

激光谐振腔与高斯光束——从 ABCD 矩阵到 LIGO 臂腔

第 43 届决赛短训讲义组

2026 年 10 月

目录

1 导读	2
2 名词与符号	4
3 前置模块 I: 傍轴光线与 ABCD 矩阵	5
4 前置模块 II: 法布里-珀罗腔的多光束干涉	8
5 前置模块 III: 从亥姆霍兹方程到傍轴波动方程	11
6 谐振腔的几何稳定性	13
7 高斯光束	17
8 谐振腔的本征模	23
9 应用: LIGO 的法布里-珀罗臂腔	31
10 决赛风格例题	36
11 实验与数据处理: 刀口法测光束参数与 M^2	42
12 小结: 推导链	46
A 两镜腔模的代数细节	48
B 复参数的高斯积分与非涅耳积分	49
C 厄米-高斯模	49
D 两束高斯光束的匹配效率	50

E 热透镜模型中的函数 E_{in}	51
F 加权线性最小二乘与协方差	51
G 二阶矩宽度严格按二次函数传播	51

1 导读

一台实验室里的氦氖激光器，两块镜子相距几十厘米，出射光束直径约 1 mm；LIGO 引力波探测器的一条“臂”，两块 40 kg 的熔石英镜子相距约 4 km，镜面上的光斑半径约 6 cm，腔内来回奔跑的激光功率按设计可达 750 kW。两者尺度相差上万倍，背后却是同一套物理：光在两块弯曲镜子之间来回反射，什么样的镜子能把光“关住”？被关住的光在横截面上是什么形状、沿传播方向怎样变粗变细？它们只能在哪些频率上共振？

本讲用三件普通物理里能找到原型的工具回答这些问题：几何光学的“光线”（升级为 2×2 的光线转移矩阵）、波动光学的多光束干涉（法布里-珀罗腔），以及描述光束衍射的波动方程（化为傍轴波动方程）。它们在“高斯光束”这个对象上汇合：一个复数参数 q 同时记录光束的粗细与波前的弯曲，并且像光线一样按 ABCD 矩阵变换。最后我们把这些结论用到 LIGO 臂腔，逐项核对它的设计参数。

背景：激光与光学谐振腔的诞生

1958 年，Schawlow 与 Townes 建议用两块平行反射镜构成的法布里-珀罗干涉仪作为红外与光学“激射器”的谐振腔 [1, 2]。1960 年，休斯研究实验室的 Maiman 用光泵浦两端面抛光镀银的红宝石（掺铬刚玉）晶体，得到 694.3 nm 的受激辐射（1960 年 7 月 7 日发布，8 月 6 日刊于《自然》）[2–4]；1961 年 Javan 等报道了氦氖气体放电中的连续激光振荡 [5]。紧接着的问题是：有限大小的镜子之间，光会不会因衍射很快漏光？1961 年，贝尔实验室的 Fox 与厉鼎毅在 IBM 704 上让均匀平面波在两块宽 $2a = 50\lambda$ 、相距 $b = 100\lambda$ 的条形平面镜之间反复衍射：约 300 次渡越后场的相对分布不再变化，每次只损失 0.688% 的功率，相位比几何光程超前 1.59° [2]——这种自我复制的分布就是谐振腔的模。随后，Boyd 与 Kogelnik 把谐振腔等效为周期透镜序列，给出稳定区边界 [6]；Kogelnik 证明高斯光束复参数满足“ABCD 定律” [7]；Kogelnik 与厉鼎毅 1966 年的综述把这些结果整理成至今通用的形式 [8]。第 8.1 节会重做 Fox-Li 的数值实验。

背景：LIGO 的法布里-珀罗臂腔

2015 年 9 月 14 日，Advanced LIGO 的两台探测器同时记录到双黑洞并合的引力波 GW150914 [9]。每台探测器是一台迈克耳孙干涉仪，两条 4 km 臂各是一个法布里-珀罗腔：输入镜 (ITM) 透射率 1.4%，端镜 (ETM) 约 5 ppm，精细度 450；两镜曲率半径 1934 m 与 2245 m，镜面光斑半径 5.3 cm 与 6.2 cm， $g_1 g_2 = 0.83$ ，“接近稳定极限”；输入 125 W，经“功率循环”（入口处再加一块部分透射镜，把返回入口的光再送回干涉仪）后分束器处约 5.2 kW，每条臂腔内约 750 kW（设计值）[10]。设计文献指出：大光斑降低镀膜热噪声，代价是靠近稳定边缘；选近同心而非近平面设计是为了高功率下辐射压力矩的稳定性 [10, 11]；镀膜

吸收在输入镜中形成的“热透镜”需要主动补偿 [10, 12]。第三期观测 (2019–2020) 的平均臂腔功率约为 201 kW (汉福德) 与 239 kW (利文斯顿) [13]。这些数字在第 9 节和例题 4 中会由本讲的公式重新算出。

学习目标 学完本讲，你应当能够：

1. 推导自由传播、薄透镜、球面反射镜、球面折射界面的光线转移矩阵，正确地按顺序相乘，并说明行列式为 1 的物理含义；
2. 由多光束求和得到法布里–珀罗腔的透射谱 (Airy 函数)、自由光谱区、精细度、线宽与腔内功率增益；
3. 由往返矩阵的递推 (或本征值) 推出谐振腔的稳定条件 $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$ ，并会用稳定性图判断各种腔；
4. 从亥姆霍兹方程出发，在写清小参量的前提下得到傍轴波动方程，代入验证高斯光束解，说出 w_0 、 z_R 、 $R(z)$ 、Gouy 相位的含义；
5. 用 q 参数与 ABCD 定律处理透镜聚焦、腔模自洽、模式匹配；推出谐振频率公式并解释共焦腔的频率简并；
6. 用以上结论估算 LIGO 臂腔的光斑、功率增益、失准灵敏度与热透镜；处理刀口法测量光束参数的实验数据。

前置知识：本讲需要的普通物理与数学

- 几何光学：反射定律、折射定律、薄透镜成像公式、焦点与焦距；
- 波动光学：光程与相位差、双光束干涉、衍射的惠更斯–菲涅耳原理 (定性即可)；
- 电磁学：真空中的电磁波方程 (会在第 5 节复述)；
- 数学：泰勒展开、复数的指数形式 $e^{i\varphi}$ 、等比级数求和、偏导数、高斯积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ 。

本讲新引入的工具—— 2×2 矩阵的乘法、行列式与本征值，复振幅，亥姆霍兹方程与傍轴近似，菲涅耳衍射积分，平面波展开 (角谱)，积分方程的本征解 (Fox–Li 迭代)，厄米多项式及其正交性，光束的二阶矩宽度，导热的能量守恒形式与函数 Ein，误差函数，加权最小二乘、协方差与误差传递 (雅可比矩阵)，蒙特卡洛重抽样——都在首次使用前给出定义与推导。

建议学时 课堂 2 学时 (约 90 分钟) 只讲主线 (第 3–9 节中的定义、要点与关键推导)：ABCD 矩阵与法布里–珀罗腔 20 分钟；稳定性 15 分钟；傍轴方程与高斯光束 20 分钟；腔模、频率与模式匹配 20 分钟；LIGO 臂腔 15 分钟。推导细节框、例题、实验题与附录供课后阅读与练习。

推导路线 三条线索——光线矩阵与稳定性、多光束干涉、傍轴波动方程与高斯光束——在腔模与谐振频率处汇合，再用于 LIGO 臂腔；完整的依赖链见第 12 节。

2 名词与符号

表 1 本讲符号表（同一字母的不同用法已在“含义”中注明出现的节）

符号	含义	单位
y, θ	光线到光轴的距离、光线与光轴的夹角（傍轴： $\theta = dy/dz$ ）	m, rad
$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$	光线转移矩阵（ABCD 矩阵）	1, m, m ⁻¹ , 1
$\mathbf{T}_d, \mathbf{F}_f$	自由传播 d 的矩阵、焦距 f 的薄透镜矩阵	—
R, R_1, R_2	球面曲率半径；腔镜曲率半径（凹面为正）； $R(z)$ 为波前曲率半径	m
n	折射率（第 3、9.4 节）；横模指数（第 8.5 节起）	1
L	腔长（两镜间距）	m
g_1, g_2	腔的 g 参数， $g_i = 1 - L/R_i$	1
h, Φ	往返矩阵的半迹 $h = (A + D)/2$ ；稳定腔中光线每次往返的相位 $\cos \Phi = h$	1, rad
r_i, t_i	第 i 块镜子的振幅反射率、振幅透射率	1
T_i, ℓ_i	功率透射率 t_i^2 、功率损耗（吸收与散射）， $r_i^2 + T_i + \ell_i = 1$	1
δ	光在腔内往返一次的相位 $2kL$ （第 4 节）	rad
$\nu_{\text{FSR}}, \delta\nu, \mathcal{F}$	自由光谱区 $c/2L$ 、共振线的半高全宽、精细度	Hz, Hz, 1
G	共振时腔内功率增益 P_c/P_{in}	1
λ, k, ν	波长、波数 $2\pi/\lambda$ 、频率	m, m ⁻¹ , Hz
U, u	复振幅 $U(x, y, z)$ ；慢变包络 u ， $U = u e^{ikz}$	—
$w(z), w_0$	高斯光束半径（光强降为中心 $1/e^2$ 处）、束腰半径	m
z_R	瑞利长度 $\pi w_0^2/\lambda$	m
$\psi(z)$	Gouy 相位 $\arctan(z/z_R)$	rad
q	高斯光束复参数， $1/q = 1/R + i\lambda/(\pi w^2)$	m
θ_0	远场发散半角 $\lambda/(\pi w_0)$	rad
N	菲涅耳数 $a^2/(L\lambda)$ （ a 为镜面半宽或半径；Fox-Li 一节镜距记为 b ）	1
$m, n; j$	横模指数（ x, y 方向的零点个数）；纵模序数	1
H_m	厄米多项式	1
η	模式匹配效率（功率耦合比例）	1
M^2	光束质量因子	1
ϑ_1, ϑ_2	腔镜的倾斜角（第 9 节、例题 4）	rad
$\mathbf{S}, \mathbf{K}$	失准矩阵（倾角 $\rightarrow$ 光斑位移）、光学角刚度矩阵	m/rad, N·m/rad
k_{th}	热导率（第 9.4 节）	W/(m·K)
κ	横向波数（第 7.3 节）	m ⁻¹
κ_m	悬挂提供的机械角刚度（例题 4）	N·m/rad
dn/dT	折射率温度系数	K ⁻¹
f_{th}	热透镜焦距	m

符号说明：例题、实验题与附录中临时引入的字母（如例 1 的 p_1, p_2 ，例 3 的腔长偏离 s 与 ΔR ，实验题的斜率 k_1 、系数 α_i 、比值 γ 与相对误差 ε_r ）只在该处使用，届时另行定义，与表中同字母的量无关。几个容易混淆的名词：谐振腔指两块或多块反射镜围成、使光沿同一路径反复往返的结构，本讲只讨论两块球面镜（平面镜看作 $R \rightarrow \infty$ ）的“两镜腔”；模是往返一次后横向形状完全复原、整体只乘一个复数因子的场分布，横向形状不同的叫不同横模（TEM _{mn} ，第 8.5 节），横向形状相同、沿轴驻波节点数不同的叫不同纵模；稳定腔指近轴光线经任意多次往返仍留在轴附近的腔（第 6 节），说的是几何光线而非输出功率；高斯光束指横截面光强按 e^{-2r^2/w^2} 分布的光束，是傍轴波动方程最简单的解，也是稳定腔的基模 TEM₀₀。

3 前置模块 I: 傍轴光线与 ABCD 矩阵

3.1 光线的描述与傍轴近似

取光轴为 z 轴, 光大体沿 $+z$ 方向传播。我们只考虑在含光轴的一个平面 (y - z 平面) 内的光线; 对旋转对称的系统, 这已足够。

定义: 光线的状态

在某个横截面 z 上, 一条光线由两个数确定: 它到光轴的距离 y (在轴上方为正), 以及它与光轴的夹角 θ (光线向上斜时为正)。把这两个数排成一列, 记作 $\begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix}$ 。

假设: 傍轴近似

所有光线都离轴很近、与轴夹角很小: $|\theta| \ll 1$, 且 $|y|$ 远小于各个曲面的曲率半径。于是 $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ 。小参量是 θ (以及 y/R); 我们保留到一阶, 丢掉的相对误差是 $\theta^2/6$ 量级 (来自 $\sin \theta = \theta - \theta^3/6 + \dots$)。例如 $\theta = 0.05$ 时误差约 4×10^{-4} 。在这一近似下, 光线经过任何元件后的 (y, θ) 都是入射 (y, θ) 的线性函数——这就是矩阵方法成立的原因。

前置知识: 2×2 矩阵: 本讲用到的全部内容

把两个数 y, θ 线性地变成另两个数:

$$y_2 = Ay_1 + B\theta_1, \quad \theta_2 = Cy_1 + D\theta_1,$$

记作 $\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$ 。规则就是“行乘列”: 第一行 (A, B) 与列 (y_1, θ_1) 对应相乘再相加得到 y_2 。

- 乘法: 先用 $\mathbf{M}_1$ 、再用 $\mathbf{M}_2$ 作用, 等于用 $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1$ 作用。把第一步结果代入第二步即可算出 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix}$ 。一般 $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1 \neq \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$, 所以顺序不能颠倒。
- 行列式 $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = AD - BC$, 迹 $\text{tr} = A + D$ 。直接展开可验证 $\det(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1) = \det \mathbf{M}_2 \cdot \det \mathbf{M}_1$ 。
- 单位矩阵 $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 作用后不变。
- 本征值: 若存在非零列 $\mathbf{v}$ 使 $\mathbf{M}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, 称 λ 为本征值。由 $(A - \lambda)(D - \lambda) - BC = 0$ 得特征方程 $\lambda^2 - (A + D)\lambda + (AD - BC) = 0$ 。

3.2 四种基本元件的矩阵

图 1 画出了四种元件与符号约定。下面逐个推导。

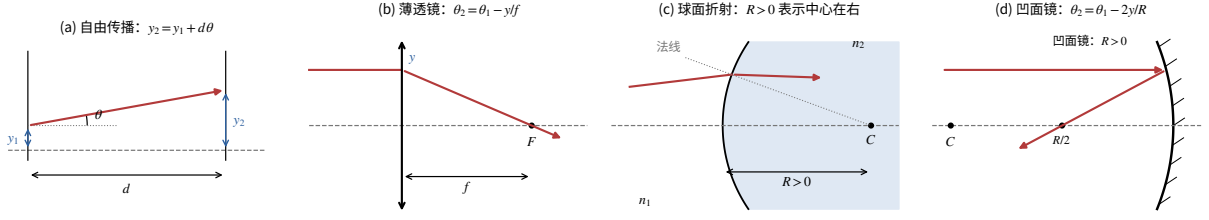


图 1 四种基本元件与符号约定。(a) 在均匀介质中自由传播距离 d ; (b) 焦距为 f 的薄透镜 (会聚透镜 $f > 0$); (c) 折射率 $n_1 \rightarrow n_2$ 的球面界面, 曲率中心 C 在界面右侧 (光的前进方向) 时 $R > 0$, 图中折射光线由傍轴公式画出; (d) 凹面反射镜, 曲率半径记为 $R > 0$, 平行光反射后会聚于 $R/2$ 处。

推导：自由传播

在均匀介质中光线走直线, 方向不变: $\theta_2 = \theta_1$ 。传播距离 d 后高度增加 $d \tan \theta_1 \approx d \theta_1$ 。于是

$$\mathbf{T}_d = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

推导：薄透镜

“薄”指透镜厚度可忽略, 光线在透镜处高度不变: $y_2 = y_1$ 。光线的偏折量只能线性地依赖于 y_1 和 θ_1 。由两条熟知的事实确定系数: (i) 过光心的光线 ($y_1 = 0$) 方向不变, 所以 $\theta_2 = \theta_1 + (\text{只含 } y_1 \text{ 的项})$; (ii) 平行于轴的光线 ($\theta_1 = 0$) 出射后经过焦点, 即在 f 处到达轴: $0 = y_1 + f \theta_2$, 故 $\theta_2 = -y_1/f$ 。合起来 $\theta_2 = \theta_1 - y_1/f$:

$$\mathbf{F}_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

推导：球面折射界面

界面顶点在 $z = 0$, 曲率中心在 $z = R$ ($R > 0$ 表示中心在右)。高度 y 处界面的法线指向曲率中心, 它与 z 轴的夹角 (按光线角度的正负约定) 为 $-y/R$ (中心在下方, 法线向下斜)。入射光线与法线的夹角是两者方向角之差:

$$i_1 = \theta_1 - \left(-\frac{y}{R}\right) = \theta_1 + \frac{y}{R}, \quad i_2 = \theta_2 + \frac{y}{R}.$$

傍轴的折射定律 $n_1 i_1 = n_2 i_2$ 给出 $\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 + \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} y$; 界面处高度不变。所以

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{N} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (3.3)$$

平面界面是 $R \rightarrow \infty$: $\theta_2 = (n_1/n_2) \theta_1$, 正是小角度的斯涅耳定律。

检验：由两个界面拼出薄透镜

玻璃 (折射率 n) 双凸透镜: 第一面 $1 \rightarrow n$, 中心在右, 半径 R_1 ; 第二面 $n \rightarrow 1$, 中心在左, 按约定半径记为 $-R_2$ ($R_2 > 0$); 两面间距 t 。乘积 $\mathbf{N}_2 \mathbf{T}_t \mathbf{N}_1$ 在 $t \rightarrow 0$ 时的左下元素为 $-(n-1)(1/R_1 + 1/R_2)$, 与式 (3.2) 比较即得透镜制造者公式 $1/f = (n-1)(1/R_1 + 1/R_2)$ 。另

外 $\det(\mathbf{N}_2 \mathbf{T}_t \mathbf{N}_1) = \frac{n}{1} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} = 1$: 光从空气出发、回到空气, 行列式为 1 (下一小节解释其含义)。sympy 核对见 `scripts/verify_sympy.py`。

推导: 球面反射镜

反射把光的前进方向反转。为了沿用“光沿 $+z$ 前进”的记账方式, 我们把反射后的光路展开: 想象把镜子后面的空间翻折过来, 反射光继续沿 $+z$ 走 (就像透过镜子看过去)。镜面上反射前后高度不变, $y_2 = y_1$ 。对凹面镜 (曲率中心在入射一侧, 约定 $R > 0$), 高度 y 处法线与轴夹角为 y/R ; 反射定律使光线相对法线的角度反号, 展开后的出射角为 $\theta_2 = \theta_1 - 2y/R$ (检验: 平行光 $\theta_1 = 0$ 反射后 $\theta_2 = -2y/R$, 会聚到 $R/2$ 处, 即凹面镜焦距 $R/2$)。所以反射镜等价于焦距 $f = R/2$ 的薄透镜:

$$\mathbf{F}_{R/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

其中凹面 $R > 0$, 凸面 $R < 0$, 平面 $R \rightarrow \infty$ 。注意这里反射镜的曲率半径约定 (凹面为正) 与式 (3.3) 中折射界面的约定 (中心在右为正) 不同, 这是谐振腔文献的习惯, 本讲始终如此。

3.3 级联: 矩阵相乘的顺序

光依次经过元件 1、2、 $\dots$ 、 N , 每个元件把前一个的出射当作自己的入射, 所以

$$\begin{pmatrix} y_{\text{out}} \\ \theta_{\text{out}} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_N \cdots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} y_{\text{in}} \\ \theta_{\text{in}} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

先经过的元件写在最右边。这与书写顺序相反, 是初学者最常犯的错误。

例题: 两个矩阵元的物理意义

物距 d_1 、薄透镜 f 、像距 d_2 的系统:

$$\mathbf{T}_{d_2} \mathbf{F}_f \mathbf{T}_{d_1} = \begin{pmatrix} 1 - d_2/f & d_1 + d_2 - d_1 d_2/f \\ -1/f & 1 - d_1/f \end{pmatrix}.$$

(i) 成像要求物点发出的所有光线 (各种 θ_{in}) 汇聚到同一个像点, 即 y_{out} 与 θ_{in} 无关: $B = 0$, 也就是 $1/d_1 + 1/d_2 = 1/f$ ——成像公式。此时 $A = 1 - d_2/f = -d_2/d_1$ 是横向放大率。(ii) 一般系统的 $C = -1/f_{\text{eff}}$ 给出等效焦距: 平行光 ($\theta_{\text{in}} = 0$) 出射角 $\theta_{\text{out}} = C y_{\text{in}}$ 。

3.4 行列式为 1 的意义

由式 (3.1)–(3.4), 自由传播、薄透镜、反射镜的行列式都是 1, 折射界面是 n_1/n_2 。由乘积规则 $\det(\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1) = \det \mathbf{M}_2 \det \mathbf{M}_1$, 任何光学系统的

$$\det \mathbf{M} = AD - BC = \frac{n_{\text{in}}}{n_{\text{out}}}, \quad (3.6)$$

中间经过的界面都相互抵消, 只剩首末两端的折射率之比。入射与出射在同一种介质中时, $\det \mathbf{M} = 1$ 。本讲的谐振腔都在空气或真空中, 往返矩阵的行列式恒为 1, 这一点在第 6 节求稳定条件时是关键。

要点: 行列式 = 相空间面积之比

在 (y, θ) 平面上, 一束光线占据一块区域。线性变换把以 $(\delta y, 0)$ 、 $(0, \delta \theta)$ 为边的小矩形变成以 $(A\delta y, C\delta y)$ 、 $(B\delta \theta, D\delta \theta)$ 为边的平行四边形, 面积为 $|AD - BC| \delta y \delta \theta$ 。所以 $\det \mathbf{M} = 1$ 意味着: 在同一介质中, 光束在“位置-角度”平面上占据的面积不变。把光束压细 (y 范围变小) 必然使发散角变大, 反之亦然——没有任何透镜组能同时把光束变细又变准直。若改用“约化角” $n\theta$ 作为第二个变量, 则对所有元件 $\det = 1$, 面积守恒对跨介质的系统也成立; 这就是几何光学中“光学扩展量” (étendue) 守恒与亮度不能被无源光学系统提高的根源。第 7.3 节会看到, 高斯光束的“束腰 $\times$ 发散角 $= \lambda/\pi$ ”是这个面积在波动光学中的最小值。

4 前置模块 II: 法布里-珀罗腔的多光束干涉

这一节暂时忽略光束的横向结构, 把腔内的光当作沿轴往返的平面波, 只关心“相位”与“振幅”的记账。

4.1 复振幅

定义: 复振幅与本讲的相位约定

频率为 ν (角频率 $\omega = 2\pi\nu$) 的单色光, 电场的某一分量写成

$$E(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [U(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}], \quad (4.1)$$

复数 $U(\mathbf{r})$ 叫复振幅: 它的模 $|U|$ 是振幅, 辐角是该点的相位。沿 $+z$ 传播的平面波 $U = U_0 e^{ikz}$, $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$: 沿传播方向每走 Δz , 复振幅乘以 $e^{ik\Delta z}$ 。光强 (单位面积功率) 正比于时间平均的 E^2 , 即 $I \propto |U|^2$ 。

本讲统一采用 $e^{-i\omega t}$ 约定 (与赵凯华《光学》等普通物理教材一致)。激光工程文献 (如 Kogelnik-Li 综述与 Siegman 的教科书) 多用 $e^{+i\omega t}$, 那时所有空间相位因子取复共轭 ($e^{ikz} \rightarrow e^{-ikz}$), 后文的 q 参数也随之共轭; 可观测量 (光斑、曲率半径、频率) 不受影响。

叠加原理: 几列同频率的光在同一点叠加, 复振幅直接相加。干涉现象就是复数相加时辐角起的作用。

4.2 多光束求和: 透射与腔内场

假设: 理想法布里-珀罗腔

两块平行镜相距 L , 中间是真空; 入射光是沿轴的平面波。镜 i ($i = 1$ 为输入镜) 对腔内一侧入射的光, 振幅反射率为 r_i 、振幅透射率为 t_i , 均取正实数; 镜面反射与透射的固定相位已并入 L 的定义 (只改变共振频率的整体位置)。功率守恒写成 $r_i^2 + t_i^2 + \ell_i = 1$, ℓ_i 是吸收与散射损耗。从腔外照射镜 1 时的反射率取 $-r_1$ (无损镜的斯托克斯关系, 见第 4.4 节的检验)。

推导: 逐次往返求和

设入射光在镜 1 外表面的复振幅为 E_{in} 。透进腔内后紧靠镜 1 的向右波为 $t_1 E_{\text{in}}$ 。它走到镜 2 乘 e^{ikL} , 在镜 2 透出 t_2 : 第一束透射光 $t_1 t_2 e^{ikL} E_{\text{in}}$ 。在镜 2 反射 (r_2)、走回镜 1 (e^{ikL})、在镜 1 反射 (r_1), 再走到镜 2——比第一束多了因子 $r_1 r_2 e^{2ikL}$ 。依此类推, 第 p 束 ($p = 0, 1, 2, \dots$) 多出 $(r_1 r_2 e^{i\delta})^p$, 其中

$$\delta \equiv 2kL = \frac{4\pi\nu L}{c}$$

是往返一次的相位。所有透射光束复振幅相加是等比级数 (公比的模 $r_1 r_2 < 1$, 级数收敛):

$$\begin{aligned} E_t &= t_1 t_2 e^{ikL} E_{\text{in}} \sum_{p=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{i\delta})^p \\ &= \frac{t_1 t_2 e^{i\delta/2}}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}} E_{\text{in}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

