权 (附录 C 给出加权最小二乘的推导)。记 $[f] \equiv \sum_i w_i f_i$, 由表中数据: $[1] = 35045$, $[x] = -5265.4$, $[y] = 135190.2$,

$$[x^2] = 1443.20, [xy] = -18969.95, \Delta = [1][x^2] - [x]^2 = 2.2852 \times 10^7.$$

$$n = \frac{[1][xy] - [x][y]}{\Delta} = 2.058,$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{[1]}{\Delta}} = 0.039,$$

$$\ln I_0 = \frac{[x^2][y] - [x][xy]}{\Delta} = 4.1669,$$

$$\sigma_{\ln I_0} = \sqrt{\frac{[x^2]}{\Delta}} = 0.0079.$$

即 $n = 2.06 \pm 0.04$, $I_0 = (64.5 \pm 0.5) \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$ (误差只含统计)。 $\chi^2 = \sum w_i (y_i - \ln I_0 - nx_i)^2 = 12.7$, 自由度 $12 - 2 = 10$, $\chi^2/\nu = 1.27$, 拟合可以接受 ($\chi^2 > 12.7$ 的概率约 24%), 不必放大误差。作为核对, 用同一模型重复模拟 4000 次实验, 拟合的 n 的标准差为 0.039, 与公式一致。 $n \approx 2$ 与 PDG 的 $\cos^2 \theta$ 相符 [16] (图 12)。

(3) 他用 $G'_i = 2\pi d^2 \sin \theta_i \cos \theta_i \Delta \theta$, 比真实接收度多了因子 $2\pi d^2 / (2\pi d^2 - 8dD \tan \theta + 2D^2 \tan^2 \theta)$, 这个因子随 θ 增大而增大, 使 y'_i 在大角度处被压低, 直线变陡。重新拟合得 $n' = 4.26$, 比正确值大 2.2——几何接收度在这里比统计误差重要 50 倍。若连 $\cos \theta$ 投影也忘了 (只除以立体角), 还要再多出 1, 得 $n'' = 5.26$ (式 (7.6) 下的讨论)。重叠因子 $1 - \frac{4}{\pi} \frac{D}{d} \tan \theta + \frac{1}{\pi} \frac{D^2}{d^2} \tan^2 \theta$ 在小角度处随 θ 线性下降, 而 $\ln \cos \theta \approx -\theta^2/2$ 按平方变化, 所以它不等价于任何固定幂次的 $\cos \theta$: 错误版本的点不在一条直线上 (图 12 中红点略呈弯曲), 拟合斜率还依赖于所用的角度范围。

(4) 系统误差:

- 组中心近似: $\cos^n \theta$ 与 $g(\theta)$ 都在组内变化, 用中心值代替组内积分有偏差。用无噪声的精确期望值做同样拟合, 得 $n = 2.075$, 而模拟所用真值为 2.10: 此近似使 n 偏小约 0.025 (0.6σ)。改进: 拟合时对每组做数值积分 (或把组细分)。
- 角分辨与组间迁移: 击中点分辨 1 cm 时, 角分辨约 $\sqrt{2} \times 1 \text{ cm} / 50 \text{ cm} \approx 0.03 \text{ rad} \approx 1.6^\circ$, 与组宽 5° 可比。真实分布在大角度处随 θ 下降, 事例从计数多的组“漏”到相邻组, 平滑了分布, 使 n 偏小 (蒙特卡罗, 脚本 `exp_smear.py`: 每个击中点坐标加 1 cm 的高斯抹宽, 按同样方法拟合, n 偏小约 0.025, 与统计误差同量级)。改进: 增大 D (代价是大角度接收度下降) 或用模拟做反卷积。
- 能量阈值: 屋顶、探测器材料吸收低能 μ 子; 低能 μ 子的角分布更陡, 所以阈值越高, n 越小。结论 “ $n \approx 2$ ” 只对本装置的阈值成立。改进: 在两平面间加已知厚度的铅板, 测 n 随阈值的变化。
- 非 μ 子本底与效率: 低能电子 (软成分)、偶然符合会增加计数; 若它们在大角度处所占比例更大, 大角度计数被抬高, n 偏小。斜穿时粒子在闪烁体中的路程长、信号大, 探测效率随 θ 增大, 同样使 n 偏小。改进: 加铅吸收电子, 用三平面符合, 测各角度的效率。
- 大气条件: 气压升高, μ 子穿过的空气更多, 计数下降; 斜向路径更长, 大角度方向降得更多, 使 n 偏大。测量期间应记录气压, 必要时分时段修正。

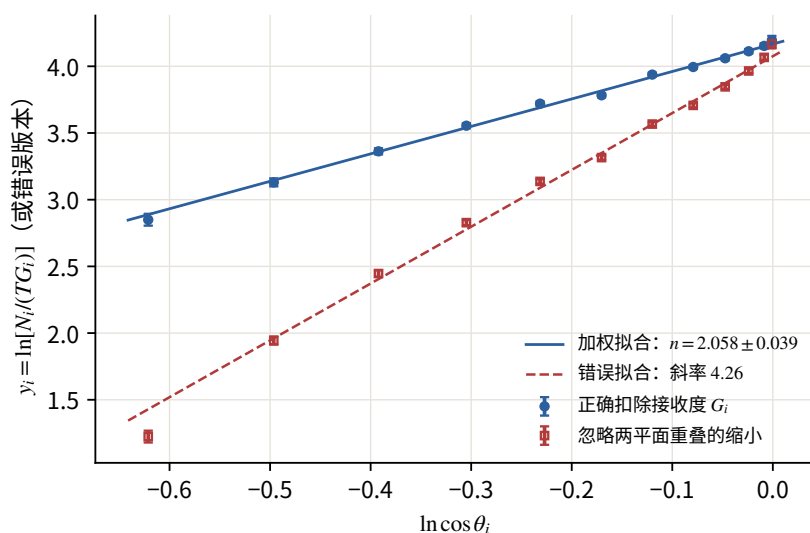


图 12 实验题数据的线性化与加权拟合（模拟数据）。蓝：正确扣除接收度 G_i ；红：忘记两平面重叠面积缩小时的“错误版本”，斜率被高估为 4.26。误差棒为 $1/\sqrt{N_i}$ 。

12 小结

本讲的推导链如下（箭头表示“由……推出”）：

- 固有时 $d\tau = dt/\gamma = m dx/p$ （式 (3.5)）+ 无记忆衰变 $\Rightarrow$ 存活概率 $e^{-\tau/\tau_\mu}$ （式 (3.6)） $\Rightarrow \mu$ 子能从 15 km 高空到达地面；能量沿途变化时逐段积分（式 (7.10)，例题 1 的 arcosh 公式）。
- 一次擦肩而过的冲量 $2ze^2/(4\pi\epsilon_0 bv)$ （式 (4.2)） $\Rightarrow$ 对碰撞参数积分，得阻止本领正比于 Z/A ，反比于 β^2 ，再乘一个对数（式 (4.4)） $\Rightarrow$ Bethe 公式与最小电离 $\approx 2 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$ $\Rightarrow$ 加上辐射损失得 $a + bE \Rightarrow E_{\min}(X) = (a/b)(e^{bX} - 1)$ （式 (4.8)）。
- 初级谱 $E^{-2.7} + \pi$ 的衰变/碰撞竞争（ $E_\pi^* \approx 113 \text{ GeV}$ ，式 (7.4)） $\Rightarrow \mu$ 子谱与角分布 $\Rightarrow$ 积分谱斜率 η 。
- $\Phi(X) = I(> E_{\min}(X)) \Rightarrow$ 灵敏度 $\eta' = \eta g(bX) \approx 2$ （式 (8.2)） $\Rightarrow$ 空腔超额 $\varepsilon \approx \eta' \ell/L$ （式 (8.4)）与密度精度 $1/(\eta' \sqrt{N})$ （式 (8.3)）。
- 泊松方差 = 均值（式 (5.1)） $\Rightarrow n_\sigma = \varepsilon \sqrt{\mu_0}$ （式 (8.5)） $\Rightarrow$ 曝光时间（式 (8.6)）；系统误差给出天花板 $\varepsilon/\sigma_{\text{sys}}$ （式 (8.7)）。
- 卢瑟福小角散射 + 随机行走 $\Rightarrow \langle \psi^2 \rangle \propto Z(Z+1)\rho x/(A\beta^2 p^2)$ （式 (6.2)） $\Rightarrow$ 与韧致辐射同源，用 X_0 表示 $\Rightarrow$ Highland 公式（式 (6.5)） $\Rightarrow$ 动量弥散使峰度增大（式 (9.1)） $\Rightarrow$ 所需 μ 子数（式 (9.3)）。