同理, 紧靠镜 1 的腔内向右总场为

$$E_c = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}} E_{\text{in}}. \quad (4.3)$$

推导: 功率透射率: Airy 函数

取模平方。分母 $|1 - re^{i\delta}|^2 = (1 - re^{i\delta})(1 - re^{-i\delta}) = 1 + r^2 - 2r \cos \delta$, 其中 $r \equiv r_1 r_2$ 。再用 $\cos \delta = 1 - 2\sin^2(\delta/2)$ 改写为 $(1 - r)^2 + 4r \sin^2(\delta/2)$ 。于是

$$\begin{aligned} T_{\text{FP}} &\equiv \frac{|E_t|^2}{|E_{\text{in}}|^2} = \frac{T_1 T_2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2(\delta/2)} \\ &= \frac{T_{\text{max}}}{1 + \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中 $T_{\text{max}} = T_1 T_2 / (1 - r_1 r_2)^2$, 并定义了精细度

$$\mathcal{F} \equiv \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2}. \quad (4.5)$$

(检验: $(2\mathcal{F}/\pi)^2 = 4r/(1 - r)^2$, 正是把分母除以 $(1 - r)^2$ 后 $\sin^2$ 前的系数。) 式 (4.4) 叫 Airy 函数。对称无损腔 ($r_1 = r_2$, $\ell_i = 0$) 有 $T_{\text{max}} = 1$: 共振时全部透过。

4.3 自由光谱区、线宽与精细度**推导: 共振、自由光谱区与线宽**

(i) 共振: $\sin(\delta/2) = 0$, 即 $\delta = 2\pi j$ (j 为整数), 也就是 $2L = j\lambda$: 往返光程是波长的整数倍, 各次往返的光同相叠加。共振频率 $\nu_j = jc/(2L)$ 。

(ii) 自由光谱区: 相邻共振的频率间隔

$$\nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{2L}. \quad (4.6)$$

(iii) 线宽: 在 $\delta = 2\pi j$ 附近令 $\delta = 2\pi j + \epsilon$, 透射降到一半要求 $(2\mathcal{F}/\pi)^2 \sin^2(\epsilon/2) = 1$ 。当 $\mathcal{F} \gg 1$ 时 ϵ 很小, $\sin(\epsilon/2) \approx \epsilon/2$, 得 $\epsilon_{1/2} = \pm\pi/\mathcal{F}$ 。全宽 $2\pi/\mathcal{F}$ 对应的频率宽度 (δ 每变 2π

频率变 ν_{FSR}) 为

$$\delta\nu = \frac{\nu_{\text{FSR}}}{\mathcal{F}}. \quad (4.7)$$

精细度的直观意义: 自由光谱区是线宽的多少倍。保留的近似是 $\sin(\epsilon/2) \approx \epsilon/2$, 相对误差 $\epsilon^2/24 \sim (\pi/\mathcal{F})^2/24$; $\mathcal{F} = 60$ 时约 10^{-4} (图 2(a) 的脚本中把式 (4.7) 与 $4\arcsin[\pi/(2\mathcal{F})]$ 的精确值作了比较)。

(iv) 低损耗时的近似: 设每块镜的总“漏光” $T_i + \ell_i \ll 1$, 则 $r_i = \sqrt{1 - T_i - \ell_i} \approx 1 - (T_i + \ell_i)/2$, $r_1 r_2 \approx 1 - \Lambda/2$, $\Lambda \equiv T_1 + T_2 + \ell_1 + \ell_2$ 是往返一次的总功率损耗。代入式 (4.5):

$$\mathcal{F} \approx \frac{2\pi}{\Lambda}. \quad (4.8)$$

推导: 储能时间与线宽的关系

关掉入射光后, 腔内功率每往返一次乘以 $(r_1 r_2)^2$, 往返时间 $2L/c$ 。p 次往返后功率为 $(r_1 r_2)^{2p} = e^{2p \ln(r_1 r_2)}$; 令 $t = 2pL/c$, 写成 $e^{-t/\tau}$, 得储能时间 $\tau = \frac{2L/c}{-2 \ln(r_1 r_2)} \approx \frac{2L}{c\Lambda}$ (用 $-\ln(1-x) \approx x$)。与式 (4.7)、(4.8) 比较:

$$\delta\nu = \frac{c}{2L} \cdot \frac{\Lambda}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau}. \quad (4.9)$$

线宽与储能时间互为倒数 (差 2π), 这是“共振越尖锐、储能越久”的定量形式。LIGO 文献中常说的“腔极点频率”就是半高半宽 $\delta\nu/2$: 信号频率高于它时, 光在腔内来不及积累。

4.4 腔内功率增益与阻抗匹配

由式 (4.3), 共振时 ($e^{i\delta} = 1$) 腔内功率与入射功率之比为

$$G = \frac{T_1}{(1 - r_1 r_2)^2} \approx \frac{4T_1}{(T_1 + \ell)^2}, \quad (4.10)$$

其中 $\ell \equiv T_2 + \ell_1 + \ell_2$, 近似式用了 $r_1 r_2 \approx 1 - (T_1 + \ell)/2$ 。把 ℓ (除输入镜透射以外的全部往返损耗) 看作给定, G 作为 T_1 的函数在 $T_1 = \ell$ 时最大 (对 T_1 求导即得), 最大值 $G_{\text{max}} = 1/\ell$ 。

推导: 共振时的反射: 阻抗匹配

从腔外看, 反射场由两部分组成: 镜 1 外表面的直接反射 $-r_1 E_{\text{in}}$, 加上腔内场每次到达镜 1 时漏出的部分。腔内场在镜 1 处向左的波为 $r_2 e^{i\delta} E_c$, 透出乘 t_1 :

$$\frac{E_r}{E_{\text{in}}} = -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}} \xrightarrow{\ell_1=0, t_1^2=1-r_1^2} \frac{r_2 e^{i\delta} - r_1}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}}.$$

(i) 共振时 $E_r/E_{\text{in}} = (r_2 - r_1)/(1 - r_1 r_2)$: 当 $r_1 = r_2$ (输入镜透射等于其余全部损耗, $T_1 = \ell$) 时反射为零, 入射光全部进入腔内并被消耗——称为阻抗匹配 (临界耦合)。 $T_1 > \ell$ 叫“过耦合”, $T_1 < \ell$ 叫“欠耦合”。(ii) 若 $r_2 = 1$ 且无损耗, 上式的模恒为 1: 光最终全部反射, 只是相位随 δ 变化。这说明选 $-r_1$ 作为外侧反射率是与能量守恒自洽的。

交互演示: 法布里-珀罗腔: 调节两镜反射率与损耗, 观察 Airy 透射谱、反射谱、精细度与腔内增益的变化, 读数可与本节的精细度公式和增益公式对照。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 laser-fp)。

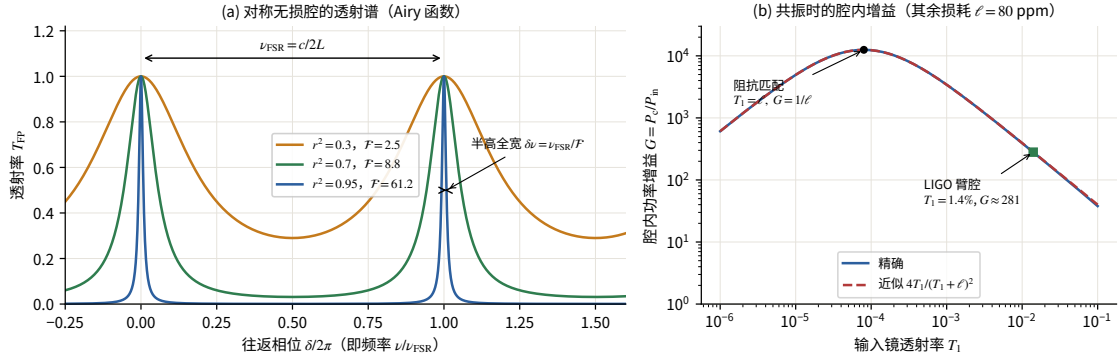


图 2 (a) 对称无损腔 ($r_1 = r_2 = r$) 的透射谱: r^2 越接近 1, 共振峰越尖, 脚本中用 4000 项部分和与闭式 (4.4) 逐点核对 (差别 $< 10^{-6}$); (b) 共振时的腔内功率增益随输入镜透射率 T_1 的变化, 其余损耗固定为 $\ell = 80$ ppm. $T_1 = \ell$ 时增益最大; LIGO 臂腔取 $T_1 = 1.4\% \gg \ell$, 处于强过耦合, $G \approx 280$ 。

5 前置模块 III: 从亥姆霍兹方程到傍轴波动方程

5.1 亥姆霍兹方程

假设: 标量近似

真空中电场的每个直角分量都满足波动方程 $\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$ 。对一束沿 z 传播、偏振方向处处几乎相同的窄光束, 可以只跟踪一个分量 (例如 E_x), 把它当作标量场。被忽略的是光束边缘少量的纵向场分量 E_z , 其相对大小约为光束发散角 θ_0 (第 7.3 节), 对激光束通常为 10^{-3} 量级。

把式 (4.1) 代入波动方程: $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 作用在 $e^{-i\omega t}$ 上给出 $-\omega^2$, 于是复振幅满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0, \quad k = \omega/c. \quad (5.1)$$

平面波 e^{ikz} 与球面波 $e^{ik\rho}/\rho$ (ρ 为到点源的距离) 都是它的解 (后者可在球坐标中直接验证)。

5.2 球面波的傍轴形式

推导: 菲涅耳近似

点源在原点, 观察点 (x, y, z) , 距离 $\rho = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} = z\sqrt{1 + (x^2 + y^2)/z^2}$ 。在傍轴区 $x^2 + y^2 \ll z^2$, 对根号作泰勒展开:

$$\rho = z + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{8z^3} + \dots$$

代入相位 $k\rho$ 时, 第三项必须远小于 1 弧度才能丢掉: $k(x^2 + y^2)^2/(8z^3) \ll 1$ 。振幅 $1/\rho$ 只需取 $1/z$ (相对误差 $(x^2 + y^2)/(2z^2)$)。于是

$$\frac{e^{ik\rho}}{\rho} \approx \frac{1}{z} e^{ikz} \exp\left[ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right]. \quad (5.2)$$

相位中的 $k(x^2 + y^2)/(2z)$ 描述了半径为 z 的球面波前在轴附近的抛物面形状。

注意保留相位二次项、丢掉四次项的条件与“振幅近似”的条件不同：相位乘了很大的 k ，所以要求更严。Fox-Li 的例子（第 8.1 节）中这个条件只是勉强满足，傍轴积分与精确积分的损耗相差约 2%。

5.3 慢变包络近似与傍轴波动方程

激光束几乎是沿 z 传播的平面波，只是横截面有限、并且横向分布随 z 缓慢变化。把这一图像写成

$$U(x, y, z) = u(x, y, z) e^{ikz}, \quad (5.3)$$

e^{ikz} 携带快速振荡的相位， u 叫包络。

推导：代入亥姆霍兹方程

记横向拉普拉斯算符 $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 。对 z 求两次导数：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} - k^2 u \right) e^{ikz}.$$

代入式 (5.1)， $-k^2 u$ 与 $+k^2 u$ 抵消，约去 e^{ikz} ：

$$\nabla_{\perp}^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (5.4)$$

到这里仍是精确的。

假设：慢变包络近似

设光束横向尺度为 w ，包络沿 z 显著变化所需的距离为 ℓ_z 。三项的量级分别为 $\nabla_{\perp}^2 u \sim u/w^2$ ， $k \partial_z u \sim ku/\ell_z$ ， $\partial_z^2 u \sim u/\ell_z^2$ 。前两项必须同阶（否则方程只剩一项， u 平凡），由此 $\ell_z \sim kw^2$ 。于是

$$\frac{|\partial_z^2 u|}{|k \partial_z u|} \sim \frac{1}{k \ell_z} \sim \frac{1}{(kw)^2} \sim \theta_0^2,$$

其中 $\theta_0 \sim 1/(kw) = \lambda/(2\pi w)$ 正是衍射发散角的量级。小参量就是光束发散角的平方： $w = 1 \text{ mm}$ 、 $\lambda = 1 \mu\text{m}$ 时 $\theta_0^2 \sim 10^{-8}$ – 10^{-7} （取 $1/(kw)$ 或 $\lambda/(\pi w)$ 作口径）。丢掉 $\partial_z^2 u$ 的相对误差是 $\mathcal{O}(\theta_0^2)$ ，与第 3.1 节光线光学的傍轴近似一样，都是相对 $\mathcal{O}(\theta^2)$ 的误差。

丢掉式 (5.4) 的最后一项，得到傍轴波动方程：

$$\nabla_{\perp}^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (5.5)$$

注：与薛定谔方程的类比

把 z 换成时间 t ，式 (5.5) 与二维自由粒子的薛定谔方程 $i\hbar \partial_t \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\perp}^2 \Psi$ 形式相同：光束“随 z 演化”就像波包随时间扩散。高斯光束的展宽与高斯波包的展宽是同一道数学题。这只是形式上的类比，本讲不依赖量子力学。

检验：傍轴球面波满足傍轴方程

由式 (5.2)，傍轴球面波的包络为 $u = \frac{1}{z} \exp[ik(x^2 + y^2)/(2z)]$ 。逐项计算： $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ikx}{z}u$ ， $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\frac{ik}{z} - \frac{k^2 x^2}{z^2})u$ ； y 同理。 $\frac{\partial u}{\partial z} = (-\frac{1}{z} - \frac{ik(x^2 + y^2)}{2z^2})u$ 。相加： $\nabla_{\perp}^2 u + 2ik \partial_z u = [\frac{2ik}{z} - \frac{k^2(x^2 + y^2)}{z^2} - \frac{2ik}{z} + \frac{k^2(x^2 + y^2)}{z^2}]u = 0$ 。

5.4 菲涅耳衍射积分

傍轴方程是线性的，所以已知 $z = 0$ 平面上的包络 $u_0(x', y')$ 后，可以把这个平面上的每一点当作一个次波源（惠更斯原理），把它们发出的傍轴球面波叠加起来：

$$u(x, y, z) = \frac{k}{2\pi iz} \iint u_0(x', y') \times \exp\left[ik \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z}\right] \times dx' dy'. \quad (5.6)$$

被积函数中的指数就是从 $(x', y', 0)$ 到 (x, y, z) 的傍轴球面波（式 (5.2)，平移了原点），上面已验证它满足式 (5.5)，所以叠加后的 u 也满足。前面的常数 $k/(2\pi iz)$ 由一个要求确定：均匀平面波 ($u_0 = 1$) 传播后应保持为 1。由附录 B 的菲涅耳积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax^2} dx = \sqrt{\pi i/a}$ ($a > 0$) 可验证这一点。式 (5.6) 叫菲涅耳衍射积分，它把傍轴方程的求解化为一次积分，是第 8.1 节 Fox-Li 数值实验的工具。对于只在 x 方向有限、 y 方向无限长的“条形”问题，对 y' 的积分可以先做掉，得到一维形式：前因子变为 $\sqrt{k/(2\pi iz)}$ ，只保留 x 的指数。

6 谐振腔的几何稳定性**6.1 展开的腔：周期性透镜序列**

两镜腔：镜 1（曲率半径 R_1 ）与镜 2（ R_2 ）相距 L ，凹面朝向腔内为正。按第 3.2 节，把每次反射展开成一个焦距 $R_i/2$ 的透镜，光在腔内的无数次往返就变成了沿一条直线穿过一串透镜：间距 L ，焦距交替为 $R_2/2$ 、 $R_1/2$ 、 $R_2/2$ 、……这串透镜每两片重复一次，一个“周期”对应光在腔内往返一次。

定义： g 参数

$$g_1 \equiv 1 - \frac{L}{R_1}, \quad g_2 \equiv 1 - \frac{L}{R_2}. \quad (6.1)$$

平面镜 $R \rightarrow \infty$ ， $g = 1$ ；镜的曲率中心恰好落在另一块镜上（ $R = L$ ）， $g = 0$ ；曲率中心在两镜中点（ $R = L/2$ ）， $g = -1$ 。

6.2 往返矩阵

以“刚在镜 1 上反射之后、向镜 2 出发”的位置为参考面。光依次经过：自由传播 L 、镜 2 反射、自由传播 L 、镜 1 反射。按式 (3.5)，先经过的写在右边：

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}_{R_1/2} \mathbf{T}_L \mathbf{F}_{R_2/2} \mathbf{T}_L. \quad (6.2)$$

推导：逐步相乘

用 $-2/R_i = -2(1 - g_i)/L$ 改写反射镜矩阵。第一步，前两个因子（最右边）：

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{R_2/2}\mathbf{T}_L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2(1-g_2)}{L} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & L \\ -\frac{2(1-g_2)}{L} & 2g_2 - 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

（右下元素： $-\frac{2(1-g_2)}{L} \cdot L + 1 = 2g_2 - 1$ 。）这是“从镜 1 走到镜 2 并反射”的半程矩阵。第二步，再乘 $\mathbf{T}_L$ ：

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_L(\mathbf{F}_{R_2/2}\mathbf{T}_L) &= \begin{pmatrix} 1 - 2(1 - g_2) & L + L(2g_2 - 1) \\ -\frac{2(1-g_2)}{L} & 2g_2 - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2g_2 - 1 & 2g_2L \\ -\frac{2(1-g_2)}{L} & 2g_2 - 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

第三步，左乘镜 1 的矩阵：第一行不变；第二行 $= -\frac{2(1-g_1)}{L} \times$ 第一行 $+ 第二行$ 。整理得

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2g_2 - 1 & 2g_2L \\ \frac{2(2g_1g_2 - g_1 - g_2)}{L} & 4g_1g_2 - 2g_2 - 1 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

例如右下元素： $-\frac{2(1-g_1)}{L} \cdot 2g_2L + (2g_2 - 1) = -4g_2 + 4g_1g_2 + 2g_2 - 1 = 4g_1g_2 - 2g_2 - 1$ 。sympy 核对见 `verify_sympy.py`。

两个最重要的组合：

$$\det \mathbf{M} = 1, \quad h \equiv \frac{A + D}{2} = 2g_1g_2 - 1. \quad (6.4)$$

行列式为 1 不必再算：四个因子的行列式都是 1（第 3.4 节）。半迹 h 只依赖于乘积 g_1g_2 ——这一点并非偶然：若把参考面换到镜 2，往返矩阵变为 $\mathbf{F}_{R_2/2}\mathbf{T}_L\mathbf{F}_{R_1/2}\mathbf{T}_L$ ，它与 $\mathbf{M}$ 只差“从哪里开始数”，两者的迹相同（一般地 $\text{tr}(\mathbf{XY}) = \text{tr}(\mathbf{YX})$ ，可直接展开验证）。

6.3 多次往返：递推、本征值与稳定条件

光线往返 p 次后的状态为 $\mathbf{v}_p = \mathbf{M}^p\mathbf{v}_0$ 。我们要问： $p \rightarrow \infty$ 时 y_p 是否有界？

推导：第一步： 2×2 矩阵满足自己的特征方程

对任意 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ，直接计算 $\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} A^2 + BC & B(A + D) \\ C(A + D) & D^2 + BC \end{pmatrix}$ 。左上元素可写成 $A^2 + BC = (A + D)A - (AD - BC)$ ，其余元素同理。所以

$$\mathbf{M}^2 = (A + D)\mathbf{M} - (\det \mathbf{M})\mathbf{I} = 2h\mathbf{M} - \mathbf{I}. \quad (6.5)$$

（这对 2×2 矩阵恒成立，称为凯莱-哈密顿定理。）

推导：第二步：光线高度的二阶递推

把式 (6.5) 两边右乘 $\mathbf{M}^{p-1}\mathbf{v}_0$: $\mathbf{v}_{p+1} = 2h\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_{p-1}$ 。取第一个分量:

$$y_{p+1} - 2hy_p + y_{p-1} = 0. \quad (6.6)$$

这是一个常系数线性递推, 与“离散化的简谐振子”同型。试探 $y_p = \lambda^p$, 得特征方程

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2h\lambda + 1 &= 0 \\ \implies \lambda_{\pm} &= h \pm \sqrt{h^2 - 1}, \quad \lambda_+ \lambda_- = 1. \end{aligned} \quad (6.7)$$

它与第 3.1 节矩阵本征值的特征方程 $\lambda^2 - (A + D)\lambda + \det \mathbf{M} = 0$ 完全相同: $\lambda_{\pm}$ 就是 $\mathbf{M}$ 的本征值。一般解 $y_p = c_+ \lambda_+^p + c_- \lambda_-^p$ ($c_{\pm}$ 由 y_0, y_1 决定)。

推导：第三步：分三种情形

(i) $|h| < 1$: 令 $h = \cos \Phi$ ($0 < \Phi < \pi$), 则 $\sqrt{h^2 - 1} = i \sin \Phi$, $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\Phi}$, 模为 1。实数解为

$$y_p = Y \cos(p\Phi + \varphi_0),$$

有界。光线在轴附近来回“振荡”, 每往返一次相位前进 Φ 。

(ii) $|h| > 1$: 两根都是实数且 $\lambda_+ \lambda_- = 1$, 其中必有一个绝对值大于 1。除非初值恰好使该分量的系数为零 (只有初始角度与高度成某个特定比例的光线才满足, 稍有偏离就不成立), $|y_p|$ 按 $|\lambda|^p$ 指数增长, 光线很快从镜边溢出。

(iii) $|h| = 1$: 重根 $\lambda = \pm 1$, 一般解为 $(c_1 + c_2 p)(\pm 1)^p$, y_p 一般随 p 线性增长 ($\mathbf{M} = \pm \mathbf{I}$ 时除外, 见下)。这是稳定区的边界, 称为临界稳定。

把 $h = 2g_1 g_2 - 1$ 代入 $-1 \leq h \leq 1$:

$$\boxed{0 \leq g_1 g_2 \leq 1} \quad (\text{等号对应临界稳定}) \quad (6.8)$$

这就是两镜腔的稳定条件 [6, 8]。

检验：与透镜序列的稳定条件对照

对称腔 $R_1 = R_2 = R$ 展开后是焦距都为 $f = R/2$ 、间距 L 的透镜序列。Boyd 与 Kogelnik 引用的周期聚焦结果是“ $0 \leq L/f \leq 4$ 时稳定” [6]。代入 $L/f = 2L/R = 2(1-g)$: $0 \leq 2(1-g) \leq 4$, 即 $-1 \leq g \leq 1$, 正是式 (6.8) 在 $g_1 = g_2 = g$ 时的形式 $g^2 \leq 1$ 。物理图像: 透镜太弱 ($L/f \rightarrow 0$) 不足以把发散的光线拉回; 透镜太强 ($L/f > 4$) 会把光线“过度纠正”, 越摆越大。

注：与周期结构的“通带”判据同构

式 (6.6)–(6.7) 的数学与周期结构中波的传输完全相同: 一维周期介质 (如第 42 届决赛的弦线“声子晶体”) 用一个周期的传输矩阵 $\mathbf{M}$ ($\det \mathbf{M} = 1$) 判断“通带” (波能无衰减地传过周期结构的频率范围): $|\text{tr} \mathbf{M}/2| \leq 1$ 时波可以传播, 每个周期相位前进 Φ (称为布洛赫相位, $\cos \Phi = \text{tr} \mathbf{M}/2$), 否则衰减。这里“光线在腔内有界”对应“通带”。本讲只把它作为同一数学工具的回顾, 例题与练习不涉及能带问题。

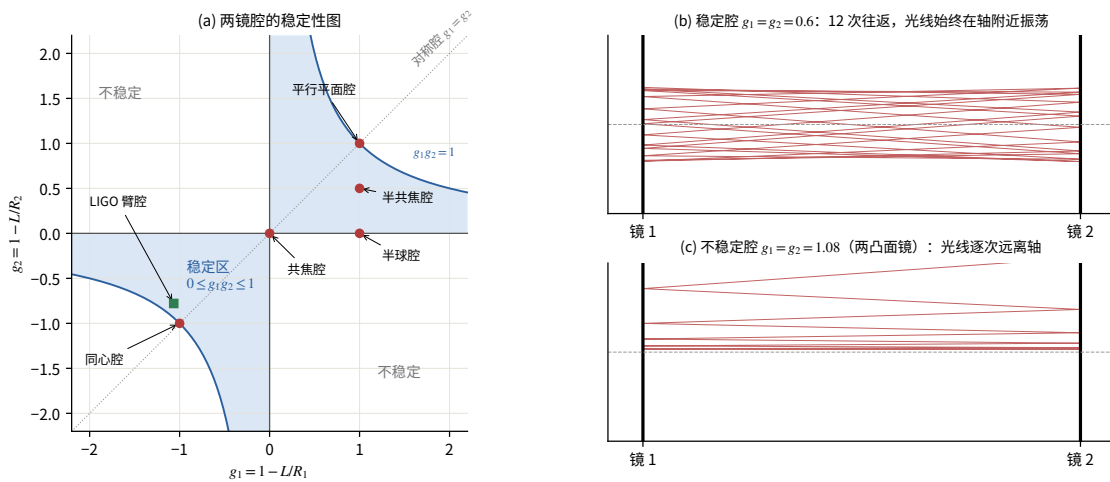


图 3 (a) 稳定性图：浅蓝色为稳定区 $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$ ，边界为两坐标轴与双曲线 $g_1 g_2 = 1$ 。除半共焦腔外，图中几种典型腔都位于边界上（临界稳定）；LIGO 臂腔 $(g_1, g_2) = (-1.065, -0.779)$ 在第三象限靠近双曲线处。(b)(c) 用往返矩阵迭代计算的光线轨迹（画在实际的腔内，光线在两镜间来回）：稳定腔中光线高度有界，不稳定腔中光线每次往返被放大。

6.4 稳定性图与几种典型腔

以 g_1 、 g_2 为坐标轴，稳定区是第一、三象限中夹在坐标轴与双曲线 $g_1 g_2 = 1$ 之间的部分（图 3(a)）。几种典型腔：

表 2 典型两镜腔在稳定性图上的位置

名称	镜面	(g_1, g_2)	特点
平行平面腔	$R_1 = R_2 = \infty$	$(1, 1)$	临界稳定；对倾斜极敏感
共焦腔	$R_1 = R_2 = L$	$(0, 0)$	临界 ($\mathbf{M} = -\mathbf{I}$)，模存在；怕 $R_1 \neq R_2$
同心腔	$R_1 = R_2 = L/2$	$(-1, -1)$	临界稳定；两曲率中心重合于腔中心
半球腔	$R_1 = \infty, R_2 = L$	$(1, 0)$	临界稳定
半共焦腔	$R_1 = \infty, R_2 = 2L$	$(1, 1/2)$	稳定区内部

三个对称特例都在边界上，“临界”的方式各不相同。平行平面腔： $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，与轴成 θ 角的光线每次往返横移 $2L\theta$ ，线性走出镜面，模完全由镜边衍射决定（第 8.1 节）。同心腔： $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -3 & -2L \\ 8/L & 5 \end{pmatrix}$ ， $h = 1$ 但 $\mathbf{M} \neq \mathbf{I}$ ，光线一般也线性发散。共焦腔： $\mathbf{M} = -\mathbf{I}$ ，任何傍轴光线往返一次变成 $(-y, -\theta)$ 、两次复原（第 8.6 节会看到它对应频率简并）；光线并不走失，模存在且衍射损耗很低（第 8.3 节）。共焦腔的“临界”在于它位于两条坐标轴的交点：若两镜曲率稍有不等， L 介于 R_1 、 R_2 之间时 (g_1, g_2) 落入第二、四象限而不稳定（例题 3）。实际激光器通常工作在稳定区内部，离边界有一定余量。

交互演示：稳定性图与腔内光线：拖动 g_1 、 g_2 、 L 滑块（或直接在 g_1 - g_2 平面上点击、选择预设的典型腔），观察一条近轴光线在腔内多次往返的轨迹；读数给出 $g_1 g_2$ 、半迹 h 、每次往返的相位 Φ 与镜面光斑尺寸。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 laser-stability）。

注：不稳定腔也有用

$|h| > 1$ 的腔并非一无是处。对增益很高的激光介质（如大功率 CO_2 激光器），光只需往返几次就能放大到饱和，不稳定腔反而能让模充满大口径的增益介质，从镜边“溢出”的光就是输出光束 [14]。本讲只讨论稳定腔。

7 高斯光束

本节在傍轴方程 (5.5) 中寻找横向有限、能量集中在轴附近的解。

7.1 试探解与复参数 q

第 5.3 节验证了傍轴球面波 $u = \frac{1}{z} e^{ik(x^2+y^2)/(2z)}$ 满足式 (5.5)。它的问题是： z 为实数时， $|u|$ 在横向不衰减，不能代表一束光。一个大胆的尝试是把 z 换成一般的复函数。

推导：代入傍轴方程

设

$$u = a(z) \exp \left[ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right], \quad (7.1)$$

$a(z)$ 、 $q(z)$ 待定（复值）。记 $r^2 = x^2 + y^2$ ， $\mathcal{E} \equiv \exp[ikr^2/(2q)]$ 。依次计算：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ikx}{q} u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{ik}{q} - \frac{k^2 x^2}{q^2} \right) u,$$

y 同理，故 $\nabla_{\perp}^2 u = \left(\frac{2ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2} \right) u$ 。对 z 求导时 a 与 q 都要求导：

$$\frac{\partial u}{\partial z} = a' \mathcal{E} + a \mathcal{E} \cdot \left(-\frac{ikr^2}{2q^2} q' \right) = \left(\frac{a'}{a} - \frac{ikr^2 q'}{2q^2} \right) u.$$

代入 $\nabla_{\perp}^2 u + 2ik \partial_z u = 0$ ，按 r^2 的幂次整理：

$$\left[\frac{2ik}{q} + 2ik \frac{a'}{a} \right] + r^2 \left[-\frac{k^2}{q^2} + \frac{k^2 q'}{q^2} \right] = 0.$$

对所有 r 成立，要求两个方括号分别为零：

$$\frac{dq}{dz} = 1, \quad \frac{a'}{a} = -\frac{1}{q} \Rightarrow a \propto \frac{1}{q}. \quad (7.2)$$

于是 $q(z) = z - z'_0$ ， z'_0 是任意复常数。 z'_0 为实数时回到傍轴球面波；要得到横向有限的光束，取 z'_0 的虚部非零。把 z 的原点选在合适的位置，并按惯例记 $q = z - iz_R$ （ $z_R > 0$ 为实常数，下

面会看到符号为什么这样取):

$$q(z) = z - iz_R, \quad u = \frac{A_0}{q} \exp\left[ik \frac{r^2}{2q}\right]. \quad (7.3)$$

7.2 光斑、波前与 Gouy 相位

推导：拆开 $1/q$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{z - iz_R} = \frac{z + iz_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)},$$

最后一步是定义 $R(z)$ 与 $w(z)$:

$$R(z) \equiv \frac{z^2 + z_R^2}{z}, \quad \frac{\lambda}{\pi w^2} \equiv \frac{z_R}{z^2 + z_R^2}.$$

代入指数: $\exp[ikr^2/(2q)] = \exp[ikr^2/(2R)] \cdot \exp[-\frac{k\lambda}{2\pi} \frac{r^2}{w^2}] = \exp[ikr^2/(2R)] \exp[-r^2/w^2]$ (用了 $k\lambda = 2\pi$)。第一个因子是相位: 与式 (5.2) 对比, 它是曲率半径为 $R(z)$ 的球面波前。第二个因子是实的高斯函数: 场振幅在 $r = w$ 处降为中心的 $1/e$, 光强 $\propto e^{-2r^2/w^2}$ 在 $r = w$ 处降为 $1/e^2$ 。现在看出取 $-iz_R$ ($z_R > 0$) 的理由: 它保证 $\text{Im}(1/q) > 0$, 场在横向衰减而不是发散。

推导：前因子 $1/q$ 的模与辐角

把 $z + iz_R$ 写成极坐标。它的模为 $\sqrt{z^2 + z_R^2}$; 辐角为 $\pi/2 - \psi$, 其中

$$\psi(z) \equiv \arctan \frac{z}{z_R}$$

($z = 0$ 时 $z + iz_R$ 是纯虚数, 辐角 $\pi/2$; z 增大, 辐角减小)。于是 $\frac{1}{q} = \frac{ie^{-i\psi}}{\sqrt{z^2 + z_R^2}}$ 。而由 w^2 的定义, $\sqrt{z^2 + z_R^2} = z_R w/w_0$, 其中 $w_0 \equiv w(0)$ 。常数因子 i/z_R 并入 A_0 。

合起来, 基模高斯光束的复振幅为

$$U(r, z) = U_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}\right] \times \exp\left[i\left(kz + \frac{kr^2}{2R(z)} - \psi(z)\right)\right] \quad (7.4)$$

其中

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}, \quad (7.5)$$

$$R(z) = z[1 + (z_R/z)^2], \quad (7.6)$$

$$\psi(z) = \arctan(z/z_R), \quad (7.7)$$

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (7.8)$$

式 (7.5) 由 $w^2 = \frac{\lambda}{\pi z_R}(z^2 + z_R^2)$ 得到: 令 $z = 0$ 得 $w_0^2 = \lambda z_R/\pi$, 即式 (7.8); 再代回即得式 (7.5)。

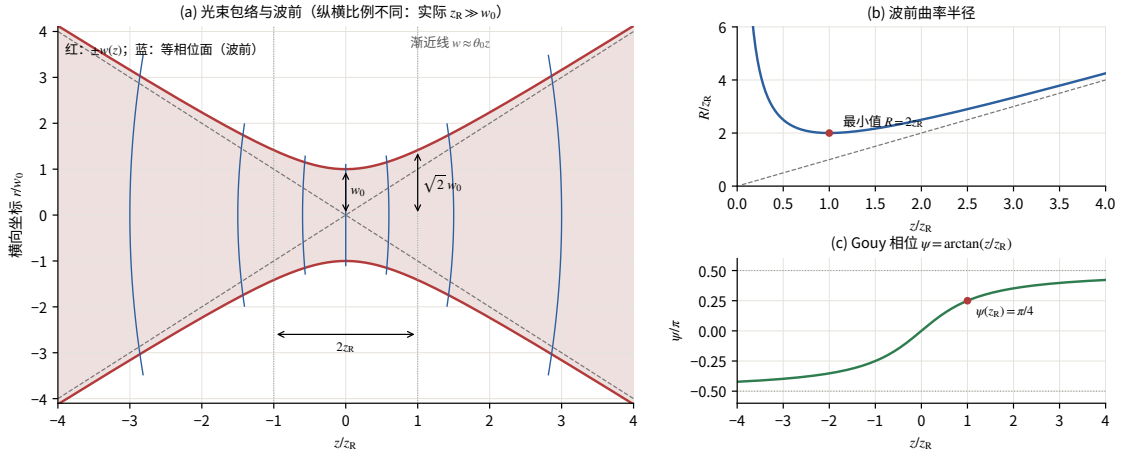


图 4 基模高斯光束。(a) 包络 $\pm w(z)$ 与几处等相位面（横向放大，故波前看起来弯曲很小）：束腰处波前为平面，远处趋于以束腰为中心的球面；(b) 波前曲率半径在 $z = z_R$ 处取最小值 $2z_R$ ，远场趋于 $R \approx z$ （虚线）；(c) Gouy 相位从 $-\pi/2$ 变到 $\pi/2$ ，在 $\pm z_R$ 之间变化最快。脚本用 $q = z - iz_R$ 直接求 $1/q$ 的实部与虚部，与式 (7.5)–(7.7) 逐点核对，并用数值极小化确认 R 的最小值位置。

要点：高斯光束的四个特征

1. 束腰： $z = 0$ 处光斑最小， $w = w_0$ ，波前是平面 ($R \rightarrow \infty$)。
2. 瑞利长度： $z = \pm z_R$ 处光斑面积增为 2 倍 ($w = \sqrt{2}w_0$)，波前最弯 ($R = 2z_R$)。 $2z_R$ 常称共焦参数，表示光束“基本保持准直”的长度。
3. 远场： $|z| \gg z_R$ 时 $w \approx \theta_0 |z|$ ， $R \approx z$ ，光束像是从束腰中心发出的球面波。
4. Gouy 相位：轴上相位比同频平面波 kz 少了 $\psi(z)$ ；从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 总共少了 π 。本讲说“相位超前”，都指积累的空间相位比 kz 少（等相位面跑得比平面波快），与 Fox-Li 原文用语一致。这是 Gouy 在 1890 年发现的“焦点相位反常” [15]。第 8.4 节会看到，它决定了腔内各横模的谐振频率。

检验：量纲、极限与功率

(i) 量纲： $z_R = \pi w_0^2 / \lambda$ 为长度。(ii) $z_R \rightarrow 0$ ($w_0 \rightarrow 0$) 时 $q \rightarrow z$ ，回到傍轴球面波，即“点光源”； $z_R \rightarrow \infty$ 时 $w \rightarrow w_0$ 不变，回到有限截面的平面波（几何光学的准直光束）。(iii) 功率： $P = \int_0^\infty I_0 \frac{w_0^2}{w^2} e^{-2r^2/w^2} 2\pi r dr = \frac{\pi w_0^2}{2} I_0$ ，与 z 无关——能量守恒，光束变粗时中心光强按 w_0^2/w^2 下降。(iv) 半径 a 的圆孔内的功率比例为 $1 - e^{-2a^2/w^2}$ ； $a = 1.5w$ 时漏掉 $e^{-4.5} \approx 1.1\%$ ， $a = 2w$ 时漏掉 3.4×10^{-4} 。

7.3 远场发散角与衍射

由式 (7.5)， $|z| \gg z_R$ 时 $w \approx w_0 |z| / z_R$ ，远场发散半角

$$\theta_0 = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0}, \quad w_0 \theta_0 = \frac{\lambda}{\pi}. \quad (7.9)$$

这是衍射的普遍规律“发散角 $\sim \lambda / \text{孔径}$ ”的精确版本：光束越细，发散越快。乘积 $w_0 \theta_0$ 是第 3.4 节所说“位置-角度面积”的度量。可以证明（用光束横向分布的二阶矩，见第 7.6 节）：在所有傍轴

光束中，基模高斯光束的这一乘积最小，任何其他光束都满足 $W_0\Theta_0 = M^2\lambda/\pi$ ， $M^2 \geq 1$ 。

前置知识：平面波展开（角谱）

一列沿方向 (k_x, k_y, k_z) 传播的平面波在 $z = 0$ 面上的复振幅为 $e^{i(k_x x + k_y y)}$ 。把 $z = 0$ 面上的任意分布写成这些“横向正弦波”的叠加：一维时 $u_0(x) = \int \tilde{u}(k_x) e^{ik_x x} dk_x$ ，系数由 $\tilde{u}(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int u_0(x) e^{-ik_x x} dx$ 给出（傅里叶变换；对后面要用的高斯函数可直接验证）。对高斯分布 $u_0 = e^{-x^2/w_0^2}$ ，把指数配方： $-\frac{x^2}{w_0^2} - ik_x x = -\frac{1}{w_0^2} \left(x + \frac{ik_x w_0^2}{2}\right)^2 - \frac{k_x^2 w_0^2}{4}$ ，再用附录 B 的复参数高斯积分，得 $\tilde{u} \propto e^{-k_x^2 w_0^2/4}$ ：高斯分布的“横向频谱”仍是高斯型，宽度 $\sim 2/w_0$ ——光斑越细，所含横向波数越宽。每个平面波分量各自满足亥姆霍兹方程，只要 $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ 。

注：Gouy 相位从哪里来

由上面的平面波展开，横向分布 e^{-r^2/w_0^2} 是横向波数 $\kappa = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ 从 0 到约 $2/w_0$ 的各个分量之和（ κ 是横向波数，与第 9.4 节的热导率无关）。一列横向波数为 κ 的平面波，纵向波数为 $k_z = \sqrt{k^2 - \kappa^2} \approx k - \kappa^2/(2k)$ ：沿 z 走得“慢”一点，相位每米少 $\kappa^2/(2k)$ 。轴上场是所有分量之和；高斯分布的各分量权重为 $e^{-\kappa^2 w_0^2/4}$ ，求和（积分）得

$$\begin{aligned} u(0, z) &\propto \int_0^\infty e^{-\kappa^2 w_0^2/4} e^{-i\kappa^2 z/(2k)} 2\pi\kappa d\kappa \\ &= \frac{4\pi/w_0^2}{1 + iz/z_R} \propto \frac{e^{-i\arctan(z/z_R)}}{\sqrt{1 + z^2/z_R^2}}, \end{aligned}$$

（积分用了 $\int_0^\infty e^{-\alpha\kappa^2} 2\kappa d\kappa = 1/\alpha$ ，对 $\text{Re}\alpha > 0$ 的复数 α 也成立，见附录 B。）相位恰为 $-\psi(z)$ 。所以 Gouy 相位就是“被横向限制的光，其平面波分量的纵向波数平均略小于 k ”的累积效果；横向限制越紧（ w 越小），这个效应越强，所以 ψ 在束腰附近变化最快。物理解释参见文献 [16]。

7.4 ABCD 定律

现在把高斯光束送过光学元件。光束由复参数 q 完全确定（ q 给出 R 与 w ；整体振幅与相位另行跟踪），所以只需知道每个元件怎样改变 q 。

推导：自由传播与薄透镜

- (i) 自由传播 d ：由式 (7.2)， $dq/dz = 1$ ，所以 $q_2 = q_1 + d$ 。
- (ii) 薄透镜 f ：理想薄透镜在高度 r 处的厚度使光程比轴上少 $r^2/(2f)$ （这正是它把平面波变成会聚到 f 处的球面波所需的光程差：比较式 (5.2)，会聚球面波的相位为 $-kr^2/(2f)$ ）。所以透镜把场乘以 $\exp[-ikr^2/(2f)]$ ，光斑来不及改变（薄）。由式 (7.1)，指数中 $\frac{ikr^2}{2} \cdot \frac{1}{q}$ 变为 $\frac{ikr^2}{2} \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}\right)$ ，即

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}.$$

拆成实部与虚部： $1/R_2 = 1/R_1 - 1/f$ （与几何光学中球面波经透镜的成像公式相同）， $w_2 = w_1$ （薄透镜不改变光斑）。

把两个结果与对应的 ABCD 矩阵并排写：

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_d &= \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : & q_2 &= \frac{1 \cdot q_1 + d}{0 \cdot q_1 + 1}; \\ \mathbf{F}_f &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} : & q_2 &= \frac{q_1}{-q_1/f + 1} = \frac{1 \cdot q_1 + 0}{-\frac{1}{f}q_1 + 1}. \end{aligned}$$

两者都具有同一形式：

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (7.10)$$

这就是 ABCD 定律 [7]。

推导：对级联系统成立

设 $q_2 = \frac{Aq_1+B}{Cq_1+D}$, $q_3 = \frac{aq_2+b}{cq_2+d}$ 。把前者代入后者，分子分母同乘 $(Cq_1 + D)$ ：

$$\begin{aligned} q_3 &= \frac{a(Aq_1 + B) + b(Cq_1 + D)}{c(Aq_1 + B) + d(Cq_1 + D)} \\ &= \frac{(aA + bC)q_1 + (aB + bD)}{(cA + dC)q_1 + (cB + dD)}, \end{aligned}$$

四个系数恰好是矩阵乘积 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的元素。所以只要每个元件满足式 (7.10)，任意级联系统都满足，系统矩阵就是各元件矩阵按顺序的乘积。反射镜等价于 $f = R/2$ 的透镜，因而由透镜、反射镜与自由空间组成的一切系统（包括谐振腔的往返）都适用 ABCD 定律。

要点：为什么光线矩阵会管到波动光学

对几何光学中从一点发出的光线束，比值 y/θ 等于到发光点的距离，也就是球面波前的曲率半径 R 。由 $y_2 = Ay_1 + B\theta_1$ 、 $\theta_2 = Cy_1 + D\theta_1$ ，比值按 $\frac{y_2}{\theta_2} = \frac{A(y_1/\theta_1) + B}{C(y_1/\theta_1) + D}$ 变换——与式 (7.10) 一模一样。高斯光束就是“曲率半径为复数 q 的球面波”： q 的实部携带波前曲率，虚部携带有限光斑带来的衍射。式 (7.10) 在傍轴近似下对一般系统都成立（含渐变折射率介质，Kogelnik 的证明见文献 [7]）；跨越不同折射率的介质时，需把 λ 换成介质中的波长，本讲不涉及。

7.5 透镜聚焦与束腰的“成像”

推导：像方束腰的位置与大小

物方束腰 w_{01} ($z_{R1} = \pi w_{01}^2/\lambda$) 在透镜前 d_1 处。束腰处 $q = -iz_{R1}$ ；传播 d_1 后 $q = d_1 - iz_{R1}$ ；经透镜 $\frac{1}{q'} = \frac{1}{d_1 - iz_{R1}} - \frac{1}{f}$ 。通分：

$$q' = \frac{f(d_1 - iz_{R1})}{f - d_1 + iz_{R1}}.$$

分子分母同乘分母的共轭 $(f - d_1 - iz_{R1})$ ，分母变为实数 $(f - d_1)^2 + z_{R1}^2$ ，分子为 $f[d_1(f - d_1) - z_{R1}^2] - if[z_{R1}(f - d_1) + d_1 z_{R1}] = f[d_1(f - d_1) - z_{R1}^2] - if^2 z_{R1}$ 。透镜后方的束腰位置 d_2

满足“再传播 d_2 后 q 为纯虚数”，即 $d_2 = -\text{Re } q'$ ；那里的瑞利长度 $z_{R2} = -\text{Im } q'$ 。整理得

$$d_2 - f = \frac{(d_1 - f)f^2}{(d_1 - f)^2 + z_{R1}^2}, \quad (7.11)$$

$$w_{02}^2 = \frac{w_{01}^2 f^2}{(d_1 - f)^2 + z_{R1}^2}. \quad (7.12)$$

(第二式由 $z_{R2} = f^2 z_{R1} / [(d_1 - f)^2 + z_{R1}^2]$ 与 $w_{02}^2 = \lambda z_{R2} / \pi$ 得到。)

检验：几何光学极限与最小光斑

(i) $z_{R1} \rightarrow 0$ (物方束腰是“点”)：式 (7.11) 变为 $(d_1 - f)(d_2 - f) = f^2$ ，正是牛顿形式的成像公式， $w_{02}/w_{01} = f/|d_1 - f|$ 是横向放大率。(ii) 与几何光学不同， $d_2 - f$ 作为 $d_1 - f$ 的函数有最大值：在 $d_1 - f = z_{R1}$ 时 $d_2 - f = f^2/(2z_{R1})$ (图 5(b))——束腰的“像”不能被送到任意远。(iii) 准直光束聚焦：束腰在透镜处 ($d_1 = 0$) 且 $z_{R1} \gg f$ ，式 (7.12) 给出

$$w_{02} \approx \frac{\lambda f}{\pi w_{01}}, \quad d_2 \approx f. \quad (7.13)$$

例： $\lambda = 1064 \text{ nm}$ ， $w_{01} = 1 \text{ mm}$ ， $f = 10 \text{ cm}$ ，得 $w_{02} = 33.9 \mu\text{m}$ (脚本 `fig_lensfocus.py` 用 ABCD 定律精确计算得 $33.85 \mu\text{m}$)。聚焦光斑与 f/w_{01} (约为“F 数”) 成正比；要得到更小的光斑，必须先扩束 (增大 w_{01}) 或用更短焦距的透镜。由式 (7.9)，焦点处光束的会聚半角 $\theta'_0 = \lambda/(\pi w_{02}) = w_{01}/f$ ，正是几何光学的“孔径角”：衍射极限光斑与会聚角的乘积仍是 λ/π 。

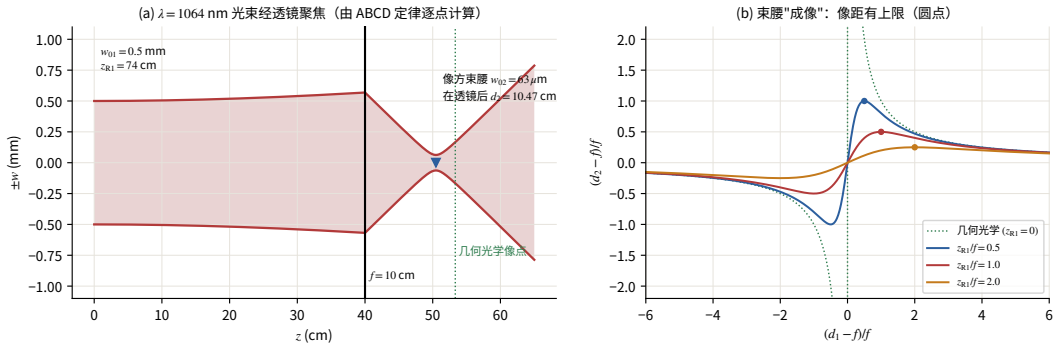


图 5 (a) $w_{01} = 0.5 \text{ mm}$ 的光束在束腰后 40 cm 处遇到 $f = 10 \text{ cm}$ 的透镜，用 ABCD 定律逐点计算的包络；像方束腰在透镜后 10.47 cm 处，比几何光学“像点” (13.3 cm ，绿色虚线) 更靠近焦点。(b) 束腰成像关系式 (7.11) 的无量纲曲线： z_{R1}/f 越大，像距的上限 $f^2/(2z_{R1})$ (圆点) 越小。

交互演示：高斯光束经透镜：调节入射束腰、透镜位置与焦距，观察包络与像方束腰；读数给出任一位置的 q 、 w 、 R ，并与本节的束腰成像公式比较。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 `laser-gauss`)。

7.6 实际光束： M^2 因子

实际激光束往往不是纯粹的基模。为了用统一的方式描述，ISO 11146 标准用光强分布的二阶矩定义光束半径 [17, 18]：

$$W_x^2(z) \equiv 4 \frac{\int x^2 I(x, y, z) dx dy}{\int I dx dy}, \quad (7.14)$$