贯穿全讲的两个“对数”值得记住：能量损失与多次散射都来自对碰撞参数的 $\int db/b$ ；透射成像的灵敏度来自积分谱的对数斜率。决定一次 μ 子成像成败的，往往不是物理原理，而是“每个像素能攒到多少个 μ 子”和“对无目标模型的把握有多好”。

参考文献

- [1] Seth H. Neddermeyer and Carl D. Anderson. Note on the nature of cosmic-ray particles. *Physical Review*, 51:884–886, 1937. doi: 10.1103/PhysRev.51.884.
- [2] J. C. Street and E. C. Stevenson. New evidence for the existence of a particle of mass intermediate between the proton and electron. *Physical Review*, 52:1003–1004, 1937. doi: 10.1103/PhysRev.52.1003.
- [3] Particle Data Group, S. Navas, et al. Review of particle physics. *Physical Review D*, 110:030001, 2024. doi: 10.1103/PhysRevD.110.030001. 其中第 34 章 Passage of Particles Through Matter (式 34.5、34.16、34.25) ; 材料参数见 <https://pdg.lbl.gov/2024/AtomicNuclearProperties/>.
- [4] Bruno Rossi and David B. Hall. Variation of the rate of decay of mesotrons with momentum. *Physical Review*, 59:223–228, 1941. doi: 10.1103/PhysRev.59.223.
- [5] Wikipedia contributors. Experimental testing of time dilation. Wikipedia, 2026. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Experimental_testing_of_time_dilation. Rossi–Hall 与 Frisch–Smith 实验的数值转述 (访问于 2026-10-17) .
- [6] David H. Frisch and James H. Smith. Measurement of the relativistic time dilation using μ -mesons. *American Journal of Physics*, 31:342–355, 1963. doi: 10.1119/1.1969508.
- [7] Wikipedia contributors. Muon tomography. Wikipedia, 2026. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Muon_tomography. E. P. George 1955 年隧道上覆岩层测量 (Commonwealth Engineer) 的转述 (访问于 2026-10-17) .
- [8] Luis W. Alvarez, Jared A. Anderson, F. El Bedwei, et al. Search for hidden chambers in the pyramids. *Science*, 167:832–839, 1970. doi: 10.1126/science.167.3919.832.
- [9] Kunihiro Morishima, Mitsuaki Kuno, Akira Nishio, et al. Discovery of a big void in Khufu’s pyramid by observation of cosmic-ray muons. *Nature*, 552:386–390, 2017. doi: 10.1038/nature24647. URL <https://arxiv.org/abs/1711.01576>.
- [10] Hiroyuki K. M. Tanaka, Toshiyuki Nakano, Satoru Takahashi, Junichi Yoshida, et al. High resolution imaging in the inhomogeneous crust with cosmic-ray muon radiography: The density structure below the volcanic crater floor of Mt. Asama, Japan. *Earth and Planetary Science Letters*, 263:104–113, 2007. doi: 10.1016/j.epsl.2007.09.001.
- [11] Hiroyuki K. M. Tanaka, Taro Kusagaya, and Hiroshi Shinohara. Radiographic visualization of magma dynamics in an erupting volcano. *Nature Communications*, 5:3381, 2014. doi: 10.1038/ncomms4381.
- [12] Sébastien Procureur, Kunihiro Morishima, Mitsuaki Kuno, et al. Precise characterization of a corridor-shaped structure in Khufu’s pyramid by observation of cosmic-ray muons. *Nature Communications*, 14:1144, 2023. doi: 10.1038/s41467-023-36351-0.

- [13] Konstantin N. Borozdin, Gary E. Hogan, Christopher Morris, William C. Friedhowsky, Alexander Saunders, Larry J. Schultz, and Margaret E. Teasdale. Radiographic imaging with cosmic-ray muons. *Nature*, 422:277, 2003. doi: 10.1038/422277a.
- [14] Konstantin Borozdin, Steven Greene, Zarija Lukić, et al. Cosmic ray radiography of the damaged cores of the Fukushima reactors. *Physical Review Letters*, 109:152501, 2012. doi: 10.1103/PhysRevLett.109.152501.
- [15] Hirofumi Fujii, Kazuhiko Hara, Kohei Hayashi, et al. Investigation of the unit-1 nuclear reactor of Fukushima Daiichi by cosmic muon radiography. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020:043C02, 2020. doi: 10.1093/ptep/ptaa027.
- [16] T. K. Gaisser, T. Stanev, and S. Tilav. Cosmic rays, in: Particle Data Group, review of particle physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020:083C01, 2020. doi: 10.1093/ptep/ptaa104. URL <https://pdg.lbl.gov/2020/reviews/rpp2020-rev-cosmic-rays.pdf>. 第 30.3 节 “地面宇宙线” 与式 (30.4)、(30.5)、表 30.2.
- [17] J. Bailey, K. Borer, F. Combley, et al. Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit. *Nature*, 268:301–305, 1977. doi: 10.1038/268301a0.
- [18] Donald E. Groom, Nikolai V. Mokhov, and Sergei I. Striganov. Muon stopping power and range tables 10 MeV–100 TeV. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 78:183–356, 2001. doi: 10.1006/adnd.2001.0861. 数值表取自 [https://pdg.lbl.gov/2024/AtomicNuclearProperties/](https://pdg.lbl.gov/2024/AtomicNuclearProperties/muE_*.txt) 的 muE_*.txt.
- [19] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 3rd edition, 1999. 第 13 章: 碰撞中的能量损失与多次散射.
- [20] Bruno Rossi and Kenneth Greisen. Cosmic-ray theory. *Reviews of Modern Physics*, 13:240–309, 1941. doi: 10.1103/RevModPhys.13.240.
- [21] Virgil L. Highland. Some practical remarks on multiple scattering. *Nuclear Instruments and Methods*, 129:497–499, 1975. doi: 10.1016/0029-554X(75)90743-0.
- [22] Gerald R. Lynch and Orin I. Dahl. Approximations to multiple Coulomb scattering. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B*, 58:6–10, 1991. doi: 10.1016/0168-583X(91)95671-Y.
- [23] David Reyna. A simple parameterization of the cosmic-ray muon momentum spectra at the surface as a function of zenith angle. arXiv:hep-ph/0604145, 2006. URL <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0604145>.
- [24] N. Lesparre, D. Gibert, J. Marteau, et al. Geophysical muon imaging: feasibility and limits. *Geophysical Journal International*, 183:1348–1361, 2010. doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04790.x.

A 能量损失公式中的对数

为什么 $b_{\min}$ 由量子力学决定 经典截断由 $\Delta E(b_{\min}) = W_{\max}$ 给出：令式 (4.3) 等于 $2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$ ，得 $b_{\min}^{\text{cl}} = z r_e / (\beta^2 \gamma)$ 。但电子是量子粒子：在重粒子参考系中电子以速度 v 、动量约 $\gamma m_e v$ 迎面而来，由不确定关系，碰撞参数不可能被确定到优于 $\hbar / \Delta p_{\max}$ ，其中 $\Delta p_{\max} = 2\gamma m_e v$ 是正碰时的最大动量转移，即量子截断 $b_{\min}^{\text{q}} \approx \hbar / (2\gamma m_e v)$ 。两者之比

$$\frac{b_{\min}^{\text{q}}}{b_{\min}^{\text{cl}}} = \frac{\hbar / (2\gamma m_e v)}{z r_e / (\beta^2 \gamma)} = \frac{\hbar c \beta}{2z r_e m_e c^2} = \frac{\beta}{2z\alpha},$$

用到 $r_e m_e c^2 = \alpha \hbar c$ 。对 μ 子 ($z = 1$, $\beta \approx 1$) 比值约 69，所以真正的截断是较大的量子值。只有对慢速重离子 ($z\alpha/\beta \gtrsim 1$) 玻尔的经典截断才适用。