其中光束中心取为 $x = 0$ 。对基模高斯光束， $I \propto e^{-2x^2/w^2}$ ， $\langle x^2 \rangle = w^2/4$ ，所以 $W_x = w$ ，定义是自洽的。由傍轴方程可以证明（附录 G）：对任何傍轴光束， $W_x^2(z)$ 都严格是 z 的二次函数，可写成

$$\begin{aligned} W_x^2(z) &= W_0^2 \left[1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2 \right], \\ W_0 \Theta_0 &= M^2 \frac{\lambda}{\pi}, \quad \Theta_0 = \frac{W_0}{z_R}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

形式与式 (7.5) 相同，只是束腰与发散角的乘积是基模的 M^2 倍。 $M^2 \geq 1$ ，等号当且仅当光束是基模高斯光束（这是傅里叶分析中“宽度 $\times$ 频谱宽度”不等式的推论 [18]，本讲不证）。

注：一个可以算到底的例子

TEM₀₀ 与 TEM₁₀（第 8.5 节）的非相干叠加（功率份额 $1-p$ 与 p ，两模同 q ）：各模光强都随 $w(z)$ 等比例缩放，TEM₁₀ 的 $\langle x^2 \rangle = 3w^2/4$ （附录 C），于是 $W_x^2 = w^2(1+2p)$ ， z_R 不变， $M_x^2 = 1+2p$ 。

8 谐振腔的本征模

8.1 模从哪里来：重做 Fox–Li 的数值实验

在讨论高斯光束之前，先看一个不依赖任何假设解的“实验”。两块宽 $2a$ 、在另一方向无限长的条形平面镜相距 b 。在镜 1 上放一个初始场 $u_0(x)$ ，用一维菲涅耳积分（第 5.4 节）算出它到达镜 2 时的场，截去镜面以外的部分（那部分光从镜边漏掉了），再算回镜 1……如此反复。这正是 Fox 与厉鼎毅 1961 年在 IBM 704 上做的事 [2]。

定义：菲涅耳数

$N \equiv a^2/(b\lambda)$ 。它的含义是：从镜 2 中心看镜 1，镜面半宽 a 内包含的菲涅耳半波带数（到镜边与到镜心的光程差为 $a^2/(2b)$ ，以 $\lambda/2$ 为单位就是 N ）。 N 越大，镜面相对衍射越“大”，漏光越少。

图 6 是我们按 Fox–Li 原文的参数（ $2a = 50\lambda$ ， $b = 100\lambda$ ， $N = 6.25$ ）、从均匀平面波出发重做的结果。第 1 次渡越后，振幅与相位上有许多涟漪——均匀照明的镜面边缘衍射出的菲涅耳条纹；随着渡越次数增加，涟漪逐渐减弱，场在镜边变小、中间变大；约 200–300 次以后（原文的判据是相邻两次渡越的场分布之差小于 0.03%），每次渡越的功率损耗收敛到一个常数，相对分布不再改变。这个不再改变的分布就是模：它满足“传播一次 = 乘一个复常数 Γ ”，即积分方程 $\Gamma u(x) = \int_{-a}^a \mathcal{K}(x, x') u(x') dx'$ 的本征解（ $\mathcal{K}$ 是一维衍射积分的核）， $|\Gamma|^2$ 是每次渡越保留的功率比例， $\arg \Gamma$ 是相对几何相移 kb 的附加相位。

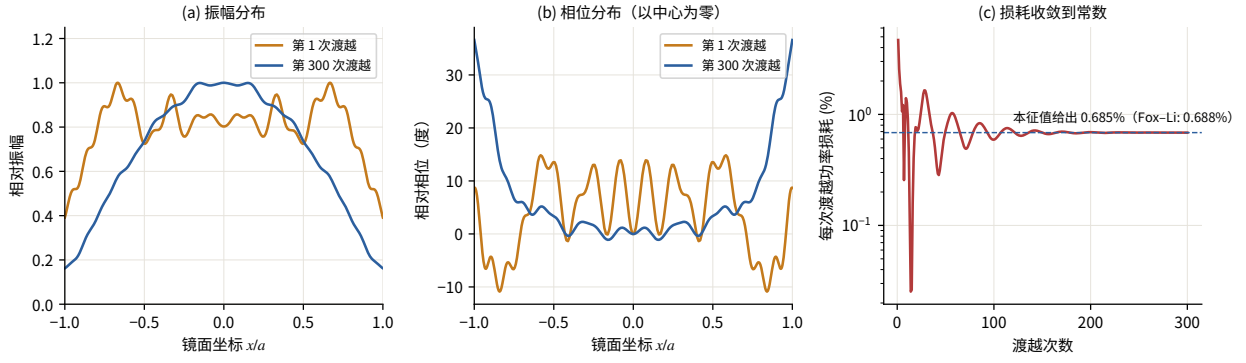


图6 重做 Fox-Li 数值实验 (条形平面镜, $2a = 50\lambda$, $b = 100\lambda$, $N = 6.25$; 与原文一样使用含精确距离与倾斜因子的二维惠更斯积分, 核为 $\mathcal{K}(x, x') = \sqrt{k/(2\pi i \rho)} e^{ik(\rho-b)} \frac{1+b/\rho}{2}$, $\rho = \sqrt{b^2 + (x-x')^2}$, $\rho \approx b$ 时退化为一维菲涅耳核; 300 点高斯求积)。(a)(b) 第 1 次与第 300 次渡越后镜面上的振幅与相位; (c) 每次渡越的功率损耗收敛到 0.685%, 与积分算子最大本征值给出的值一致; 原文为 0.688%, 相位超前 1.59° (我们得 1.589°)。若改用傍轴 (菲涅耳) 核, 损耗为 0.673%, 相差约 2%, 因为本例的 $N = 6.25$ 与 $(b/a)^2 = 16$ 并不悬殊, 傍轴条件只是勉强满足 (见脚本 `fig_foxli.py`)。

交互演示：Fox-Li 迭代：选择平面镜或共焦球面镜，调节菲涅耳数 N ，从均匀平面波出发逐次计算衍射，观察场分布收敛为模、每次渡越的损耗收敛为常数。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 `laser-foxli`)。

几点观察，后面会一一得到解释：模的振幅在中心最大、向镜边单调减小，与高斯光束相似，但平面镜腔的模由镜边衍射决定，不是严格的高斯函数；每次渡越的相位比 kb 超前 1.59° ，这是有限横向尺寸带来的附加相位，与第 7.2 节的 Gouy 相位同源；换成曲面镜组成的稳定腔，模的光斑远小于镜面，衍射损耗可以低几个数量级 (Fox-Li 原文对共焦腔的计算即如此 [2]；演示中可以切换验证)，这样的模可以用解析的高斯光束描述。

8.2 自洽条件：往返后 q 不变

在稳定腔中，镜面足够大（光斑远小于镜面，镜边衍射可忽略），腔内的光可以用高斯光束描述。一束高斯光束成为“模”的条件是：在腔内往返一次后，它的 q 参数复原。由 ABCD 定律，这就是

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D}, \quad (8.1)$$

其中 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 是以某参考面为起点的往返矩阵。

推导：解自洽方程

去分母： $Cq^2 + (D - A)q - B = 0$ 。两边除以 q^2 ，得关于 $1/q$ 的二次方程 $B(1/q)^2 + (A - D)(1/q) - C = 0$ ，解为

$$\frac{1}{q} = \frac{D - A}{2B} \pm \frac{\sqrt{(A - D)^2 + 4BC}}{2B}.$$

用 $AD - BC = 1$ 化简根号内： $(A - D)^2 + 4BC = (A + D)^2 - 4(AD - BC) = 4(h^2 - 1)$ 。在 $|h| < 1$ 时它为负，平方根为纯虚数 $2i\sqrt{1 - h^2}$ 。取使 $\text{Im}(1/q) > 0$ 的那个根 (第 7.2 节：只有

这样光束才在横向有限):

$$\frac{1}{q} = \frac{D-A}{2B} + i \frac{\sqrt{1-h^2}}{|B|}. \quad (8.2)$$

对照 $1/q = 1/R + i\lambda/(\pi w^2)$, 在参考面上

$$\frac{1}{R} = \frac{D-A}{2B}, \quad w^2 = \frac{\lambda|B|}{\pi\sqrt{1-h^2}}. \quad (8.3)$$

要点: 光线稳定 $\Leftrightarrow$ 存在高斯模

式 (8.3) 给出有限正值的 w^2 当且仅当 $|h| < 1$ ——与第 6.3 节光线稳定的条件完全相同。 $|h| > 1$ 时 $1/q$ 的两个根都是实数, “自洽光束”退化为没有横向限制的球面波。两个边界要分开看:

- $h \rightarrow +1$ ($g_1 g_2 \rightarrow 1$: 平行平面或同心): B 有限而 $\sqrt{1-h^2} \rightarrow 0$, 两镜光斑都 $\rightarrow \infty$, 光斑铺满镜面, 必须像 Fox-Li 那样考虑镜边衍射。
- $h \rightarrow -1$ ($g_1 g_2 \rightarrow 0$): $B = 2g_2 L$ 也可能 $\rightarrow 0$, w^2 是 $0/0$ 型, 结果取决于逼近方式: $g_1 \rightarrow 0$ 而 g_2 固定时 $w_1 \rightarrow \infty$ 、 $w_2 \rightarrow 0$ (例题 3 的窗口边缘即此情形); 沿对称线 $g \rightarrow 0$ 时光斑有限。恰在共焦点 $\mathbf{M} = -\mathbf{I}$, 式 (8.1) 对任意 q 都成立, 模不能由它确定, 而要以“镜面 = 波前” (下一小节) 确定; 对称共焦腔的镜面光斑是有限的 $\sqrt{\lambda L/\pi}$, 衍射损耗很小。

除这些边界外, 几何光学的光线是否被关住, 与波动光学的光束是否被关住, 是同一件事。

8.3 两镜腔的模: 镜面就是波前

高斯光束的等相位面是曲率半径 $R(z)$ 的球面; 一块球面镜要把光束原样反射回去, 镜面必须与到达那里的波前重合 (否则反射波的波前与入射波不同, 往返后就不是同一束光)。这给出两镜腔模的直接求法。

推导: 由“镜面 = 波前”求束腰

设束腰在 $z = 0$, 镜 1 在 $z = -z_1$, 镜 2 在 $z = z_2$, $z_1 + z_2 = L$ 。由式 (7.6), 要求

$$z_1 + \frac{z_R^2}{z_1} = R_1, \quad z_2 + \frac{z_R^2}{z_2} = R_2.$$

两式都改写成 $z_R^2 = z_1(R_1 - z_1) = z_2(R_2 - z_2)$, 代入 $z_2 = L - z_1$ 后 z_1^2 项相消, 得到 z_1 的一次方程 $z_1(R_1 + R_2 - 2L) = L(R_2 - L)$ 。用 g 参数表示 ($R_i = L/(1 - g_i)$), 通分化简, 代数细节见附录 A):

$$z_1 = \frac{g_2(1 - g_1)}{g_1 + g_2 - 2g_1g_2} L, \quad (8.4)$$

$$z_2 = \frac{g_1(1 - g_2)}{g_1 + g_2 - 2g_1g_2} L,$$

$$z_R^2 = \frac{g_1g_2(1 - g_1g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1g_2)^2} L^2. \quad (8.5)$$

束腰 $w_0^2 = \lambda z_R / \pi$ ；镜面光斑 $w_i^2 = w_0^2(1 + z_i^2/z_R^2)$ ，化简（附录 A）得

$$\begin{aligned} w_1^2 &= \frac{\lambda L}{\pi} \sqrt{\frac{g_2}{g_1(1 - g_1 g_2)}}, \\ w_2^2 &= \frac{\lambda L}{\pi} \sqrt{\frac{g_1}{g_2(1 - g_1 g_2)}}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

与自洽解对照：取式 (6.3)（参考面在镜 1 反射之后）， $\frac{D-A}{2B} = \frac{-4g_2(1-g_1)}{4g_2L} = -\frac{1}{R_1}$ ，即刚离开镜 1 的波前是半径 R_1 的会聚球面，正好贴合镜 1；再用 $1 - h^2 = 4g_1g_2(1 - g_1g_2)$ 代入式 (8.3)，得到同一个 w_1^2 。两种方法一致（ g_1, g_2 同号时 $|g_2|/\sqrt{g_1g_2} = \sqrt{g_2/g_1}$ ）。

检验：对称腔、共焦腔与极限

(i) 对称腔 $g_1 = g_2 = g$ ： $z_1 = z_2 = L/2$ ， $w_0^2 = \frac{\lambda L}{2\pi} \sqrt{\frac{1+g}{1-g}}$ ，镜面 $w^2 = \frac{\lambda L}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-g^2}}$ 。(ii) 共焦腔 $g = 0$ ： $z_R = L/2$ （束腰到镜面恰为一个瑞利长度）， $w_0 = \sqrt{\lambda L/(2\pi)}$ ，镜面 $w = \sqrt{2}w_0 = \sqrt{\lambda L/\pi}$ ——这是给定 L 时对称腔镜面光斑的最小值。(iii) $g \rightarrow \pm 1$ （平行平面或同心）：镜面光斑 $\rightarrow \infty$ ，与第 8.2 节的结论一致。(iv) 量纲： λL 是面积。(v) 平凹腔 $g_1 = 1$ （镜 1 为平面）： $z_1 = 0$ ，束腰在平面镜上， $z_R^2 = L(R_2 - L)$ 。

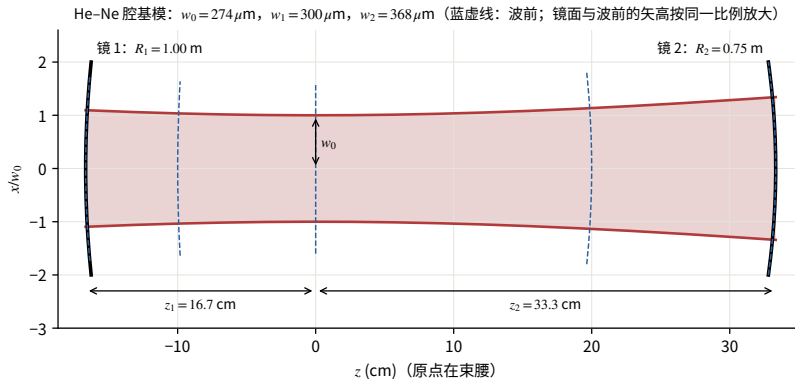


图 7 He-Ne 激光腔（ $\lambda = 633 \text{ nm}$ ， $L = 0.50 \text{ m}$ ， $R_1 = 1.00 \text{ m}$ ， $R_2 = 0.75 \text{ m}$ ， $g_1 = 0.5$ ， $g_2 = 1/3$ ）的基模：束腰靠近曲率半径较大（较平）的镜 1。为便于观察，横向坐标以 w_0 为单位放大，镜面与波前的矢高按同一比例再放大，所以图中两端的波前（蓝虚线）与镜面（黑线）重合是真实的几何关系。脚本中还核对了：往返一次后 q 精确复原；式 (8.6) 与 $w_0^2(1 + z_i^2/z_R^2)$ 一致。

8.4 谐振频率

模的横向形状由 q 决定；它的频率由“往返一次相位增加 2π 的整数倍”决定（第 4.3 节的共振条件）。与平面波相比，高斯光束的轴上相位多了 $-\psi(z)$ （式 (7.4)）。

推导：往返相位

从镜 1（ $z = -z_1$ ）到镜 2（ $z = z_2$ ），轴上相位增加 $kL - [\psi(z_2) - \psi(-z_1)] = kL - \Delta\psi$ ，其中

$$\Delta\psi \equiv \arctan \frac{z_2}{z_R} + \arctan \frac{z_1}{z_R} \quad (8.7)$$

是单程的 Gouy 相位 (用了 ψ 是奇函数)。反射后的光束是同一束高斯光束反向传播, 回程同样增加 $kL - \Delta\psi$ 。由于镜面与波前重合, 反射在整个横截面上引入相同的相位 (并入整数), 横向各处的相位关系保持不变。于是共振条件为

$$2kL - 2\Delta\psi = 2\pi j, \quad j \text{ 为整数.}$$

用 $k = 2\pi\nu/c$ 解出 ν :

$$\nu_j = \frac{c}{2L} \left(j + \frac{\Delta\psi}{\pi} \right). \quad (8.8)$$

接下来要把 $\Delta\psi$ 用 g_1, g_2 表示。可以把式 (8.4)、(8.5) 代入 $\cos \Delta\psi = \frac{z_R^2 - z_1 z_2}{\sqrt{(z_1^2 + z_R^2)(z_2^2 + z_R^2)}}$ 硬算 (附录 A); 下面给出一个更有启发的推导, 它把 Gouy 相位与光线的往返相位 Φ 联系起来。

推导: 往返的 Gouy 相位与光线的往返相位

(i) 这里的“前因子”指式 (7.1) 中的 $a(z)$ (不是 $1/q$ 本身: 经过透镜时 $1/q$ 跳变而 a 不变)。自由空间中 $a \propto 1/q$ (式 (7.2))。自由传播 d 时 $q \rightarrow q + d$, 前因子乘以 $\frac{q}{q+d} = \frac{1}{1+d/q} = \frac{1}{A+B/q}$ ($A = 1, B = d$); 经过薄透镜, 前因子不变, 而 $A + B/q = 1$ 。两段系统级联时: 第一段 (A_1, B_1, C_1, D_1) 把 q_1 变成 $q_2 = \frac{A_1 q_1 + B_1}{C_1 q_1 + D_1}$, 第二段 (A_2, B_2, C_2, D_2) 再作用。两段因子之积为

$$\begin{aligned} \left(A_1 + \frac{B_1}{q_1} \right) \left(A_2 + \frac{B_2}{q_2} \right) &= \frac{A_2(A_1 q_1 + B_1) + B_2(C_1 q_1 + D_1)}{q_1} \\ &= (A_2 A_1 + B_2 C_1) + \frac{A_2 B_1 + B_2 D_1}{q_1}, \end{aligned}$$

(第一步把 $1/q_2 = \frac{C_1 q_1 + D_1}{A_1 q_1 + B_1}$ 代入并通分) 右边恰是总矩阵 $\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1$ 的 $A + B/q_1$ 。所以对任何由透镜与自由空间组成的系统, 前因子乘以 $1/(A + B/q)$ 。(ii) 对往返矩阵与自洽的 q (式 (8.2)), $\frac{B}{q} = \frac{D-A}{2} + i \frac{B}{|B|} \sqrt{1-h^2}$, 所以

$$A + \frac{B}{q} = h + i\sigma \sqrt{1-h^2} = e^{i\sigma\Phi}, \quad \sigma \equiv \frac{B}{|B|} = \pm 1,$$

其中 $\cos \Phi = h$ ($0 < \Phi < \pi$) 正是第 6.3 节光线每次往返的相位。往返一次, 包络前因子乘以 $e^{-i\sigma\Phi}$: 往返的 Gouy 相位 $2\Delta\psi$ 等于 Φ ($B > 0$) 或 $2\pi - \Phi$ ($B < 0$, 即 $-\Phi$ 加上 2π)。对两镜腔, $B = 2g_2 L$, σ 就是 g_2 的符号。无论哪种情形, 往返 Gouy 相位与光线往返相位的余弦相等: $\cos 2\Delta\psi = \cos \Phi = h$ 。

(iii) 由 $\cos 2\Delta\psi = 2\cos^2 \Delta\psi - 1 = h = 2g_1 g_2 - 1$, 得 $\cos^2 \Delta\psi = g_1 g_2$ 。 $\Delta\psi$ 在 $(0, \pi)$ 内: $g_1, g_2 > 0$ 时 $2\Delta\psi = \Phi < \pi$, $\Delta\psi < \pi/2$, $\cos \Delta\psi > 0$, 取正号; $g_1, g_2 < 0$ 时 $2\Delta\psi = 2\pi - \Phi > \pi$, 取负号 (附录 A 由 $\cos \Delta\psi$ 的显式表达式再次确认)。

于是基模的谐振频率为

$$\nu_j = \frac{c}{2L} \left[j + \frac{1}{\pi} \arccos(\pm \sqrt{g_1 g_2}) \right], \quad (8.9)$$

其中 $g_1, g_2 > 0$ 时取 $+$, $g_1, g_2 < 0$ 时取 $-$ 。对 TEM_{00} 模, 第二项只是让整个频率梳平移, 相邻纵模仍相隔 $c/(2L)$ 。它的真正作用在下一小节的高阶横模中显现。

8.5 高阶横模：厄米-高斯模

傍轴方程还有其他解。最低的一个可以直接验证：

推导：TEM₁₀：代入验证

设 $u_{00} = \frac{1}{q} e^{ikr^2/(2q)}$ 是基模解。试探 $u_{10} = \frac{x}{q} u_{00}$ 。记 $v = u_{00}/q$ ，则 $u_{10} = xv$ 。由 $dq/dz = 1$ ， $\partial_z v = \partial_z u_{00}/q - u_{00}/q^2$ ， $\nabla_{\perp}^2 v = \nabla_{\perp}^2 u_{00}/q$ 。于是

$$\begin{aligned} & \nabla_{\perp}^2(xv) + 2ik \partial_z(xv) \\ &= x \left[\frac{\nabla_{\perp}^2 u_{00} + 2ik \partial_z u_{00}}{q} - \frac{2ik u_{00}}{q^2} \right] + 2 \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

方括号第一项为零 (u_{00} 是解)；而 $2\partial_x v = 2 \cdot \frac{ikx}{q} \cdot \frac{u_{00}}{q} = \frac{2ikx u_{00}}{q^2}$ ，与方括号第二项抵消。所以 u_{10} 是解。

u_{10} 比基模多了因子 x/q 。由第 7.2 节， $\frac{1}{q} = \frac{i e^{-i\psi}}{z_R} \frac{w_0}{w}$ ，所以 $\frac{x}{q} \propto \frac{x}{w} e^{-i\psi}$ (略去常数)：横向形状多了一个过零点的因子 x/w ，积累的相位再少一个 ψ (即再超前 ψ)。一般地，

$$\begin{aligned} u_{mn} \propto \frac{w_0}{w} H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) e^{-r^2/w^2} \\ \times \exp\left[i \frac{kr^2}{2R} - i(1+m+n)\psi(z)\right], \end{aligned} \quad (8.10)$$

叫厄米-高斯模 TEM_{mn}。这里 H_m 是厄米多项式： $H_0 = 1, H_1(\xi) = 2\xi, H_2 = 4\xi^2 - 2, H_3 = 8\xi^3 - 12\xi$ ，一般由递推 $H_{m+1} = 2\xi H_m - 2m H_{m-1}$ 生成； H_m 有 m 个实零点，所以 TEM_{mn} 的光强在 x 方向有 m 条暗线、 y 方向有 n 条 (图 8(a))。式 (8.10) 满足傍轴方程的证明见附录 C：代入后归结为 $H_m'' - 2\xi H_m' + 2m H_m = 0$ (厄米方程)，而这个方程只有当 m 为非负整数时才有不在无穷远处“压倒”高斯因子的多项式解。三点要记住：

1. 所有 TEM_{mn} 共用同一个 q ，即同样的 $w(z)$ 与 $R(z)$ ——所以同一个稳定腔的镜面同时与它们的波前重合，它们都是这个腔的模。
2. 高阶模的光斑更宽：TEM_{m0} 在 x 方向的二阶矩宽度为 $W_x = w\sqrt{2m+1}$ (附录 C)。在腔内放一个光阑可以挡掉高阶模、只留基模，这是激光器选模的常用办法。
3. Gouy 相位乘以 $(1+m+n)$ 。对旋转对称的拉盖尔-高斯模 (另一组完备的模)，对应的因子是 $(1+2s+|l|)$ (s, l 为径向与角向指数)；本讲不展开。

把式 (8.9) 的推导中 $\Delta\psi$ 换成 $(1+m+n)\Delta\psi$ ：

$$\nu_{jmn} = \frac{c}{2L} \left[j + (1+m+n) \frac{\arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2})}{\pi} \right] \quad (8.11)$$

这就是 Kogelnik 与厉鼎毅给出的两镜腔谐振频率公式 [8]。同一纵模序数 j 下，横模阶数 $m+n$ 每增加 1，频率升高

$$\Delta\nu_T = \nu_{\text{FSR}} \frac{\arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2})}{\pi}, \quad (8.12)$$

称为横模间隔。它总是小于 ν_{FSR} ，所以横模频率夹在纵模之间 (图 8(b))。

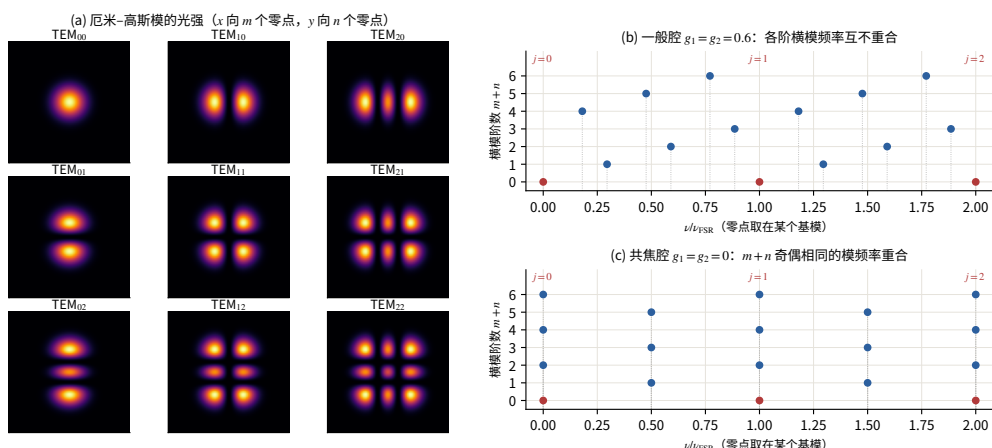


图 8 (a) 厄米-高斯模的光强 (在束腰处, 按各自最大值归一)。 (b)(c) 两镜腔各横模的谐振频率 (纵轴为横模阶数 $m+n$, 横轴以 TEM₀₀ 的某个纵模为零点、以 ν_{FSR} 为单位; 红点为 TEM₀₀ 的相邻纵模 j): 一般腔中各阶频率互不重合; 共焦腔中 $m+n$ 为偶数的模都与 TEM₀₀ 同频, 奇数的模都落在两纵模正中间。脚本还用有限差分验证了 TEM₀₀、TEM₁₀、TEM₂₁ 满足傍轴方程。

8.6 频率简并

若 $\Delta\psi/\pi$ 是有理数, 不同 (j, m, n) 的频率可以完全重合, 称为频率简并。

- 共焦腔 ($g_1 = g_2 = 0$): $\Delta\psi = \pi/2$, $\nu_{jmn} = \frac{c}{2L} (j + \frac{1+m+n}{2})$ 。 $m+n$ 为偶数的所有模与 TEM₀₀ 的频率重合; 奇数的模恰好落在两个 TEM₀₀ 共振的正中间。若入射光没有与腔模严格匹配 (同时激发了各阶横模), 透射峰每隔 $c/(4L)$ 出现一次, “有效自由光谱区” 减半, 但峰的位置与入射光的横向形状、对准误差无关。这正是“共焦扫描干涉仪”用来测激光光谱的原理 (例题 3)。它与第 6.4 节“共焦腔 $\mathbf{M} = -\mathbf{I}$ 、光线两次往返复原”是同一事实的两面: 光线两次往返 (光程 $4L$) 回到原状态, 对应频率间隔 $c/(4L)$ 。
- 平行平面腔 ($g = 1$): $\Delta\psi = 0$, 按式 (8.11) 所有横模都与基模简并。实际上平面镜腔不满足“光斑远小于镜面”的前提, 简并由镜边衍射解除: Fox-Li 算出的 1.59° 相位超前就是衍射给出的“Gouy 相位”, 不同横模的这一相位不同, 频率也就略有不同 [2]。
- 一般的再入条件: 若 $\Phi = 2\pi j_1/j_2$ (j_1, j_2 为互质整数), 光线往返 j_2 次后回到原状态; 相应地 $m+n = j_2$ 的横模与基模的频率相差 j_1 个自由光谱区, 二者简并。设计激光器时通常要避免低阶简并, 否则高阶模容易与基模同时起振; 而“Herriott 多次反射池”等器件反过来利用再入条件让光在两镜间走很多次。

交互演示: 横模图样与频率梳: 选择横模指数 m, n 查看光强分布; 调节对称腔的 g , 观察各阶横模在频率轴上的位置, 在 $g = 0$ 处看共焦简并的出现。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 laser-modes)。

8.7 模式匹配

实验中常需要把一束外来的激光“送进”一个无源腔 (参考腔、模式清洁剂——一种只让 TEM₀₀ 共振透过、借此滤掉光束中高阶模成分的短腔——以及 LIGO 臂腔)。只有入射光与腔的 TEM₀₀ 模在形状和位置上都吻合, 共振时才能全部耦合进去。

定义: 模式匹配效率

同一 q 的厄米-高斯模两两正交 (附录 C: $\iint U_{mn}^* U_{m'n'} dA = 0$, $(m, n) \neq (m', n')$), 并且构成完备组 (类似傅里叶级数中的正弦、余弦), 任何入射场都可以展开成 $U_{\text{in}} = \sum c_{mn} U_{mn}$ 。由正交性, 交叉项积分为零, 总功率等于各模功率之和 $\sum |c_{mn}|^2 \iint |U_{mn}|^2 dA$; 所以进入 TEM₀₀ 的功率比例是投影系数的模平方:

$$\eta = \frac{|\iint U_{\text{in}}^* U_{00} dA|^2}{\iint |U_{\text{in}}|^2 dA \iint |U_{00}|^2 dA}, \quad (8.13)$$

积分在垂直于轴的任一平面上进行。两束光都满足傍轴方程时, 结果与平面的选择无关: 与附录 G 中功率守恒的论证相同, $\partial_z(U_{\text{in}}^* U_{00})$ 可以写成对 x, y 的全导数, 积分后为零。 $\eta = 1$ 当且仅当两者形状相同 (匹配)。

推导: 两束同轴、束腰在同一平面的高斯光束

在束腰面上两者都是实的高斯函数: $U_{\text{in}} = e^{-r^2/w_1^2}$, $U_{00} = e^{-r^2/w_2^2}$ 。用 $\int_0^\infty e^{-\alpha r^2} 2\pi r dr = \pi/\alpha$: 交叠积分为 $\pi/(w_1^{-2} + w_2^{-2})$, 两个归一化积分为 $\pi w_1^2/2$ 与 $\pi w_2^2/2$ 。于是

$$\eta = \frac{\pi^2/(w_1^{-2} + w_2^{-2})^2}{\pi^2 w_1^2 w_2^2 / 4} = \frac{4}{(w_1/w_2 + w_2/w_1)^2}.$$

光斑大小差 10% ($w_1/w_2 = 1.1$) 时 $\eta = 0.991$: 匹配对尺寸的要求并不苛刻。束腰位置相差 Δ 时 (附录 D)

$$\eta = \frac{4}{(w_1/w_2 + w_2/w_1)^2 + (\lambda \Delta / (\pi w_1 w_2))^2}. \quad (8.14)$$

同理可得: 同样大小的两束光横向错开 Δx 时 $\eta = e^{-\Delta x^2/w_0^2}$; 在束腰处相对倾斜 α 时 $\eta = e^{-(\alpha/\theta_0)^2}$ 。

推导: 用一块透镜实现匹配

把束腰 w_1 变成束腰 w_2 : 在式 (7.12) 中令 $w_{02} = w_2$, 解出 $(d_1 - f)^2 = f^2 w_1^2 / w_2^2 - z_{R1}^2$ 。注意 $z_{R1} w_2 / w_1 = \pi w_1 w_2 / \lambda$, 定义

$$f_0 \equiv \frac{\pi w_1 w_2}{\lambda},$$

则 $(d_1 - f)^2 = \frac{w_1^2}{w_2^2} (f^2 - f_0^2)$ 。再代入式 (7.11): $(d_2 - f) = (d_1 - f) \frac{f^2}{f^2 w_1^2 / w_2^2} = (d_1 - f) \frac{w_2^2}{w_1^2}$ 。所以

$$\begin{aligned} d_1 &= f \pm \frac{w_1}{w_2} \sqrt{f^2 - f_0^2}, \\ d_2 &= f \pm \frac{w_2}{w_1} \sqrt{f^2 - f_0^2}, \end{aligned} \quad (8.15)$$

两式同取上号或同取下号。单透镜能实现匹配的必要条件是 $f \geq f_0$ [8]; 焦距太短的透镜把光束“压”得太狠, 无论放在哪里都得不到 w_2 。 d_1, d_2 还必须为正 (透镜在两个束腰之间), 这会排除一部分解 (例题 2)。

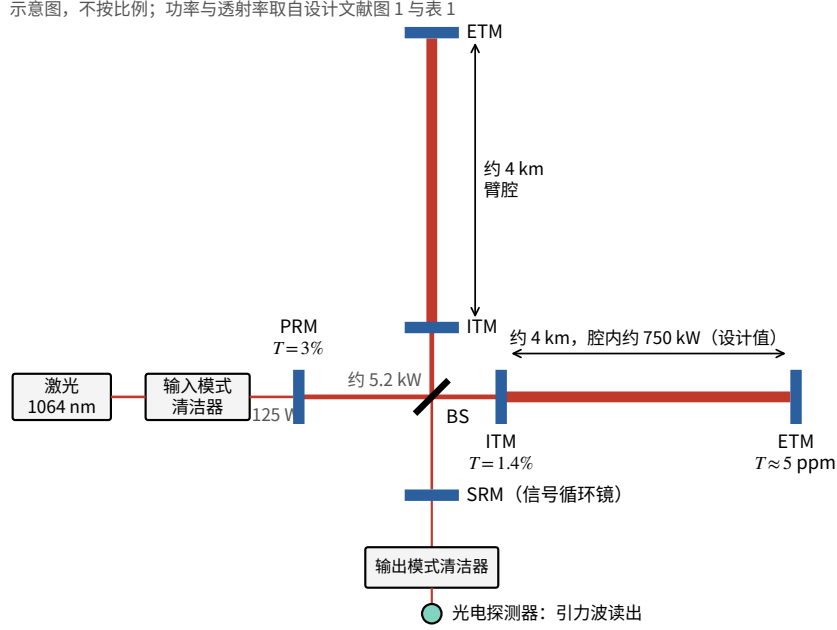


图 9 Advanced LIGO 光路示意图（据文献 [10] 图 1 与表 1 的文字信息重绘，不按比例）。激光经输入模式清洁剂与功率循环镜（PRM）进入分束器（BS），两条约 4 km 的臂各由输入镜 ITM 与端镜 ETM 组成法布里-珀罗腔；SRM 为信号循环镜，引力波信号在输出端由光电探测器读出。图中功率与透射率为设计值。

9 应用：LIGO 的法布里-珀罗臂腔

引力波使两条臂的长度发生方向相反的微小变化（相对长度变化即“应变”约 10^{-21} ，两条 4 km 臂的长度差变化约 4×10^{-18} m），迈克耳孙干涉仪把它转换成输出端的光强变化。法布里-珀罗臂腔在这里起两个作用：放大“臂长变化 $\rightarrow$ 光相位变化”的转换系数，以及把有限的激光功率堆积起来（图 9）。

9.1 为什么用法布里-珀罗臂腔：相位放大

推导：臂腔反射光的相位灵敏度

把 ETM 近似为全反射镜（ $r_2 = 1$ ），ITM 无损耗。由第 4.4 节，臂腔的反射系数为

$$\rho(\delta) \equiv \frac{E_r}{E_{in}} = \frac{e^{i\delta} - r_1}{1 - r_1 e^{i\delta}}, \quad |\rho| = 1.$$

臂长变化 ΔL 使往返相位改变 $\Delta\delta = 2k\Delta L$ 。在共振点 $\delta = 0$ 附近求反射光相位 $\arg \rho$ 对 δ 的导数：分子 $e^{i\delta} - r_1$ 的辐角导数为 $\text{Im} \frac{ie^{i\delta}}{e^{i\delta} - r_1} \Big|_0 = \frac{1}{1 - r_1}$ ；分母 $1 - r_1 e^{i\delta}$ 的辐角导数为 $\text{Im} \frac{-ir_1 e^{i\delta}}{1 - r_1 e^{i\delta}} \Big|_0 = -\frac{r_1}{1 - r_1}$ 。相减：

$$\left. \frac{d \arg \rho}{d\delta} \right|_{\delta=0} = \frac{1 + r_1}{1 - r_1} \approx \frac{4}{T_1} \approx \frac{2\mathcal{F}}{\pi}. \quad (9.1)$$

（近似用了 $1 - r_1 \approx T_1/2$ 与式 (4.8) 的 $\mathcal{F} \approx 2\pi/T_1$ 。）

于是同样的臂长变化，在臂腔中产生的反射光相位变化是普通迈克耳孙臂（光在臂中往返一次，相位变化 $2k\Delta L$ ）的 $2\mathcal{F}/\pi$ 倍。LIGO 臂腔 $T_1 = 1.4\%$ ，放大约 $4/0.014 \approx 286$ 倍，相当于让光在 4 km 臂中往返约 280 次（等效光程约 2000 km）。注意光子在腔内的平均往返次数只有

$1/\Lambda \approx 71$ (式 (4.8)), 多出的 4 倍来自各次往返光的相干叠加。这个结论只对比储能时间慢的信号成立：信号频率高于腔极点 $\delta\nu/2$ (式 (4.9)) 时，光在腔内来不及累积，放大倍数下降。

9.2 设计参数的逐项核对

表 3 Advanced LIGO 臂腔 (输入参数见导读: $L = 3994.5$ m, $\lambda = 1064$ nm, $R_{1,2} = 1934/2245$ m, $T_{1,2} = 1.4\%/5$ ppm; 往返总损耗目标 75 ppm 在文献中已含 ETM 透射, 下表取 T_2 与 75 ppm 另计, 两种口径的臂腔功率只差 0.1%): 设计值 (文献 [10] 表 1、表 3) 与本讲公式的计算值。计算脚本 `examples.py`、`fig_ligo.py`。

量	设计文献	本讲计算	公式
$g_1; g_2; g_1g_2$	$g_1g_2 = 0.83$	$-1.065; -0.779; 0.830$	(6.1)
镜面光斑 $w_1; w_2$	5.3 cm; 6.2 cm	5.30 cm; 6.20 cm	(8.6)
束腰 w_0 ; 距 ITM	—	1.20 cm; 1834 m	(8.4)(8.5)
瑞利长度 z_R	—	428 m	(8.5)
单程 Gouy 相位 $\Delta\psi$	—	155.7°	(8.9)
自由光谱区 $c/2L$	—	37.53 kHz	(4.6)
横模间隔 (模 ν_{FSR})	—	5.07 kHz	(8.12)
精细度 $\mathcal{F}$	450	443 (近似式 446)	(4.5)
线宽; 腔极点	—	85 Hz; 42 Hz	(4.7)
腔内功率增益 G	—	281 ($4/T_1 = 286$)	(4.10)
臂腔功率	750 kW	730 kW (入射 2.6 kW)	—

表 3 中, 镜面光斑与 g_1g_2 的计算值与设计值完全一致——这说明 LIGO 的镜面曲率半径正是按照第 8.3 节的公式、为得到指定光斑而选的。几个说明:

- 由于 $g_1, g_2 < 0$, $\Delta\psi = \arccos(-\sqrt{0.83}) = 155.7^\circ > 90^\circ$ 。由式 (8.11), TEM_{10} 比 TEM_{00} 高 $0.865\nu_{\text{FSR}}$, 即比下一个 TEM_{00} 纵模低 $0.135\nu_{\text{FSR}} = 5.07$ kHz。远大于 85 Hz 的线宽, 高阶横模不会与基模同时共振, 臂腔起到“模式过滤”的作用。
- 分束器处 5.2 kW 由两臂平分, 每臂入射 2.6 kW, 乘以增益 281 得 730 kW, 比设计值 750 kW 小 3%。设计文献正是按 75 ppm 往返损耗算出 5.2 kW 与 750 kW 的 [10], 所以差别不来自损耗: 由式 (4.10), 即使臂腔完全无损, $G \leq T_1/(1 - \sqrt{1 - T_1})^2 = 283.7$, 2.6 kW 入射也只有约 738 kW。这 2–3% 的出入属于设计表中 5.2 kW、1.4%、750 kW 等数值的取整, 不宜在 1% 量级上比较。(设计文献另按实测镜面形貌估计往返损耗约 44 ppm, 好于 75 ppm 的目标。)
- 实际运行中, 第三期观测的平均臂腔功率约为 200–240 kW (文献 [13]), 低于设计值, 限制来自热效应与“参量不稳定性”(腔内高阶光学模与镜子的声学振动模通过光压相互放大)等高功率问题, 下面会讨论其中的热透镜。

9.3 光斑尺寸的取舍：热噪声、截断损耗与稳定性边缘

为什么要大光斑 镜面镀膜内部的微观热运动使镜面位置随机起伏（布朗热噪声）。激光读出的是光斑范围内镜面位置的加权平均。粗略地说，若镜面由许多尺度为 ℓ_c 的独立起伏小块组成，光斑覆盖 $\sim (w/\ell_c)^2$ 块，平均后的起伏按 $1/\sqrt{\text{块数}} \propto 1/w$ 减小。Levin 的严格计算 [19] 与 Harry 等对镀膜的分析 [20] 给出同样的结论，设计文献明确说明“镀膜热噪声引起的位移噪声与光斑尺寸成反比” [10]。

大光斑的代价之一：截断损耗 镜面直径 34 cm，半径 $a = 17$ cm。按第 7.2 节，高斯光束落在半径 a 以外的功率比例为 e^{-2a^2/w^2} 。ETM 上 $w_2 = 6.2$ cm 时为 $e^{-15.0} = 2.9 \times 10^{-7}$ ，远小于 75 ppm 的损耗预算；若光斑增大到 9 cm，则为 $e^{-7.1} = 8 \times 10^{-4}$ ，已超出预算十倍。（这只是简单截断的估计，真实的衍射损耗还与镜面边缘的形状有关。）

代价之二：靠近稳定性边缘 对固定的 L 与 λ ，由式 (8.6)，要让两块镜子上的光斑同时远大于共焦腔的 $\sqrt{L\lambda/\pi} = 3.68$ cm，只能 $g_1 g_2 \rightarrow 1$ （只让 $g_1 \rightarrow 0$ 会使 $w_1 \rightarrow \infty$ 而 $w_2 \rightarrow 0$ ；图 10(a)）。LIGO 的 $g_1 g_2 = 0.83$ 就是为此付出的代价：

1. 对曲率半径误差敏感。两镜曲率半径同时增大 50 m (2.5%)， $g_1 g_2$ 从 0.83 降到 0.75，光斑缩小约 9%（图 10(b)）。第 9.4 节会看到，热变形恰好会造成几十米的曲率变化。
2. 对失准敏感。腔的光轴是两镜曲率中心的连线（只有沿这条线，光才垂直打在两镜上并原路返回）。镜 i 绕其顶点转过小角 ϑ_i ，曲率中心横移 $R_i \vartheta_i$ ；新光轴与两镜的交点（光斑中心）随之移动。由几何关系可得（例题 4 推导）

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{L}{1 - g_1 g_2} \begin{pmatrix} g_2 & 1 \\ 1 & g_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

因子 $1/(1 - g_1 g_2)$ 在稳定边缘发散。LIGO 的 $L/(1 - g_1 g_2) = 23.5$ km：ETM 倾斜 1 nrad，ITM 上的光斑就移动 24 μm 。

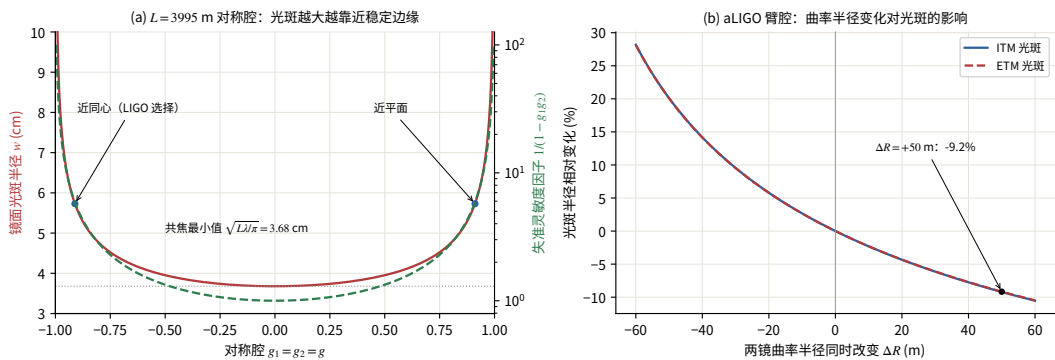


图 10 (a) 臂长 3995 m、 $\lambda = 1064$ nm 的对称腔：镜面光斑（红，左轴）与失准灵敏度因子 $1/(1 - g^2)$ （绿虚线，右轴）随 g 的变化。要得到 LIGO 量级的光斑（约 6 cm）， g 必须接近 ± 1 ；近平面与近同心两种设计光斑相同（蓝点）。(b) 真实的不对称臂腔：两镜曲率半径同时改变 ΔR 时光斑尺寸的相对变化， $\Delta R = +50$ m 使光斑缩小约 9%。

近同心还是近平面 式 (8.6) 只依赖于 $g_1 g_2$ 与 g_2/g_1 , 把 (g_1, g_2) 换成 $(-g_1, -g_2)$ 光斑不变: LIGO 的近同心设计有一个光斑相同的“孪生”近平面设计。设计文献选择近同心, 理由是辐射压力矩 [10, 11]: 光斑偏离镜心时光压 (750 kW 时 $2P/c \approx 5$ mN) 产生力矩, 而式 (9.2) 说明光斑位置又由镜子倾斜决定, 两者构成反馈。例题 4 将算出: 近平面设计中光学刚度大的那个模式是反恢复的, 近同心设计中它是恢复的。

9.4 热透镜

镀膜对 1064 nm 光的吸收虽只有约 0.5 ppm (设计上限; 实测 0.2–0.4 ppm[10]), 乘以 750 kW 的腔内功率, 每块测试质量的高反射面要吸收约 375 mW。热量从镜面中心 (光斑处) 向四周传导, 中心比边缘热; 熔石英的折射率随温度升高 ($dn/dT > 0$), 于是 ITM 基底变成一块中心光程更长的“正透镜”——热透镜。

假设: 热透镜的简化模型

(i) 镜子看作半径无限大、厚度 d_s 的圆柱, 前后两面与外界的辐射换热忽略 (绝热); (ii) 吸收功率 P 按光强的高斯分布 $\frac{2P}{\pi w^2} e^{-2r^2/w^2}$ (单位面积) 沉积, 深度分布任意; (iii) 稳态; (iv) 只考虑折射率随温度的变化 (热光效应), 不考虑热膨胀引起的表面变形与应力双折射。熔石英的热导率 $k_{th} = 1.38$ W/(m·K)[21]; $1 \mu\text{m}$ 附近、室温下 $dn/dT \approx 8 \times 10^{-6}$ K⁻¹ (由 Leviton 与 Frey 的表: $1.0 \mu\text{m}$ 处 275 K 与 300 K 的折射率 1.45066、1.45086 求差分 [22]; aLIGO 文献表 5 对镀膜中的低折射率层 SiO₂ 也取此值 [10]; Vinet 的综述取 1.1×10^{-5} K⁻¹[21], 下面两个值都用)。

推导: 沿厚度积分的温度分布

光经过基底的光程变化只依赖于温度沿厚度的积分 $\Theta(r) \equiv \int_0^{d_s} T(r, z) dz$ 。热量只能沿径向流走 (两端面绝热)。由傅里叶导热定律, 单位面积的径向热流为 $-k_{th} \partial T / \partial r$; 穿过半径 r 、厚 d_s 的圆柱侧面的总热流为 $-2\pi r k_{th} \int_0^{d_s} \partial_r T dz = -2\pi r k_{th} \Theta'(r)$ 。稳态时它等于圆柱内吸收的总功率 (不论吸收发生在哪个深度):

$$\begin{aligned} -2\pi r k_{th} \Theta'(r) &= \int_0^r \frac{2P}{\pi w^2} e^{-2r'^2/w^2} 2\pi r' dr' \\ &= P(1 - e^{-2r^2/w^2}). \end{aligned}$$

(等价地, 可从导热方程 $k_{th} \nabla^2 T = -s$ 沿厚度积分得到。) 所以 $\Theta'(r) = -\frac{P}{2\pi k_{th}} \frac{1 - e^{-2r^2/w^2}}{r}$ 。再从 0 积到 r , 令 $u = 2r'^2/w^2$ ($dr'/r' = du/(2u)$):

$$\begin{aligned} \Theta(0) - \Theta(r) &= \frac{P}{4\pi k_{th}} \text{Ein}\left(\frac{2r^2}{w^2}\right), \\ \text{Ein}(x) &\equiv \int_0^x \frac{1 - e^{-u}}{u} du. \end{aligned} \tag{9.3}$$

$\text{Ein}(x) = x - x^2/4 + \dots$ (小 x), 大 x 时 $\approx \ln x + 0.577$ (附录 E)。

推导：等效焦距

光程（相对于中心）为 $\text{OPD}(r) = \frac{dn}{dT}[\Theta(r) - \Theta(0)]$ 。在轴附近 $\text{Ein}(x) \approx x$ ： $\text{OPD} \approx -\frac{dn}{dT} \frac{P}{4\pi k_{\text{th}}} \frac{2r^2}{w^2}$ 。薄透镜引入的光程是 $-r^2/(2f)$ （第 7.4 节），比较系数得

$$f_{\text{th}} = \frac{\pi k_{\text{th}} w^2}{P (dn/dT)}. \quad (9.4)$$

正号：会聚的正透镜。 f_{th} 与吸收功率成反比、与光斑面积成正比。

检验：与 LIGO 设计文献比较

ITM 上 $w = 5.3 \text{ cm}$, $P = 0.375 \text{ W}$ ： $dn/dT = 8 \times 10^{-6}$ 时 $f_{\text{th}} \approx 4.1 \text{ km}$ ，取 1.1×10^{-5} 时约 3.0 km 。设计文献表 8 给出 375 mW 吸收在测试质量基底中产生的光程畸变（光束直径内峰谷值）为 190 nm [10]。由式 (9.3)，中心到 $r = w$ 的光程差为 $\frac{dn}{dT} \frac{P}{4\pi k_{\text{th}}} \text{Ein}(2)$ ， $\text{Ein}(2) = 1.319$ ，得 230 nm ($dn/dT = 8 \times 10^{-6}$) 或 310 nm (1.1×10^{-5})，与 190 nm 同量级、大 20%–60%。偏大是预料之中的：模型略去了镜子的有限半径（ 34 cm 直径）与端面辐射散热，二者都会减小径向温差。注意若用近轴抛物线外推到 $r = w$ 会得到 $350\text{--}480 \text{ nm}$ ，高估更多（图 11）：热透镜并不是理想透镜，它在光斑边缘偏离抛物线，这部分偏差是像差，无法用一块普通透镜补偿。