$b_{\max}$ 有多大 以标准岩石 $\bar{I} = \hbar \bar{\omega} = 136 \text{ eV}$ 为例， $\bar{\omega} = 2.07 \times 10^{17} \text{ s}^{-1}$ ； $\beta\gamma = 3.5$ 时

$$\begin{aligned} b_{\max} &= \gamma v / \bar{\omega} \\ &= 3.5 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} / (2.07 \times 10^{17} \text{ s}^{-1}) \\ &\approx 5 \text{ nm}, \end{aligned}$$

远大于原子间距（约 0.2 nm）。在这么大的范围内，粒子的电场会使沿途的大量原子极化，这些极化电荷屏蔽了远处的场，所以 γ 很大时 $b_{\max}$ 不能无限增长——这就是密度效应修正 δ 的物理来源，它在固体、液体中比在气体中重要（图 3 中水、岩石的曲线在高能处比“不含密度效应”的点线平坦）。

与 Bethe 公式对照

$$\begin{aligned} \ln(b_{\max}/b_{\min}^{\text{q}}) &= \ln[(\gamma v / \bar{\omega})(2\gamma m_e v / \hbar)] \\ &= \ln(2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 / \bar{I}). \end{aligned}$$

式 (4.5) 方括号中 $\frac{1}{2} \ln(2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 W_{\max} / \bar{I}^2)$ 在 $W_{\max} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$ 时正好等于这个对数。 $-\beta^2$ 一项来自相对论运动学对大能量转移截面的修正；它们都只改变几个百分点。

B 多次散射：从卢瑟福截面到 $E_s = 21 \text{ MeV}$

第一步：对数 第 6.2 节得到 ($z = 1$ ，包括电子贡献)

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \psi_{\text{sp}}^2 \rangle}{dx} &= 8\pi n_A Z(Z+1) r_e^2 \left(\frac{m_e c^2}{\beta p c} \right)^2 \Lambda_s, \\ \Lambda_s &= \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}. \end{aligned}$$

$b_{\max}$ ：大于原子尺度时，核电荷被电子云屏蔽，取 Thomas-Fermi 屏蔽半径 $a_{\text{TF}} = 0.885 a_0 Z^{-1/3}$ ($a_0 = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ 为玻尔半径)。 $b_{\min}$ ：小于原子核半径 $R_N \approx 1.2 A^{1/3} \text{ fm}$ 时， μ 子穿进核内，所受力不再是点电荷的库仑力；对 GeV 量级的 μ 子，其约化德布罗意波长 $\hbar/p \approx 0.07 \text{ fm}$ 远小于 R_N ，量子截断不起作用。

第二步：与辐射长度比较 由式 (6.3), $1/X_0 = 4\alpha r_e^2 n_A Z(Z+1)\Lambda_r$, $\Lambda_r = \ln(184Z^{-1/3})$ (这里 X_0 以长度计, n_A 为原子数密度)。相除:

$$\frac{\langle \psi_{\text{sp}}^2 \rangle}{x/X_0} = \frac{8\pi}{4\alpha} \left(\frac{m_e c^2}{\beta p c} \right)^2 \frac{\Lambda_s}{\Lambda_r} = \frac{2\pi}{\alpha} \left(\frac{m_e c^2}{\beta p c} \right)^2 \frac{\Lambda_s}{\Lambda_r}.$$

材料常数 $n_A Z(Z+1)$ 完全消去, 只剩两个对数之比。

第三步：对数之比约为 2 数值 (verify_numbers.py):

材料	a_{TF}/R_N	Λ_s	Λ_r	Λ_s/Λ_r
岩石 ($Z = 11, A = 22$)	6260	8.74	4.42	1.98
铁	3440	8.14	4.13	1.97
铅	1520	7.32	3.75	1.95
铀	1390	7.24	3.71	1.95

比值几乎与材料无关, 约为 2。代入得 $\langle \psi_{\text{sp}}^2 \rangle \approx (4\pi/\alpha)(m_e c^2/\beta p c)^2 x/X_0$, 即式 (6.4),

$$\begin{aligned} E_s &= m_e c^2 \sqrt{4\pi/\alpha} \\ &= 0.511 \times 41.5 \text{ MeV} \\ &= 21.2 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