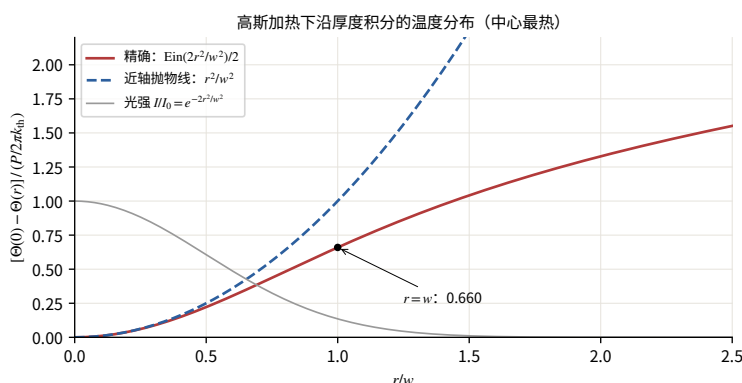


图 11 高斯加热下沿厚度积分的温度分布（式 (9.3)，以 $P/(2\pi k_{\text{th}})$ 为单位）与其近轴抛物线近似。脚本 `fig_thermal.py` 用常微分方程数值积分独立核了解析解，并给出 aLIGO 参数下的数值。

热透镜对 LIGO 的影响要分开看：

- ITM 基底热透镜：臂腔内 750 kW 的光不穿过 ITM 基底（只在其高反射面上反射），所以它主要影响的是穿过 ITM 基底、在功率循环腔与信号循环腔中传播的光——这两个腔的模与臂腔模的匹配被破坏（第 8.7 节）。设计文献指出这是最主要的热畸变 [10]。
- 表面热变形：吸热使镜面中心微微鼓起（热膨胀），设计文献估计未补偿时会使 ITM 与 ETM 的曲率半径增大几十米、光斑缩小约 10% [10]——与图 10(b) 中 $\Delta R = +50 \text{ m}$ 时光斑缩小 9% 的计算一致。光斑变小会增大镀膜热噪声，并降低臂腔与循环腔之间的模式匹配。
- 补偿：环形加热器从镜子侧面加热，产生与吸收热透镜符号相反的折射率分布与表面变形； CO_2 激光照射补偿板，按需要的空间分布“写入”光程修正；波前传感器监测热透镜 [12]。¹

¹Brooks 等给出：环形加热器每瓦约改变 $1 \mu\text{D}$ 的屈光度 ($D = \text{m}^{-1}$)，曲率半径改变 $\Delta R \approx -\Delta S R^2$ ； 40 W 的最

10 决赛风格例题

四道例题都要求在正文没有直接给出的情境中建立模型。数值答案由 `scripts/examples.py` 重算并交叉核对。

例题 1: 固体激光器中的热透镜与“两个稳定区”

二极管侧面泵浦的 Nd:YAG 激光棒 ($\lambda = 1064 \text{ nm}$) 吸收泵浦光后中心变热, 形成热透镜; 把棒看作位于一点的薄透镜, 其光焦度 $x \equiv 1/f$ 与泵浦功率 P_p 成正比: $x = \beta P_p$, 题设 $\beta = 0.05 \text{ m}^{-1}/\text{W}$ 。谐振腔由两块平面镜 M1、M2 组成, 棒距 M1 为 $d_1 = 10 \text{ cm}$, 距 M2 为 $d_2 = 30 \text{ cm}$ 。

1. 写出从 M1 到 M2 的单程矩阵 $\mathbf{H}$ 与从 M2 回到 M1 的单程矩阵 $\mathbf{H}'$, 证明往返矩阵的半迹为 $h = 2(1 - d_1 x)(1 - d_2 x) - 1$, 并由此写出稳定条件。把结果与两镜空腔比较, 说出“等效 g 参数”。
2. 求腔稳定时 x 与 P_p 的取值范围。你会发现有两个稳定区, 证明它们的宽度 (以 x 计) 相等。
3. 以棒所在处 (透镜后、朝 M2 方向) 为参考面, 求基模在棒处的光斑 w_{rod} 。证明: 记 $p_1 \equiv 1/d_1$ 、 $p_2 \equiv 1/d_2$, 有

$$\left(\frac{\lambda}{\pi w_{\text{rod}}^2}\right)^2 = \frac{x(p_1 - x)(p_2 - x)(p_1 + p_2 - x)}{(p_1 + p_2 - 2x)^2}.$$

4. 在每个稳定区内, w_{rod} 随 x 先减后增。求极小值的位置与大小, 证明两个稳定区的极小值相同, 为 $w_{\text{min}} = \sqrt{2\lambda d_2/\pi}$, 与 d_1 无关。在极小值附近工作有什么好处?
5. 想让基模充满半径 2 mm 的激光棒 (取 $w_{\text{rod}} \approx 1.5 \text{ mm}$), 稳定区 (以泵浦功率计) 有多宽? 由此说明“模体积大”与“对泵浦功率不敏感”之间的矛盾。

解答: 例题 1

(1) 按“先经过的写在右边”:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{T}_{d_2} \mathbf{F}_f \mathbf{T}_{d_1} = \begin{pmatrix} 1 - d_2 x & d_1 + d_2 - d_1 d_2 x \\ -x & 1 - d_1 x \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H}' &= \mathbf{T}_{d_1} \mathbf{F}_f \mathbf{T}_{d_2} = \begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

大加热可使 ITM ($R = 1934 \text{ m}$) 的曲率半径改变约 150 m。监测用的哈特曼传感器用小孔阵列板把探测光分成许多细束, 由各细束的偏折测出波前形状。

($\mathbf{H}'$ 只是把 d_1 、 d_2 对调, 即 A 、 D 对调。) 平面镜的矩阵是单位阵, 往返矩阵 $\mathbf{M} = \mathbf{H}'\mathbf{H}$ 。其迹 $= (DA + BC) + (CB + AD) = 2(AD + BC)$ 。由 $\det \mathbf{H} = AD - BC = 1$ 得 $BC = AD - 1$, 故

$$h = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{M} = 2AD - 1 = 2(1 - d_1x)(1 - d_2x) - 1.$$

稳定条件 $-1 \leq h \leq 1$ 即 $0 \leq (1 - d_2x)(1 - d_1x) \leq 1$ 。与两镜空腔的 $h = 2g_1g_2 - 1$ 对比, 可定义等效参数 $g_1^* = 1 - d_2x$ 、 $g_2^* = 1 - d_1x$ 。

(2) 设 $d_1 < d_2$, 即 $p_1 > p_2$ 。 $AD = (1 - x/p_1)(1 - x/p_2) \geq 0$ 要求 $x \leq p_2$ 或 $x \geq p_1$; $AD \leq 1$ 展开为 $x^2/(p_1p_2) - x(p_1 + p_2)/(p_1p_2) \leq 0$, 即 $0 \leq x \leq p_1 + p_2$ 。两者的交集:

$$\text{稳定区 I: } 0 \leq x \leq p_2 = \frac{1}{d_2},$$

$$\text{稳定区 II: } p_1 = \frac{1}{d_1} \leq x \leq p_1 + p_2.$$

两区宽度都是 $p_2 = 1/d_2$ 。数值: 区 I 为 $0-3.33 \text{ m}^{-1}$, 对应 $P_p = 0-66.7 \text{ W}$; 区 II 为 $10.0-13.3 \text{ m}^{-1}$, 对应 $200-267 \text{ W}$; 中间 $66.7-200 \text{ W}$ 腔不稳定, 激光器会熄灭或输出极差 (图 12)。

(3) 以棒处为参考面, 往返依次为: 传播 d_2 、M2、传播 d_2 、透镜、传播 d_1 、M1、传播 d_1 、透镜, $\mathbf{M}_{\text{rod}} = \mathbf{F}_f \mathbf{T}_{2d_1} \mathbf{F}_f \mathbf{T}_{2d_2}$ 。只需右上元素: 逐个相乘得 $B_{\text{rod}} = 2(d_1 + d_2 - 2d_1d_2x)$ 。半迹与参考面无关, 仍为 h 。由式 (8.3), $\frac{\lambda}{\pi w_{\text{rod}}^2} = \frac{\sqrt{1-h^2}}{|B_{\text{rod}}|}$, 而 $1 - h^2 = 4\Pi(1 - \Pi)$, $\Pi \equiv AD$ 。代入 d_i 用 p_1, p_2 表示:

$$\Pi = \frac{(p_1 - x)(p_2 - x)}{p_1p_2}, \quad 1 - \Pi = \frac{x(p_1 + p_2 - x)}{p_1p_2},$$

$$d_1 + d_2 - 2d_1d_2x = \frac{p_1 + p_2 - 2x}{p_1p_2},$$

于是 $\frac{\lambda}{\pi w_{\text{rod}}^2} = \frac{2\sqrt{x(p_1-x)(p_2-x)(p_1+p_2-x)/(p_1p_2)}}{2|p_1+p_2-2x|/(p_1p_2)}$, 平方即得所证。(薄透镜两侧光斑相同, 所以“透镜后”的参考面给出的就是棒内光斑。)

(4) 关键的一步是注意到 $x(p_1 + p_2 - x)$ 与 $(p_1 - x)(p_2 - x)$ 都只依赖于 $s \equiv x(p_1 + p_2 - x)$: $(p_1 - x)(p_2 - x) = p_1p_2 - s$, $(p_1 + p_2 - 2x)^2 = (p_1 + p_2)^2 - 4s$ 。所以

$$\left(\frac{\lambda}{\pi w_{\text{rod}}^2}\right)^2 = F(s) \equiv \frac{s(p_1p_2 - s)}{(p_1 + p_2)^2 - 4s}.$$

s 关于 $x \leftrightarrow p_1 + p_2 - x$ 对称, 这就解释了两个稳定区的“镜像”关系: 区 I 的 x 与区 II 的 $p_1 + p_2 - x$ 给出相同的光斑。求 w_{rod} 的极小即求 F 的极大。 $F'(s) = 0$ 给出 (分子求导后化简)

$$4s^2 - 2(p_1 + p_2)^2s + p_1p_2(p_1 + p_2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow s_* = \frac{(p_1 + p_2)^2 - (p_1 + p_2)(p_1 - p_2)}{4} = \frac{p_2(p_1 + p_2)}{2}$$

(另一根 $s = p_1(p_1 + p_2)/2 > p_1p_2$, 不在稳定区内: 区 I 中 $s \leq p_2 \cdot p_1$)。代回: $p_1p_2 - s_* = p_2(p_1 - p_2)/2$, $(p_1 + p_2)^2 - 4s_* = (p_1 + p_2)(p_1 - p_2)$, 所以

$$F(s_*) = \frac{p_2(p_1 + p_2)/2 \cdot p_2(p_1 - p_2)/2}{(p_1 + p_2)(p_1 - p_2)} = \frac{p_2^2}{4},$$

$$\frac{\lambda}{\pi w_{\text{min}}^2} = \frac{p_2}{2}, \quad w_{\text{min}} = \sqrt{\frac{2\lambda d_2}{\pi}}.$$

数值 $w_{\min} = 0.451 \text{ mm}$ 。极小点由 $x(p_1 + p_2 - x) = p_2(p_1 + p_2)/2$ 解出：区 I 中 $x_* = \frac{(p_1 + p_2) - \sqrt{(p_1 + p_2)(p_1 - p_2)}}{2} = 1.95 \text{ m}^{-1}$ ($P_p = 39.1 \text{ W}$)，区 II 中 $x_* = p_1 + p_2 - 1.95 = 11.38 \text{ m}^{-1}$ (227.6 W)。脚本用数值求自洽 q 的方法独立得到同样的位置与 $w_{\min}$ (相对差 $< 10^{-5}$)。在极小点， $dw_{\text{rod}}/dP_p = 0$ ：泵浦功率 (从而热透镜) 的起伏只在二阶上改变棒内光斑，输出模式稳定。这样的工作点称为“动态稳定” [23]。

(5) 由 (4)， $w_{\min}^2 \cdot \Delta x = \frac{2\lambda}{\pi}$ ，其中 $\Delta x = p_2$ 是稳定区宽度。要 $w_{\min} = 1.5 \text{ mm}$ ，需 $\Delta x = \frac{2\lambda}{\pi w_{\min}^2} = 0.30 \text{ m}^{-1}$ (即 $d_2 = 3.3 \text{ m}$ 的长腔)，对应泵浦功率范围只有 $\Delta x/\beta = 6.0 \text{ W}$ 。模体积越大，稳定的泵浦功率范围越窄： $w_{\min}^2$ 与稳定区宽度的乘积是一个只依赖波长的常数。这是设计大功率基模固体激光器的核心矛盾。

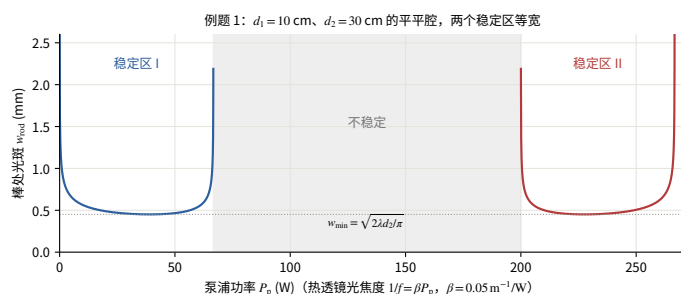


图 12 例题 1：棒处基模光斑随泵浦功率的变化 (由往返矩阵数值求自洽 q ，与 (3) 的闭式逐点一致)。两个稳定区等宽，极小值都等于 $\sqrt{2\lambda d_2/\pi} = 0.451 \text{ mm}$ 。

例题 2：把激光模式匹配进参考腔

一台 1064 nm 激光器的输出光束在某处有束腰 $w_1 = 0.20 \text{ mm}$ 。要把它耦合进一个平凹参考腔：输入镜为平面镜 (基底厚度忽略)，另一块镜曲率半径 $R = 50 \text{ cm}$ ，腔长 $L = 20 \text{ cm}$ 。

1. 求腔的基模束腰 w_0 及其位置。
2. 用一块 $f = 25 \text{ cm}$ 的透镜做模式匹配。求透镜到激光束腰的距离 d_1 与到平面镜的距离 d_2 。式 (8.15) 的两组解是否都可用？
3. 若透镜沿光轴装偏了 1 cm (向腔的方向)，匹配效率降为多少？由此评价这种匹配对装调的要求。
4. 若手边只有 $f = 15 \text{ cm}$ 的透镜，能否完全匹配？在只用这一块透镜的条件下，最多能把多少比例的功率耦合进 TEM_{00} ？
5. 扫描腔长观察透射，除 TEM_{00} 的峰外还看到一些小峰。若小峰出现在距 TEM_{00} 峰 $0.218 \nu_{\text{FSR}}$ 处，问题更可能出在光斑大小/束腰位置不匹配，还是光束偏离或倾斜？若出现在 $0.436 \nu_{\text{FSR}}$ 处呢？说明理由。

解答：例题 2

(1) 平凹腔 $g_1 = 1, g_2 = 1 - L/R = 0.6$ 。由第 8.3 节的 (v)：束腰在平面镜上， $z_R = \sqrt{L(R - L)} = \sqrt{0.2 \times 0.3} = 0.245 \text{ m}$ ， $w_0 = \sqrt{\lambda z_R/\pi} = 288 \mu\text{m}$ 。(与通用公式 (8.5) 交叉核对一致。)

(2) $f_0 = \pi w_1 w_0 / \lambda = \pi \times 0.20 \times 10^{-3} \times 288 \times 10^{-6} / (1.064 \times 10^{-6}) = 0.170 \text{ m} < f$, 可以匹配。
 $\sqrt{f^2 - f_0^2} = 0.183 \text{ m}$ 。由式 (8.15):

$$(+): d_1 = 0.25 + \frac{0.20}{0.288} \times 0.183 = 0.377 \text{ m},$$

$$d_2 = 0.25 + \frac{0.288}{0.20} \times 0.183 = 0.514 \text{ m};$$

$$(-): d_1 = 0.123 \text{ m}, \quad d_2 = -0.014 \text{ m}.$$

第二组 $d_2 < 0$, 意味着透镜要放在平面镜之后 (腔内), 不可用。所以透镜放在激光束腰后 37.7 cm、平面镜前 51.4 cm。脚本用 ABCD 定律从 $q = -i\pi w_1^2 / \lambda$ 出发验证: 到达平面镜时 $q = -iz_R$, 精确吻合。

(3) 透镜向腔移 1 cm: $d'_1 = 0.387 \text{ m}$, $d'_2 = 0.504 \text{ m}$ 。用式 (7.11)、(7.12) 重算: 像方束腰 $276 \mu\text{m}$, 位于平面镜后 7.8 mm。代入式 (8.14) ($w_1 \rightarrow 276 \mu\text{m}$, $w_2 \rightarrow 288 \mu\text{m}$, $\Delta = 7.8 \text{ mm}$, $\lambda\Delta / (\pi w_1 w_2) = 0.033$): $\eta = 0.998$ 。1 cm 的装调误差只损失 0.2%: 匹配对透镜纵向位置的要求很宽松, 原因是两个束腰都很“长” (z_R 分别为 12 cm 与 24.5 cm)。实际中更苛刻的是横向对准: 由第 8.7 节, 横向错开 Δx 时 $\eta = e^{-\Delta x^2 / w_0^2}$, 错开 $0.1w_0 = 29 \mu\text{m}$ 就损失 1%。

(4) $f_0 = 0.170 \text{ m} > 0.15 \text{ m}$, 式 (8.15) 无实数解, 不能完全匹配。物理原因: 由式 (7.12), $w_{02} = \frac{w_1 f}{\sqrt{(d_1 - f)^2 + z_{R1}^2}} \leq \frac{w_1 f}{z_{R1}} = \frac{\lambda f}{\pi w_1} = 254 \mu\text{m}$, 等号在 $d_1 = f$ (激光束腰放在透镜前焦点) 时取得——这块透镜造出的束腰不可能达到 $288 \mu\text{m}$ 。取这个最大束腰, 并把它放在平面镜上 (d_2 由式 (7.11) 得 $d_2 = f$, 即平面镜放在透镜后焦面), $\eta = 4 / (254/288 + 288/254)^2 = 0.984$ 。脚本对 (d_1, d_2) 作二维数值优化, 确认这就是单块 $f = 15 \text{ cm}$ 透镜能达到的最大值。要完全匹配, 可以先用一对透镜扩束, 再聚焦。

(5) 平凹腔 $\Delta\psi = \arccos \sqrt{0.6} = 39.2^\circ$, 横模间隔 $\Delta\psi / \pi = 0.218 \nu_{\text{FSR}}$ ($\nu_{\text{FSR}} = c/2L = 750 \text{ MHz}$, 即 164 MHz)。所以 $0.218 \nu_{\text{FSR}}$ 处的峰属于 $m + n = 1$ (TEM_{10} 、 TEM_{01}), $0.436 \nu_{\text{FSR}}$ 处属于 $m + n = 2$ 。哪些模被激发, 取决于入射场在各模上的投影 (式 (8.13)): 光斑大小或束腰位置失配、但光束与腔轴同轴时, 入射场关于 x 、 y 都是偶函数, 与 $m + n$ 为奇数的模 (至少在一个方向为奇函数) 的投影为零, 所以只激发 $m + n = 2, 4, \dots$; 光束横向偏离 Δx 时, $e^{-(x-\Delta x)^2 / w^2}$ 的一阶展开项 $\propto x e^{-x^2 / w^2}$ 正是 TEM_{10} 的形状, 倾斜同理, 所以失准首先激发 $m + n = 1$ 。结论: $0.218 \nu_{\text{FSR}}$ 处的峰提示失准, $0.436 \nu_{\text{FSR}}$ 处的峰提示尺寸/位置失配。

例题 3: 不理想的共焦扫描干涉仪

共焦扫描干涉仪 (第 8.6 节) 由两块凹面镜组成, 功率反射率 $r^2 = 0.99$ (无损耗, 精细度 $\mathcal{F} = 313$), 压电陶瓷微调腔长 L 。理想情形 $R_1 = R_2 = R = 5.0 \text{ cm}$ 、 $L = R$ 。实际买到的一对镜子 $R_1 = 50.0 \text{ mm}$, $R_2 = 50.4 \text{ mm}$ (相差 0.8%, 记 $\Delta R \equiv R_2 - R_1$)。要求: 入射光不经模式匹配, 各阶横模 ($m + n \leq n_{\perp, \text{max}} = 10$) 的透射峰仍落在一个线宽之内, 透射峰的位置才与入射光形状无关。

1. 证明此时不存在“共焦”腔长, 并求在 $L \approx R$ 附近腔长在什么范围内腔不稳定。
2. 设 $L = R_1 - s$ ($0 < s \ll R_1$)。用 $g_1 g_2$ (不要用对称腔的近似) 求 $m + n = n_{\perp}$ 的模组相对于理想简并位置 (TEM_{00} 之上 $n_{\perp}/2$ 个 ν_{FSR}) 的偏移, 进而求满足要求的 s 范围。 L 在 R_2 之外一侧呢?

3. 与理想镜对 ($R_1 = R_2$) 的可用腔长范围比较。若要求每个可用窗口至少宽 $25 \mu\text{m}$, 两镜曲率半径之差最多允许多少?

解答: 例题 3

(1) 共焦要求 $g_1 = g_2 = 0$, 即 $L = R_1$ 且 $L = R_2$, $R_1 \neq R_2$ 时做不到。 $R_1 < L < R_2$ 时 $g_1 = 1 - L/R_1 < 0$, $g_2 = 1 - L/R_2 > 0$, $g_1 g_2 < 0$, 落在稳定性图的第二、四象限: 腔不稳定。这一段宽 $\Delta R = 0.4 \text{ mm}$ ——正是理想共焦点所在之处。(远离 R 处, $L > R_1 + R_2$ 时 $g_1 g_2 > 1$, 腔也不稳定, 这与本题无关。)

(2) $L = R_1 - s$: $g_1 = s/R_1$, $g_2 = 1 - \frac{R_1 - s}{R_2} = \frac{\Delta R + s}{R_2}$, 两者都为正, 且精确地有

$$g_1 g_2 = \frac{s(\Delta R + s)}{R_1 R_2}.$$

由式 (8.11), $\Delta\psi = \arccos \sqrt{g_1 g_2} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{g_1 g_2} \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{g_1 g_2}$, 所以 $m + n = n_\perp$ 的模组在 TEM_{00} 之上

$$n_\perp \frac{\Delta\psi}{\pi} \nu_{\text{FSR}} = \left(\frac{n_\perp}{2} - \frac{n_\perp \sqrt{g_1 g_2}}{\pi} \right) \nu_{\text{FSR}},$$

相对理想简并位置偏移 $n_\perp \sqrt{g_1 g_2} \nu_{\text{FSR}} / \pi$ 。要求它小于线宽 $\nu_{\text{FSR}} / \mathcal{F}$ ($n_\perp \leq n_{\perp, \text{max}}$):

$$\sqrt{g_1 g_2} < \frac{\pi}{n_{\perp, \text{max}} \mathcal{F}} = 1.00 \times 10^{-3},$$

$$s(\Delta R + s) < R_1 R_2 \left(\frac{\pi}{n_{\perp, \text{max}} \mathcal{F}} \right)^2 = 2.53 \times 10^{-9} \text{ m}^2.$$

解这个二次不等式得 $s < 6.27 \mu\text{m}$ ($s \ll \Delta R$ 时近似为 $R_1 R_2 (\pi / n_{\perp, \text{max}} \mathcal{F})^2 / \Delta R = 6.36 \mu\text{m}$)。即可用窗口为 $R_1 - 6.27 \mu\text{m} < L < R_1$; 再往短处, 各阶模分开; 越过 R_1 进入不稳定区。注意窗口紧贴稳定边界 $g_1 = 0$: $L \rightarrow R_1$ 时 $g_1 \rightarrow 0$ 而 g_2 不为零, 镜 1 上的光斑 $w_1 \rightarrow \infty$ (第 8.2 节要点)。 $L = R_2 + s'$ 一侧: $g_2 = -s'/R_2$, $g_1 = -\frac{\Delta R + s'}{R_1}$, 两者都为负, $\Delta\psi = \arccos(-\sqrt{g_1 g_2}) \approx \frac{\pi}{2} + \sqrt{g_1 g_2}$, 模组向另一方向偏移, 由同样的二次不等式得到宽 $6.27 \mu\text{m}$ 的窗口 $R_2 < L < R_2 + 6.27 \mu\text{m}$ 。脚本用精确的 $\arccos$ 在窗口边缘核对: $n_\perp = 10$ 模组的偏移恰为 1.00 个线宽。

(3) 理想镜对: $\Delta R = 0$, 上式变为 $s^2 < R^2 (\pi / n_{\perp, \text{max}} \mathcal{F})^2$, 即 $|L - R| < \pi R / (n_{\perp, \text{max}} \mathcal{F}) = 50 \mu\text{m}$, 可用范围是以 $L = R$ 为中心、宽约 $100 \mu\text{m}$ 的一整段。不等镜对把它劈成两段, 各宽约 $6 \mu\text{m}$, 中间隔着 0.4 mm 的不稳定区。要窗口宽度 $s_{\text{max}} \geq 25 \mu\text{m}$, 由 $s_{\text{max}}(\Delta R + s_{\text{max}}) = R_1 R_2 (\pi / n_{\perp, \text{max}} \mathcal{F})^2$ 解出

$$\Delta R \leq \frac{R_1 R_2 (\pi / n_{\perp, \text{max}} \mathcal{F})^2}{25 \mu\text{m}} - 25 \mu\text{m} \approx 0.076 \text{ mm}$$

(约 0.15%; 此时 $s_{\text{max}} / \Delta R \approx 1/3$, 不能再用 $s \ll \Delta R$ 的近似——若用近似会得到 0.1 mm , 而 $\Delta R = 0.1 \text{ mm}$ 时窗口实际只有 $20.9 \mu\text{m}$)。所以共焦扫描干涉仪的两块镜子必须“配对”加工。

例题 4: LIGO 臂腔的辐射压力矩与角向失稳

Advanced LIGO 臂腔参数与表 3 的计算值 ($g_1 = -1.065$, $g_2 = -0.779$) 作为已知; 测试质量为 40 kg 的熔石英圆柱 (直径 34 cm 、厚 20 cm)。

1. 镜 i 绕其顶点转过小角 ϑ_i (约定: 镜面指向腔内的法线向 $+x$ 偏转为正), 推导两镜上光

斑中心的位移式 (9.2)。ETM 倾斜 1 nrad 时两镜上的光斑各移动多少？

- 腔内功率 P 的光在镜面上反射，对镜子施加压力 $2P/c$ ，作用点在光斑中心。证明光压对两镜的力矩可写成 $\tau = \frac{2P}{c} \mathbf{S} \boldsymbol{\vartheta}$ ($\mathbf{S}$ 为式 (9.2) 中的矩阵)，即“光学角刚度矩阵” $\mathbf{K} = -\frac{2P}{c} \mathbf{S}$ 。求 $P = 750 \text{ kW}$ 时 $\mathbf{K}$ 的两个本征值，说明哪个模式是恢复的、哪个是反恢复的。(光学刚度为负的本征模式称为“软模”，另一个称为“硬模”。)
- 悬挂系统对每块镜提供机械恢复力矩 $-\kappa_m \vartheta_i$ 。设计文献指出：腔内功率超过约 700 kW 时，光学力矩超过悬挂的机械恢复力矩，“软模”失稳 [10]。据此估计 κ_m ；求 750 kW 时软模的失稳增长时间（量级）与对应频率，以及硬模的振动频率。
- LIGO 也可以选用光斑相同的“近平面”设计 $(g_1, g_2) \rightarrow (-g_1, -g_2)$ 。求其镜面曲率半径与光学角刚度，说明为什么设计者选择近同心腔。

解答：例题 4

(1) 腔的光轴必须垂直于两个镜面，而球面的法线都通过其曲率中心，所以光轴就是两曲率中心 C_1 、 C_2 的连线。取镜 1 顶点为原点、腔轴为 z 。未倾斜时 $C_1 = (R_1, 0)$ ， $C_2 = (L - R_2, 0)$ (坐标写作 (z, x))；LIGO 中 C_1 、 C_2 都在腔中部附近)。镜 1 绕顶点转 ϑ_1 ，其法线（顶点指向曲率中心的方向）转同一角度， $C_1 \rightarrow (R_1, R_1 \vartheta_1)$ ；同理 $C_2 \rightarrow (L - R_2, R_2 \vartheta_2)$ (一阶小量)。过这两点的直线在 $z = 0$ 、 $z = L$ 处的 x 坐标为

$$\begin{aligned} x_1 &= R_1 \vartheta_1 + (0 - R_1) \frac{R_2 \vartheta_2 - R_1 \vartheta_1}{L - R_2 - R_1}, \\ x_2 &= R_1 \vartheta_1 + (L - R_1) \frac{R_2 \vartheta_2 - R_1 \vartheta_1}{L - R_2 - R_1}. \end{aligned}$$

(光斑落在镜面上的位置与 $z = 0$ 、 $z = L$ 处只差二阶小量。) 以 x_1 为例，通分得

$$x_1 = \frac{R_1(L - R_2)\vartheta_1 - R_1 R_2 \vartheta_2}{L - R_1 - R_2}.$$

代入 $R_i = L/(1 - g_i)$ ： $L - R_2 = -\frac{Lg_2}{1 - g_2}$ ， $L - R_1 - R_2 = -\frac{L(1 - g_1 g_2)}{(1 - g_1)(1 - g_2)}$ ， $R_1 R_2 = \frac{L^2}{(1 - g_1)(1 - g_2)}$ 。分子分母中的 $(1 - g_1)(1 - g_2)$ 相消：

$$x_1 = \frac{L(g_2 \vartheta_1 + \vartheta_2)}{1 - g_1 g_2}, \quad \text{同理} \quad x_2 = \frac{L(\vartheta_1 + g_1 \vartheta_2)}{1 - g_1 g_2},$$

即式 (9.2) (sympy 核对见 `verify_sympy.py`；脚本 `examples.py` 还用直线与球面的精确交点做了数值核对)。 $\frac{L}{1 - g_1 g_2} = 23.5 \text{ km}$ ，ETM 倾斜 $\vartheta_2 = 1 \text{ nrad}$ ： $x_1 = 23.5 \mu\text{m}$ ， $x_2 = g_1 \times 23.5 \mu\text{m} = -25.1 \mu\text{m}$ 。

(2) 镜 1 在 $z = 0$ ，光压把它推向 $-z$ ，力 $F = 2P/c$ 作用在 $(0, x_1)$ 。若 $x_1 > 0$ ，镜面上方被推向 $-z$ ，镜面绕顶点转动，使其指向腔内的法线向 $+x$ 偏——正是 ϑ_1 增大的方向。所以以 ϑ_1 的正方向计，力矩 $\tau_1 = +\frac{2P}{c} x_1$ 。对镜 2 同理（镜面被推向 $+z$ ， $x_2 > 0$ 使其法线向 $+x$ 偏）： $\tau_2 = +\frac{2P}{c} x_2$ 。代入式 (9.2)：

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{2P}{c} \mathbf{S} \boldsymbol{\vartheta} \equiv -\mathbf{K} \boldsymbol{\vartheta}, \quad \mathbf{S} = \frac{L}{1 - g_1 g_2} \begin{pmatrix} g_2 & 1 \\ 1 & g_1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{K}$ 的本征值为正表示恢复力矩（像弹簧），为负表示反恢复（“负刚度”，会把偏转放大）。 $\begin{pmatrix} g_2 & 1 \\ 1 & g_1 \end{pmatrix}$ 的本征值 $\mu_{\pm} = \frac{(g_1+g_2) \pm \sqrt{(g_1-g_2)^2+4}}{2}$ ，乘积 $\mu_+\mu_- = g_1g_2 - 1 < 0$ ：总是一正一负，任何两镜腔都有一个反恢复模式。LIGO: $\mu_+ = 0.0879$, $\mu_- = -1.933$ ；乘以 $\frac{L}{1-g_1g_2} = 23.5 \text{ km}$ 与 $\frac{2P}{c} = 5.00 \times 10^{-3} \text{ N}$ ，得

$$K_{\text{hard}} = +227.5 \text{ N} \cdot \text{m/rad} \text{ (恢复),}$$

$$K_{\text{soft}} = -10.3 \text{ N} \cdot \text{m/rad} \text{ (反恢复).}$$

近同心腔 ($g_1 + g_2 < 0$) 中，绝对值大的“硬”模式是恢复的，只有一个弱的反恢复（“软”）模式。

(3) 加上悬挂：每块镜受机械恢复力矩 $-\kappa_m \vartheta_i$ ，总角刚度矩阵为 $\kappa_m \mathbf{I} + \mathbf{K}$ 。单位矩阵不改变本征矢，所以两个模式的总刚度为 $\kappa_m + K_{\text{hard}}$ 与 $\kappa_m + K_{\text{soft}}$ ，而 $K_{\text{soft}} = -\frac{2P}{c} \frac{L\mu_+}{1-g_1g_2} \propto P$ 。软模的总刚度在 $P_c = \frac{\kappa_m c(1-g_1g_2)}{2L\mu_+}$ 处过零。由文献的 $P_c \approx 700 \text{ kW}$ 反推： $\kappa_m = \frac{2P_c}{c} \cdot \frac{L\mu_+}{1-g_1g_2} = 4.67 \times 10^{-3} \text{ N} \times 2067 \text{ m/rad} = 9.7 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$ 。在 750 kW 时软模总刚度 $9.65 - 10.34 = -0.69 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$ 。镜子绕水平横轴的转动惯量（圆柱，半径 $a = 0.17 \text{ m}$ 、厚 $d = 0.20 \text{ m}$ ） $I = \frac{m}{12}(3a^2 + d^2) = 0.42 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。运动方程 $I\ddot{\vartheta} = +0.69\vartheta$ 的解按 $e^{t/\tau}$ 增长， $1/\tau = \sqrt{0.69/0.42} \approx 1.3 \text{ s}^{-1}$ ，即增长时间 $\tau \approx 0.8 \text{ s}$ 、对应频率约 0.2 Hz 。这个数只能取量级 ($1/\tau \sim 1 \text{ s}^{-1}$)：净刚度是两个相近量之差， $1/\tau \propto \sqrt{750/P_c - 1}$ ， P_c 在 $650-740 \text{ kW}$ 之间变化时 $1/\tau$ 在 $1.8-0.6 \text{ s}^{-1}$ 之间变化。正因如此，阈值附近的软模失稳增长很慢，用低带宽控制就能镇住；文献也说不稳定本征频率在满功率下低于 0.3 Hz [10]——这与我们的结果相容，但由于 κ_m 本身是用同一文献的 700 kW 反推的，它不是独立检验。作为对照，硬模总刚度 $237 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$ ，频率 $\frac{1}{2\pi} \sqrt{237/0.42} = 3.8 \text{ Hz}$ ，而单纯悬挂的为 0.76 Hz ：光压把硬模“撑硬”了约 25 倍。

(4) 取 $g'_i = -g_i$ ： $R'_i = L/(1 - g'_i) = L/(1 + g_i)$ ，得 $R'_1 = -61.1 \text{ km}$ （微凸）， $R'_2 = 18.1 \text{ km}$ 。由式 (8.6) 光斑不变。此时 $\begin{pmatrix} -g_2 & 1 \\ 1 & -g_1 \end{pmatrix}$ 的本征值为 $-\mu_{\mp}$ ，即 $+1.933$ 与 -0.0879 ，光学角刚度变为 -227.5 与 $+10.3 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$ ：强的那个模式反恢复，需要很强的角度控制才能维持。这就是设计文献所说的“近同心设计中光学刚度较大的扭转模式静态稳定，而近平面设计中它静态不稳定”[10, 11]。

11 实验与数据处理：刀口法测光束参数与 M^2

例题：实验题（笔试型，模拟数据）

装置一台 660 nm 半导体激光器的输出经透镜聚焦。一片刀片装在千分尺平移台上，可沿横向 x 推进并逐渐挡住光束；刀片后面放一个大面积光电二极管，测量透过的功率 P （已扣除暗电流本底，并用不挡光时的功率 P_0 归一化；读数噪声约 $0.01P_0$ ，与 P 无关）。整套刀口-探测器装在导轨上，可沿光轴 z 移动。这种“刀口法”是测量光斑尺寸的经典方法 [24, 25]。

数据表 4 是 $z = 118.0 \text{ mm}$ 处的一次完整扫描；表 6 是在 16 个位置上分别扫描、用“10%–90% 法”（见第 (1) 问）得到的光束半径 w 。表 6 的每个位置都按约 $w/8$ 的步长扫描 41 点（步长随光斑大小调整），用相邻两点线性插值求透过率为 90% 与 10% 的刀口位置， $w = d_{10-90}/1.2816$ 。

两表均为模拟数据：由脚本 `scripts/exp_data.py` 按上述测量过程生成，随机种子 20261017 在生成前固定、未挑选。表 5 给出误差函数的数值，供求反函数时插值。

问题

1. 设光束在 x 方向的强度分布（对 y 积分后）为高斯型 $\propto e^{-2(x-x_c)^2/w^2}$ 。刀口推进到 x 处挡住 $x' < x$ 的部分。证明透过率

$$\frac{P(x)}{P_0} = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(x-x_c)}{w} \right) \right],$$

$$\operatorname{erf}(s) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-t^2} dt,$$

并证明透过率从 90% 降到 10% 时刀口移动的距离 $d_{10-90} = 1.2816 w$ 。

2. 把表 4 的数据线性化，用最小二乘求 w 与光束中心 x_c 及其不确定度。哪些点应当舍去或降低权重？与同一组数据的 10%-90% 法结果比较。
3. 对理想高斯光束， w^2 是 z 的二次函数。由表 6 用线性最小二乘求束腰 w_0 、束腰位置 z_0 、瑞利长度 z_R 与光束质量因子 M^2 （式 (7.15)）。说明你的线性化方法与权重的选择。
4. 估计 (3) 中各量的不确定度。拟合系数之间的相关性对结果有多大影响？怎样减小这种相关性？
5. 讨论系统误差：(a) 若光束不是纯基模（例如含少量高阶模），10%-90% 法给出的宽度 w_{ke} 与二阶矩宽度 W （式 (7.14)）不同。设比值 $\gamma \equiv w_{ke}/W$ 不随 z 变，(3) 中哪些结果会偏、偏多少？(b) 再列举至少三种系统误差来源与改进办法。

表 4 $z = 118.0 \text{ mm}$ 处的刀口扫描（模拟数据）。 x 为千分尺读数， P/P_0 为归一化透过功率。

x/mm	P/P_0	x/mm	P/P_0	x/mm	P/P_0	x/mm	P/P_0
2.400	1.008	2.520	0.927	2.640	0.235	2.760	-0.012
2.420	1.001	2.540	0.874	2.660	0.134	2.780	-0.013
2.440	0.977	2.560	0.773	2.680	0.071	2.800	0.003
2.460	1.000	2.580	0.645	2.700	0.027		
2.480	0.986	2.600	0.506	2.720	0.022		
2.500	0.980	2.620	0.366	2.740	0.004		

表 5 误差函数 $\operatorname{erf}(s)$ 的数值 ($\operatorname{erf}(-s) = -\operatorname{erf}(s)$)。

s	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
erf	0.0000	0.1125	0.2227	0.3286	0.4284	0.5205	0.6039	0.6778	0.7421
s	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	
erf	0.7969	0.8427	0.8802	0.9103	0.9340	0.9523	0.9661	0.9763	

表 6 各位置上用 10%–90% 法得到的光束半径（模拟数据）。 z 为导轨读数。

z/mm	$w/\mu\text{m}$	z/mm	$w/\mu\text{m}$	z/mm	$w/\mu\text{m}$	z/mm	$w/\mu\text{m}$
70.0	185	86.0	99	102.0	51	118.0	106
74.0	153	90.0	76	106.0	56	122.0	128
78.0	137	94.0	64	110.0	71	126.0	146
82.0	116	98.0	55	114.0	87	130.0	170

解答：实验题

(1) 透过功率是 $x' > x$ 部分的积分： $P/P_0 = \int_x^\infty e^{-2(x'-x_c)^2/w^2} dx' / \int_{-\infty}^\infty e^{-2(x'-x_c)^2/w^2} dx'$ 。令 $t = \sqrt{2}(x' - x_c)/w$ ，分母为 $\frac{w}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$ ，分子为 $\frac{w}{\sqrt{2}} \int_s^\infty e^{-t^2} dt = \frac{w}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \text{erf}(s)]$ ， $s = \sqrt{2}(x - x_c)/w$ 。相除即得。 $P/P_0 = 0.9$ 与 0.1 分别对应 $\text{erf}(s) = -0.8$ 与 $+0.8$ ，即 $s = \mp \text{erf}^{-1}(0.8) = \mp 0.9062$ ；两点相距 $\Delta s = 1.8124$ ，换回 x ： $d_{10-90} = \frac{w}{\sqrt{2}} \times 1.8124 = 1.2816 w$ 。

(2) 由 (1)， $Y \equiv \text{erf}^{-1}(1 - 2P/P_0) = \frac{\sqrt{2}}{w}x - \frac{\sqrt{2}x_c}{w}$ 是 x 的线性函数，斜率 $k_1 = \sqrt{2}/w$ 。两端 $P/P_0 \rightarrow 0$ 或 1 的点： erf^{-1} 在 ± 1 附近发散， $0.01P_0$ 的噪声会被放大成巨大的 Y 误差，甚至使 $1 - 2P/P_0$ 超出 $(-1, 1)$ （如 $P/P_0 = 1.008$ 或 -0.012 ）；所以只用 $0.05 < P/P_0 < 0.95$ 的 9 个点，并按误差传递给权重： $\sigma_Y = |dY/dP| \sigma_P = \sqrt{\pi} e^{Y^2} \times 0.01$ 。加权直线拟合（公式见附录 F）得

$$k_1 = (1.303 \pm 0.023) \times 10^4 \text{ m}^{-1},$$

$$w = \frac{\sqrt{2}}{k_1} = 108.6 \pm 1.9 \mu\text{m},$$

$$x_c = 2.6007 \pm 0.0006 \text{ mm}, \quad \chi^2 = 1.0 \ (\nu = 7).$$

(Y 值由表 5 线性插值求反函数得到，插值误差 $\lesssim 0.003$ ，小于噪声引起的 $\sigma_Y \geq 0.018$ ；用查表值拟合得 $w = 108.4 \mu\text{m}$ ，与用精确反函数的 $108.6 \mu\text{m}$ 相差 0.1σ ，以下用后者。) $\chi^2 = 1.0$ 对 7 个自由度偏小（期望 7 ± 3.7 ，见附录 F）： χ^2 分布给出 $P(\chi^2 \leq 1.02) \approx 0.5\%$ 。种子是事先固定、未挑选的，所以这要么是一次少见的涨落，要么说明误差模型高估了 σ_Y ——例如 $0.01P_0$ 是“读数噪声上限”而非标准差。两种情况下，按已知噪声给出的 $\pm 1.9 \mu\text{m}$ 都是偏保守的上限；若改用残差估计（乘 $\sqrt{\chi^2/\nu} = 0.38$ ）会得到 $\pm 0.7 \mu\text{m}$ ，但只有 7 个自由度时，残差本身的估计也很不可靠（相对误差约 $1/\sqrt{2\nu} \approx 27\%$ ）。同一组数据用线性插值找 10% 与 90% 点： $d_{10-90} = 140.6 \mu\text{m}$ ， $w = 109.7 \mu\text{m}$ ，与上面相差 0.6σ 。表 6 中同一位置的另一次扫描给出 $106 \mu\text{m}$ ，差 1.4σ ，在统计涨落之内。图 13(a) 显示线性化后的数据确实落在直线上。

(3) 由式 (7.15)， $w^2 = W_0^2 + \Theta_0^2(z - z_0)^2$ 是 z 的二次多项式。关键的观察是：它对未知系数是线性的。为减小系数间的相关性（见 (4)），以表的中部 $z_c = 100 \text{ mm}$ 为参考点，令 $u = z - z_c$ ，拟合

$$w^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2.$$

权重：10%–90% 法得到的 w 的误差大致与 w 成正比（扫描步长与 w 成比例，噪声的影响按相对量计），故设 $\sigma_w = \varepsilon_r w$ ， $\sigma_{w^2} = 2w\sigma_w = 2\varepsilon_r w^2$ ，权 $\propto 1/w^4$ ； ε_r 未知，由拟合残差估计

($\varepsilon_r = \sqrt{\chi^2/\nu}$, 此处 $\nu = 16 - 3 = 13$)。加权线性最小二乘得

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= (2.585 \pm 0.068) \times 10^{-9} \text{ m}^2, \\ \alpha_1 &= (-6.33 \pm 0.81) \times 10^{-8} \text{ m}, \\ \alpha_2 &= (3.042 \pm 0.055) \times 10^{-5}, \quad \varepsilon_r = 2.2\%.\end{aligned}$$

配方: $\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 = \alpha_2(u - u_0)^2 + (\alpha_0 - \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2})$, $u_0 = -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}$ 。与式 (7.15) 逐项对照:

$$\begin{aligned}z_0 &= z_c - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}, \quad W_0^2 = \alpha_0 - \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2}, \\ \Theta_0 &= \sqrt{\alpha_2}, \quad z_R = \frac{W_0}{\Theta_0}, \quad M^2 = \frac{\pi W_0 \Theta_0}{\lambda}.\end{aligned}$$

代入:

$$\begin{aligned}W_0 &= 50.5 \pm 0.7 \mu\text{m}, \quad z_0 = 101.04 \pm 0.13 \text{ mm}, \\ z_R &= 9.16 \pm 0.18 \text{ mm}, \quad M^2 = 1.326 \pm 0.016.\end{aligned}$$

残差无系统趋势 (图 13(c)), 说明二次模型是恰当的。

(4) 不确定度由系数的协方差矩阵 $\mathbf{V}_\alpha$ (附录 F) 经雅可比矩阵传递: $\mathbf{V}_{\text{out}} = \mathbf{J}\mathbf{V}_\alpha\mathbf{J}^T$, $J_{ik} = \partial(\text{结果}_i)/\partial\alpha_k$ 。上面的不确定度就是这样算的, 并用蒙特卡洛重抽样核对: 按拟合曲线与估计的 ε_r 人为生成 4000 组“假数据”, 每组重新拟合, 统计结果的标准差 (差别 $< 4\%$)。若忽略协方差 (只用对角元), z_R 的不确定度变为 $\pm 0.15 \text{ mm}$ 、 M^2 变为 ± 0.022 ——分别低估 16%、高估 34%, 可见相关性不可忽略。即使以 $z_c = 100 \text{ mm}$ 为参考点, α_0 与 α_2 的相关系数仍为 -0.45 ; 若直接用导轨读数 z 作自变量 (参考点在 $z = 0$, 远离数据), 三个系数两两相关系数的绝对值都超过 0.98, 数值上几乎退化。把参考点放在数据中部 (最好在束腰附近) 是减小相关性的简单办法。

(5) (a) 若 $w_{\text{ke}} = \gamma W$ (γ 为常数), 则 $w_{\text{ke}}^2 = \gamma^2 W_0^2 [1 + (z - z_0)^2 / z_R^2]$: 拟合出的 z_0 与 z_R 不变, 束腰变为 γW_0 , $M^2 = \pi W_0^2 / (\lambda z_R)$ 变为 $\gamma^2 M^2$, 即二阶矩意义下的 $M_{2\text{nd}}^2 = M^2 / \gamma^2$ 。对“基模 + 少量高阶模”的非相干混合 (同一 q), 各模光强都随 $w(z)$ 等比例缩放, γ 确实不随 z 变; 高阶模的光强分布比高斯更“平肩宽尾”, 10%–90% 宽度对尾部不敏感, 一般 γ 略偏离 1 (需用实测光强分布计算)。按 $W/8$ 的步长做线性插值还会带来同样与 z 无关的小偏差。结论: 10%–90% 法对接近基模的光束只造成 $\gamma^2 - 1$ 量级 (几个百分点以内) 的 M^2 偏差, 对明显多模的光束应改用二阶矩 (例如相机测光强分布) 或 ISO 11146 规定的方法。(b) 其他系统误差与改进: 标度误差—— z 标度误差 ϵ_z 使 z_R 同比例偏、 $M^2 \propto W_0^2 / z_R$ 偏 $-\epsilon_z$, x 标度误差 ϵ_x 使 W_0 偏 ϵ_x 、 M^2 偏 $2\epsilon_x$, 应标定导轨与千分尺; 刀口倾斜——刀口与扫描方向不垂直 (夹角偏离 ϕ) 时宽度按 $1/\cos\phi$ 量级变化; 探测器——面积不够大会截掉刀口衍射光, 接近饱和时非线性, 应换大面积探测器或加衰减; 测点分布——远场点决定 Θ_0 、近场点决定 W_0 , ISO 11146 建议约一半测点在 $|z - z_0| < z_R$ 内、一半在 $2z_R$ 之外 [17], 本题为 5 个与 7 个, 可在束腰附近再加密; 透镜像差——使传播偏离二次型, M^2 偏大且残差出现系统趋势。

注：命题人说明：模拟数据的核对（不属于学生应答）

数据由 TEM_{00} 与 TEM_{10} 功率比 0.85:0.15 的非相干混合生成（第 7.6 节，二阶矩 $M^2 = 1.30$ ， $W_0 = 50 \mu\text{m}$ ， $z_0 = 101.3 \text{ mm}$ ， $z_R = 9.154 \text{ mm}$ ）。用相同的扫描与插值流程处理无噪声数据得 $\gamma = 1.0135$ （模式成分 $1.0088 \times$ 插值约 1.0047）。于是 $M_{2\text{nd}}^2 = 1.326/\gamma^2 = 1.291 \pm 0.016$ ，与 1.30 差 0.6σ ； z_R 与生成值一致； z_0 比生成值小 2.0σ ，属统计涨落的边缘，未发现对应的系统机制。生成脚本的读数噪声恰为 $\sigma_P = 0.01$ ，所以第 (2) 问的小 χ^2 属于“少见涨落”而非误差模型高估。