这个“2”是一个数值事实, 而不是结构上的必然: 散射对数的下截断是核半径, 韧致辐射对数 $\ln(184Z^{-1/3})$ 的下截断则是电子的约化康普顿波长 $\hbar/(m_e c) = 386 \text{ fm}$; 两个对数之比在 $Z = 11$ – 92 内恰好都落在 1.95–1.98 之间, Rossi 与 Greisen 正是利用了这一点。

第四步：为什么 Highland 系数是 13.6 而不是 15.0 投影角的“全体均方根”包含了少数大角单次散射 (卢瑟福截面 $\propto 1/\psi^4$ 的长尾)。用高斯拟合分布的中央 98%, 得到的宽度比全体均方根小; Highland 与 Lynch–Dahl 对精确 Molière 分布拟合, 得到系数 13.6 MeV 和随 x/X_0 缓慢增长的对数修正 [21, 22]。

C 统计工具的推导

泊松分布 沿用第 5.1 节的记号, N 是 n_s 个独立伯努利变量之和, 服从二项分布 $\text{Pr}(N) = \binom{n_s}{N} q^N (1-q)^{n_s-N}$ 。令 $n_s \rightarrow \infty$ 、 $n_s q = \mu$ 固定、 N 固定: $\binom{n_s}{N} q^N = \frac{n_s(n_s-1)\cdots(n_s-N+1)}{N!} \frac{\mu^N}{n_s^N} \rightarrow \frac{\mu^N}{N!}$, $(1-q)^{n_s-N} = (1-\mu/n_s)^{n_s-N} \rightarrow e^{-\mu}$ 。所以 $\text{Pr}(N) = \mu^N e^{-\mu}/N!$ 。直接验证: $\sum_N N \text{Pr}(N) = \mu$, $\sum_N N(N-1) \text{Pr}(N) = \mu^2$, 故 $\text{Var } N = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$ 。

高斯分布的四阶矩 对 $f(\psi) = e^{-\psi^2/2\sigma^2}/(\sqrt{2\pi}\sigma)$, 分部积分 $\int \psi^4 f d\psi = 3\sigma^2 \int \psi^2 f d\psi = 3\sigma^4$, 所以 $\kappa = 3$ 。

混合分布的峰度 若 ψ 在给定 σ 时为高斯分布, 而 σ 本身随机, 则 $\langle \psi^2 \rangle = \langle \sigma^2 \rangle$, $\langle \psi^4 \rangle = 3\langle \sigma^4 \rangle$, $\kappa = 3\langle \sigma^4 \rangle / \langle \sigma^2 \rangle^2$ 。由 $\text{Var}(\sigma^2) = \langle \sigma^4 \rangle - \langle \sigma^2 \rangle^2 \geq 0$ 得 $\kappa \geq 3$, 等号仅在 σ 不随机时成立。 μ 子散射中 $\sigma \propto 1/(\beta p)$, 所以 $\kappa = 3\langle (\beta p)^{-4} \rangle / \langle (\beta p)^{-2} \rangle^2$ 。

加权最小二乘 数据 (x_i, y_i) , y_i 的标准差为 σ_i , 模型 $y = A + Bx$ 。在高斯误差下, 使 $\chi^2 = \sum w_i(y_i - A - Bx_i)^2$ ($w_i = 1/\sigma_i^2$) 最小的 A 、 B 是最可能的参数。令 $\partial\chi^2/\partial A = \partial\chi^2/\partial B = 0$:

$$A[1] + B[x] = [y], \quad A[x] + B[x^2] = [xy],$$

其中 $[f] = \sum w_i f_i$ 。解得

$$\begin{aligned} B &= \frac{[1][xy] - [x][y]}{\Delta}, \\ A &= \frac{[x^2][y] - [x][xy]}{\Delta}, \\ \Delta &= [1][x^2] - [x]^2. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

B 是 y_i 的线性组合 $B = \sum c_i y_i$, $c_i = w_i([1]x_i - [x])/\Delta$; 各 y_i 独立,

$$\begin{aligned} \sigma_B^2 &= \sum c_i^2 \sigma_i^2 = \sum w_i ([1]x_i - [x])^2 / \Delta^2 \\ &= [1]([1][x^2] - [x]^2) / \Delta^2 = [1] / \Delta. \end{aligned}$$

同理 $\sigma_A^2 = [x^2] / \Delta$ 。若模型正确且误差估计正确, $\chi_{\min}^2$ 的期望值等于自由度 ν (数据点数减参数个数)。

D 几何：立体角与接收度

用投影倾角表示立体角 设方向单位矢量 $\hat{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, 定义 $t_x = \tan \theta_x = n_x/n_z$, $t_y = \tan \theta_y = n_y/n_z$ 。射线与平面 $z = 1$ 交于点 $(t_x, t_y, 1)$, 距原点 $r = \sqrt{1 + t_x^2 + t_y^2}$ 。平面上的面元 $dt_x dt_y$ 对原点所张立体角等于面元在垂直于视线方向上的投影 $dt_x dt_y \cos \chi$ 除以 r^2 , 其中 χ 是平面法线 (z 轴) 与视线的夹角, $\cos \chi = 1/r$ 。所以

$$d\Omega = \frac{dt_x dt_y}{(1 + t_x^2 + t_y^2)^{3/2}}. \quad (\text{D.1})$$

检验：对整个平面积分,

$$\begin{aligned} &\iint (1 + t_x^2 + t_y^2)^{-3/2} dt_x dt_y \\ &= 2\pi \int_0^\infty s(1 + s^2)^{-3/2} ds = 2\pi, \end{aligned}$$

正好是上半球的立体角。

两个角积分 $\int_0^{2\pi} |\cos \varphi| d\varphi = 4 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = 4$; $\int_0^{2\pi} |\sin \varphi \cos \varphi| d\varphi = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\varphi d\varphi = 2$ 。展开

$$\begin{aligned} &(d - Dt |\cos \varphi|)(d - Dt |\sin \varphi|) \\ &= d^2 - dDt(|\cos \varphi| + |\sin \varphi|) \\ &\quad + D^2 t^2 |\sin \varphi \cos \varphi|, \end{aligned}$$

逐项积分得 $2\pi d^2 - 8dDt + 2D^2 t^2$ 。检验： $D \rightarrow 0$ 时回到 $2\pi d^2$ (两平面重合, 接收度就是平面面积乘立体角)。

E 名词解释

表 5 本讲术语 (中英对照)

术语	英文	一句话定义
μ 子	muon	带电轻子, 质量 $105.7 \text{ MeV}/c^2$, 平均寿命 $2.197 \mu\text{s}$
初级/次级宇宙线	primary/secondary cosmic rays	来自太空的粒子/它们在大气中产生的粒子
空气簇射	air shower	一个高能初级粒子在大气中引发的粒子级联
固有时	proper time	随粒子运动的钟所走过的时间
衰变长度	decay length	$\beta\gamma c\tau$, 粒子衰变前的平均飞行距离
不透明度	opacity	沿路径的面密度 $\int \rho dl$
米水当量	meter water equivalent	不透明度单位, $1 \text{ m.w.e.} = 100 \text{ g}/\text{cm}^2$
阻止本领	stopping power	单位路程 (或面密度) 的平均能量损失
最小电离粒子	minimum ionizing particle	能损处于 Bethe 曲线极小值附近的粒子
平均激发能	mean excitation energy	Bethe 公式中刻画原子电子束缚的能量 $\bar{I}$
密度效应	density effect	介质极化屏蔽高速粒子电场、抑制能损增长
临界能量 (μ 子)	muon critical energy	电离与辐射损失相等的能量 a/b
连续减速近似	CSDA	把能损看作沿路径连续、确定的过程
辐射长度	radiation length	高能电子因韧致辐射能量降为 $1/e$ 的面密度
多次库仑散射	multiple Coulomb scattering	大量小角库仑散射累积的随机偏折
强度	intensity	单位时间、单位垂直面积、单位立体角的粒子数
接收度	acceptance	探测器对某方向范围的“有效面积 $\times$ 立体角”
显著性	significance	观测偏离无信号预言的标准差个数
最近点法	point of closest approach (PoCA)	用入射、出射径迹的最近点估计散射位置
μ 子成像	muography	用宇宙线 μ 子的透射或散射为物体内部成像