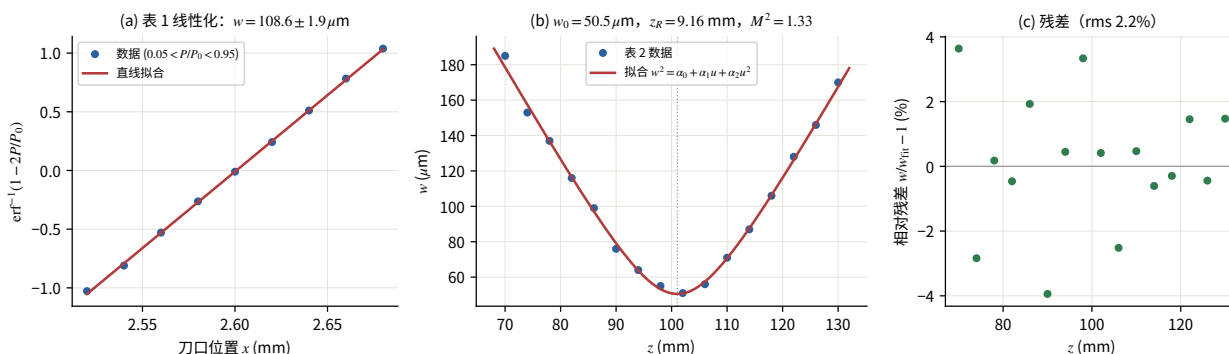


图 13 实验题的数据处理（模拟数据）。(a) 表 4 线性化后的加权直线拟合；(b) 表 6 与加权二次拟合；(c) 相对残差，无系统趋势。脚本 `exp_fit.py`。

12 小结：推导链

光线：折射/反射定律 $\xrightarrow{\text{傍轴}}$ ABCD 矩阵（式 (3.1)–(3.4)，逆序相乘，同介质 $\det = 1$ ） $\rightarrow$ 往返矩阵（式 (6.3)） $\xrightarrow{\text{凯莱-哈密顿}}$ 二阶递推（式 (6.6)） $\rightarrow$ 稳定条件 $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$ （式 (6.8)），光线往返相位 $\cos \Phi = 2g_1 g_2 - 1$ 。干涉：等比级数 $\rightarrow$ Airy 函数（式 (4.4)） $\rightarrow$ 自由光谱区、精细度、线宽、储能时间（式 (4.6)–(4.9)）、腔内增益与阻抗匹配（式 (4.10)）。波动：亥姆霍兹方程 $\xrightarrow{\text{慢变包络, 小参量 } \theta_0^2}$ 傍轴方程（式 (5.5)） $\rightarrow dq/dz = 1$ 的高斯光束（式 (7.4)–(7.8)） $\rightarrow$ ABCD 定律（式 (7.10)） $\rightarrow$ 聚焦与束腰成像（式 (7.11)–(7.13)）。腔模：往返后 q 不变（式 (8.1)） $\Leftrightarrow$ 光线稳定（共焦边界除外）；“镜面 = 波前”给出束腰与光斑（式 (8.4)–(8.6)）；往返 Gouy 相位与 Φ 同余弦 $\rightarrow \cos^2 \Delta\psi = g_1 g_2 \rightarrow$ 谐振频率（式 (8.11)），横模因子 $1 + m + n$ 给出横模间隔与共焦筒并；正交性 $\rightarrow$ 模式匹配（式 (8.14)、(8.15)）。LIGO：相位放大 $2\mathcal{F}/\pi$ （式 (9.1)），光斑与稳定边缘、失准矩阵（式 (9.2)），热透镜（式 (9.4)）。

参考文献

- [1] A. L. Schawlow and C. H. Townes. Infrared and optical masers. *Physical Review*, 112:1940–1949, 1958. doi: 10.1103/PhysRev.112.1940.
- [2] A. G. Fox and T. Li. Resonant modes in a maser interferometer. *Bell System Technical Journal*, 40:453–488, 1961. doi: 10.1002/j.1538-7305.1961.tb01625.x.

- [3] T. H. Maiman. Stimulated optical radiation in ruby. *Nature*, 187:493–494, 1960. doi: 10.1038/187493a0.
- [4] HRL Laboratories. History: The laser. HRL Laboratories 网站 (含 Maiman 1960 年 7 月 7 日纽约发布会讲稿) . URL <https://www.hrl.com/about/history>. 访问于 2026-10-17.
- [5] A. Javan, W. R. Bennett, and D. R. Herriott. Population inversion and continuous optical maser oscillation in a gas discharge containing a He-Ne mixture. *Physical Review Letters*, 6: 106–110, 1961. doi: 10.1103/PhysRevLett.6.106.
- [6] G. D. Boyd and H. Kogelnik. Generalized confocal resonator theory. *Bell System Technical Journal*, 41:1347–1369, 1962. doi: 10.1002/j.1538-7305.1962.tb03281.x.
- [7] H. Kogelnik. On the propagation of Gaussian beams of light through lenslike media including those with a loss or gain variation. *Applied Optics*, 4(12):1562, 1965. doi: 10.1364/AO.4.001562.
- [8] H. Kogelnik and T. Li. Laser beams and resonators. *Applied Optics*, 5(10):1550, 1966. doi: 10.1364/AO.5.001550.
- [9] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, B. P. Abbott, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116:061102, 2016. doi: 10.1103/PhysRevLett.116.061102.
- [10] LIGO Scientific Collaboration, J. Aasi, et al. Advanced LIGO. *Classical and Quantum Gravity*, 32:074001, 2015. doi: 10.1088/0264-9381/32/7/074001. arXiv:1411.4547.
- [11] J. A. Sidles and D. Sigg. Optical torques in suspended Fabry–Perot interferometers. *Physics Letters A*, 354:167–172, 2006. doi: 10.1016/j.physleta.2006.01.051.
- [12] A. F. Brooks, B. Abbott, M. A. Arain, et al. Overview of Advanced LIGO adaptive optics. *Applied Optics*, 55(29):8256, 2016. doi: 10.1364/AO.55.008256. arXiv:1608.02934.
- [13] A. Buikema, C. Cahillane, G. L. Mansell, et al. Sensitivity and performance of the Advanced LIGO detectors in the third observing run. *Physical Review D*, 102:062003, 2020. doi: 10.1103/PhysRevD.102.062003. arXiv:2008.01301.
- [14] A. E. Siegman. Unstable optical resonators for laser applications. *Proceedings of the IEEE*, 53:277–287, 1965. doi: 10.1109/PROC.1965.3685.
- [15] L. G. Gouy. Sur une propriété nouvelle des ondes lumineuses. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris)*, 110:1251–1253, 1890.
- [16] S. Feng and H. G. Winful. Physical origin of the Gouy phase shift. *Optics Letters*, 26(8):485, 2001. doi: 10.1364/OL.26.000485.

- [17] ISO. ISO 11146-1: Lasers and laser-related equipment — test methods for laser beam widths, divergence angles and beam propagation ratios — part 1: Stigmatic and simple astigmatic beams. International Organization for Standardization, Geneva, 2021.
- [18] A. E. Siegman. New developments in laser resonators. In *Optical Resonators, Proc. SPIE*, volume 1224, page 2, 1990. doi: 10.1117/12.18425.
- [19] Yu. Levin. Internal thermal noise in the LIGO test masses: A direct approach. *Physical Review D*, 57:659–663, 1998. doi: 10.1103/PhysRevD.57.659.
- [20] G. M. Harry, A. M. Gretarsson, P. R. Saulson, S. E. Kittelberger, et al. Thermal noise in interferometric gravitational wave detectors due to dielectric optical coatings. *Classical and Quantum Gravity*, 19:897–917, 2002. doi: 10.1088/0264-9381/19/5/305.
- [21] J.-Y. Vinet. On special optical modes and thermal issues in advanced gravitational wave interferometric detectors. *Living Reviews in Relativity*, 12:5, 2009. doi: 10.12942/lrr-2009-5.
- [22] D. B. Leviton and B. J. Frey. Temperature-dependent absolute refractive index measurements of synthetic fused silica. arXiv:0805.0091, 2008. URL <https://arxiv.org/abs/0805.0091>.
- [23] V. Magni. Resonators for solid-state lasers with large-volume fundamental mode and high alignment stability. *Applied Optics*, 25(1):107, 1986. doi: 10.1364/AO.25.000107.
- [24] Y. Suzaki and A. Tachibana. Measurement of the μm sized radius of Gaussian laser beam using the scanning knife-edge. *Applied Optics*, 14(12):2809, 1975. doi: 10.1364/AO.14.002809.
- [25] J. M. Khosroffian and B. A. Garetz. Measurement of a Gaussian laser beam diameter through the direct inversion of knife-edge data. *Applied Optics*, 22(21):3406, 1983. doi: 10.1364/AO.22.003406.

A 两镜腔模的代数细节

束腰位置 由正文, $z_1(R_1 + R_2 - 2L) = L(R_2 - L)$ 。代入 $R_i = L/(1 - g_i)$:

$$\begin{aligned} R_2 - L &= \frac{Lg_2}{1 - g_2}, \\ R_1 + R_2 - 2L &= L \frac{(1 - g_2) + (1 - g_1) - 2(1 - g_1)(1 - g_2)}{(1 - g_1)(1 - g_2)} \\ &= L \frac{g_1 + g_2 - 2g_1g_2}{(1 - g_1)(1 - g_2)}. \end{aligned}$$

相除得 $z_1 = \frac{g_2(1 - g_1)}{g_1 + g_2 - 2g_1g_2}L$ 。由对称性得 z_2 ; 可验证 $z_1 + z_2 = L \frac{g_2 - g_1g_2 + g_1 - g_1g_2}{g_1 + g_2 - 2g_1g_2} = L$ 。

瑞利长度 $z_R^2 = z_1(R_1 - z_1)$ 。 $R_1 - z_1 = \frac{L}{1 - g_1} - \frac{g_2(1 - g_1)L}{D_g}$, 其中 $D_g \equiv g_1 + g_2 - 2g_1g_2$ 。通分: $R_1 - z_1 = \frac{L[D_g - g_2(1 - g_1)^2]}{(1 - g_1)D_g}$ 。分子 $D_g - g_2(1 - 2g_1 + g_1^2) = g_1 - g_1^2g_2 = g_1(1 - g_1g_2)$ 。所以

$$z_R^2 = \frac{g_2(1 - g_1)L}{D_g} \cdot \frac{g_1(1 - g_1g_2)L}{(1 - g_1)D_g} = \frac{g_1g_2(1 - g_1g_2)}{D_g^2}L^2.$$

镜面光斑 $w_1^2 = w_0^2(1 + z_1^2/z_R^2) = \frac{\lambda}{\pi z_R}(z_R^2 + z_1^2)$ 。 $z_R^2 + z_1^2 = \frac{L^2 g_2}{D_g^2}[g_1(1 - g_1 g_2) + g_2(1 - g_1)^2] = \frac{L^2 g_2}{D_g^2} D_g = \frac{L^2 g_2}{D_g}$ (方括号展开后恰为 D_g)。于是 $w_1^2 = \frac{\lambda}{\pi} \frac{L^2 g_2 / D_g}{L \sqrt{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)} / |D_g|}$ 。稳定腔中 $g_2 / D_g > 0$ (g_1, g_2 同号时 $D_g = g_1(1 - g_2) + g_2(1 - g_1)$ 与它们同号, 因为 $g_i \leq 1$), 化简即得式 (8.6)。

$\cos \Delta\psi$ 的显式计算 由 $\tan \psi_i = z_i / z_R$,

$$\cos(\psi_1 + \psi_2) = \frac{z_R^2 - z_1 z_2}{\sqrt{(z_R^2 + z_1^2)(z_R^2 + z_2^2)}}.$$

分子: $z_R^2 - z_1 z_2 = \frac{L^2}{D_g^2}[g_1 g_2(1 - g_1 g_2) - g_1 g_2(1 - g_1)(1 - g_2)] = \frac{L^2 g_1 g_2}{D_g^2} D_g = \frac{L^2 g_1 g_2}{D_g}$ 。分母: 由上一段, $\sqrt{\frac{L^2 g_2}{D_g} \cdot \frac{L^2 g_1}{D_g}} = \frac{L^2 \sqrt{g_1 g_2}}{|D_g|}$ 。所以

$$\cos \Delta\psi = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1 g_2}} \cdot \frac{|D_g|}{D_g} = \pm \sqrt{g_1 g_2},$$

符号与 D_g 相同, 即与 g_1, g_2 相同。这确认了式 (8.9) 的符号规则。(verify_sympy.py 对多组 g 值做了数值核对, 含 LIGO 参数。)

B 复参数的高斯积分与菲涅耳积分

对实数 $\alpha > 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$ (换元 $x = t/\sqrt{\alpha}$)。正文多次用到 α 为复数、 $\text{Re } \alpha > 0$ 的情形。论证如下: 记 $I(\alpha) = \int e^{-\alpha x^2} dx$ 。当 $\text{Re } \alpha > 0$ 时被积函数的模 $e^{-(\text{Re } \alpha)x^2}$ 可积, 积分收敛, 并且可以在积分号下对 α 求导: $I'(\alpha) = -\int x^2 e^{-\alpha x^2} dx$ 。分部积分 ($x e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha} d(e^{-\alpha x^2})$) 得 $I' = -\frac{1}{2\alpha} I$ 。这个一阶方程的解是 $I = C\alpha^{-1/2}$; 在正实轴上 $I = \sqrt{\pi/\alpha}$ 定出 $C = \sqrt{\pi}$ 。所以对一切 $\text{Re } \alpha > 0$, $I(\alpha) = \sqrt{\pi/\alpha}$, 其中 $\sqrt{}$ 取实部为正的那一支。

二维轴对称形式 $\int_0^\infty e^{-\alpha r^2} 2\pi r dr = \pi/\alpha$ 可直接积出 ($2r dr = d(r^2)$), 对 $\text{Re } \alpha > 0$ 同样成立。

菲涅耳积分: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax^2} dx$ ($a > 0$) 相当于 $\alpha = -ia$, $\text{Re } \alpha = 0$, 处在收敛边界上。取 $\alpha = \epsilon - ia$ 再令 $\epsilon \rightarrow 0^+$ (物理上相当于给场一点点横向衰减), 得 $\sqrt{\pi/(-ia)} = \sqrt{\pi i/a} = \sqrt{\pi/a} e^{i\pi/4}$ 。由此可验证式 (5.6) 的前因子: $u_0 = 1$ 时二维积分为 $(\sqrt{\pi i \cdot 2z/k})^2 = 2\pi iz/k$, 乘以 $k/(2\pi iz)$ 恰为 1。

C 厄米-高斯模

分离变量 傍轴方程 $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + 2ik\partial_z u = 0$ 中 x, y 地位独立。若 $u = X(x, z)Y(y, z)$, 且 X 满足一维方程 $\partial_x^2 X + 2ik\partial_z X = 0$, Y 也满足同样的方程, 则代入得 $Y(\partial_x^2 X + 2ik\partial_z X) + X(\partial_y^2 Y + 2ik\partial_z Y) = 0$ 。所以只需求一维解。一维基模为 $X_0 = q^{-1/2} e^{ikx^2/(2q)}$ (与正文的推导相同, 只是一维时 $\nabla_\perp^2$ 只给出 ik/q 一项, 前因子变为 $q^{-1/2}$); 其 Gouy 相位为 $\psi/2$, 两个方向合起来恰为正文的 ψ 。

高阶解 试探 $X_m = H(\xi) e^{-im\psi(z)} X_0$, $\xi \equiv \sqrt{2}x/w(z)$ 。计算中要用到三个关系: $\partial_x X_0 = \frac{ikx}{q} X_0$; $\partial_x \xi = \sqrt{2}/w$, $\partial_z \xi = -\xi w'/w$; 以及由式 (7.5)–(7.7) 直接求导得到的 $\frac{w'}{w} = \frac{z}{z^2 + z_R^2} = \frac{1}{R}$, $\psi' = \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{2}{kw^2}$ 。代入 $\partial_x^2 X_m + 2ik\partial_z X_m$, 利用 X_0 本身满足方程消去 H 不求导的项, 剩下 (公共因子 $e^{-im\psi} X_0$ 略去):

$$\frac{2}{w^2} H'' + H' \left[2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{w} \cdot \frac{ikx}{q} - 2ik\xi \frac{w'}{w} \right] + 2km\psi' H.$$

用 $x = \xi w / \sqrt{2}$, 方括号 $= 2ik\xi(\frac{1}{q} - \frac{1}{R}) = 2ik\xi \cdot \frac{i\lambda}{\pi w^2} = -\frac{4\xi}{w^2}$ (用了 $\frac{1}{q} - \frac{1}{R} = i\frac{\lambda}{\pi w^2}$ 与 $k\lambda = 2\pi$)。末项 $2km \cdot \frac{2}{kw^2} = \frac{4m}{w^2}$ 。合起来:

$$\frac{2}{w^2} [H'' - 2\xi H' + 2mH] = 0,$$

即厄米方程。用幂级数 $H = \sum_k a_k \xi^k$ 代入, 同次幂系数给出递推 $\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{2(k-m)}{(k+1)(k+2)}$ 。若级数不截断, k 很大时比值 $\rightarrow 2/k$, 与 $e^{\xi^2} = \sum \xi^{2j}/j!$ 的相邻系数比相同, 于是 $H \sim e^{\xi^2}$, 乘上场的高斯因子 $e^{-\xi^2/2}$ 后仍发散, 不是物理解。递推只联系 a_k 与 a_{k+2} , 奇次项与偶次项是两条独立的级数。级数截断 (得到多项式) 当且仅当 $m = 0, 1, 2, \dots$, 此时与 m 同奇偶的那一支在 $k = m$ 处截断, 另一支必须取其首项系数为零; 解就是厄米多项式 H_m (可用递推 $H_{m+1} = 2\xi H_m - 2mH_{m-1}$ 逐个验证, 例如 $H_2 = 4\xi^2 - 2$: $H_2'' - 2\xi H_2' + 4H_2 = 8 - 16\xi^2 + 16\xi^2 - 8 = 0$)。每个方向的 Gouy 相位为 $(m + \frac{1}{2})\psi$, 二维合起来为 $(1 + m + n)\psi$, 即式 (8.10)。

正交性 厄米方程可写成 $(e^{-\xi^2} H_m')' = -2m e^{-\xi^2} H_m$ (展开左边即得)。对 H_n 写同样的式子, 两式分别乘 H_n 、 H_m 后相减并对 ξ 积分; 左边分部积分后为 $[e^{-\xi^2} (H_n H_m' - H_m H_n')]_{-\infty}^{\infty} = 0$, 于是 $2(n-m) \int H_m H_n e^{-\xi^2} d\xi = 0$ 。所以 $m \neq n$ 时 $\int H_m H_n e^{-\xi^2} d\xi = 0$; $m = n$ 时可用递推求得 $\int H_m^2 e^{-\xi^2} d\xi = 2^m m! \sqrt{\pi}$ (例: $m = 1$ 时 $\int 4\xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = 2\sqrt{\pi}$)。由于场的横向部分为 $H_m(\xi) e^{-\xi^2/2}$, 模的正交性 $\int u_m^* u_n dx = 0$ 就是这条关系 (相位因子 $e^{ikx^2/2R}$ 在 $u_m^* u_n$ 中相消)。

二阶矩 TEM_{m0} 在 x 方向的光强 $\propto H_m^2(\xi) e^{-\xi^2}$ 。利用厄米多项式的正交关系与 $\xi H_m = \frac{1}{2} H_{m+1} + m H_{m-1}$ (由递推式改写), 可得 $\langle \xi^2 \rangle = m + \frac{1}{2}$, 即 $\langle x^2 \rangle = \frac{w^2}{2} (m + \frac{1}{2}) = \frac{(2m+1)w^2}{4}$, 故二阶矩宽度 $W_x = 2\sqrt{\langle x^2 \rangle} = w\sqrt{2m+1}$ 。 $m = 1$ 时 $\langle x^2 \rangle = 3w^2/4$, 可直接用 $\int \xi^4 e^{-\xi^2} d\xi / \int \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = 3/2$ 核对。

D 两束高斯光束的匹配效率

两束同轴基模高斯光束, 束腰分别为 w_1 (在 $z = 0$) 与 w_2 (在 $z = \Delta$)。在 $z = 0$ 面上计算式 (8.13): $U_1 = e^{-r^2/w_1^2}$; $U_2 \propto \frac{1}{q_2} e^{ikr^2/(2q_2)}$, $q_2 = -\Delta - iz_{R2}$ 。交叠积分 $\int U_1^* U_2 2\pi r dr = \frac{1}{q_2} \cdot \frac{\pi}{\alpha}$, $\alpha = \frac{1}{w_1^2} - \frac{ik}{2q_2}$ ($\text{Re } \alpha > 0$, 附录 B)。 $|U_2|^2$ 的积分为 $\frac{1}{|q_2|^2} \frac{\pi w_2^2(-\Delta)}{2}$, 其中 $w_2^2(-\Delta) = w_2^2(1 + \Delta^2/z_{R2}^2)$ 。利用 $|q_2|^2 = z_{R2}^2 + \Delta^2$, 后者化为 $\pi w_2^2/(2z_{R2}^2)$; $|U_1|^2$ 的积分为 $\pi w_1^2/2$ 。于是

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\pi^2/|\alpha q_2|^2}{\frac{\pi w_1^2}{2} \cdot \frac{\pi w_2^2}{2z_{R2}^2}} = \frac{4z_{R2}^2}{w_1^2 w_2^2 |\alpha q_2|^2}, \\ |\alpha q_2|^2 &= \left| \frac{-\Delta - iz_{R2}}{w_1^2} - \frac{ik}{2} \right|^2 \\ &= \frac{\Delta^2}{w_1^4} + \left(\frac{z_{R2}}{w_1^2} + \frac{k}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

代入 $z_{R2} = kw_2^2/2$: $\frac{z_{R2}}{w_1^2} + \frac{k}{2} = \frac{k}{2} (1 + \frac{w_2^2}{w_1^2})$, 分子分母同乘 $\frac{4w_1^2}{k^2 w_2^2}$, 并用 $2/k = \lambda/\pi$, 得

$$\eta = \frac{4}{\left(\frac{w_1}{w_2} + \frac{w_2}{w_1} \right)^2 + \left(\frac{\lambda \Delta}{\pi w_1 w_2} \right)^2}.$$

$\Delta = 0$ 时回到正文结果； $w_1 = w_2 = w_0$ 时 $\eta = 1/[1 + (\Delta/2z_R)^2]$ ：束腰错开一个瑞利长度损失 20%。`verify_sympy.py` 在一组数值上核对了上式与直接积分一致，`examples.py` 用数值积分在三组参数上核对（差别 $< 10^{-6}$ ）。

E 热透镜模型中的函数 E_{in}

$E_{\text{in}}(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-u}}{u} du$ 。把 $1 - e^{-u} = u - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} - \cdots$ 逐项除以 u 再积分：

$$E_{\text{in}}(x) = x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} - \cdots,$$

所以小 x 时 $E_{\text{in}}(x) \approx x$ （温度分布在轴附近是抛物线，热透镜近似为理想透镜）。大 x 时， $\int_0^x \frac{1-e^{-u}}{u} du = \ln x + \gamma_E + E_1(x)$ ，其中 $\gamma_E = 0.5772$ 为欧拉常数， $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \approx \frac{e^{-x}}{x}$ 很快趋于零，所以远离光斑处温度随 $\ln r$ 变化——这正是无限长线热源的二维导热解。 $E_{\text{in}}(2) = 1.3193$ 。`fig_thermal.py` 用数值求积核对了这些值，并直接数值积分径向导热方程验证了式 (9.3)。

F 加权线性最小二乘与协方差

模型 $y = \sum_{k=1}^p \alpha_k \varphi_k(u)$ 对参数 α_k 是线性的（ φ_k 是已知函数，如 $1, u, u^2$ ）。有 n_d 个数据点 (u_i, y_i) ，各自的标准差 σ_i 。令

$$\chi^2(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n_d} \frac{[y_i - \sum_k \alpha_k \varphi_k(u_i)]^2}{\sigma_i^2}.$$

对每个 α_k 求偏导并令其为零，得到 p 个线性方程（正规方程）。用矩阵写：设 $A_{ik} = \varphi_k(u_i)$ ， $\mathbf{W} = \text{diag}(1/\sigma_i^2)$ ，则

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A}) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{y}, \quad \mathbf{V}_\alpha = (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1}.$$

若误差模型正确（ σ_i 是真实的标准差、模型无系统偏差），最小的 χ^2 是一个随机量，期望值为 $\nu = n_d - p$ （自由度），标准差为 $\sqrt{2\nu}$ ；它所服从的分布叫自由度为 ν 的 χ^2 分布， χ^2 落在某一范围内的概率可查表或由软件算出。 χ^2 远大于 ν 说明误差低估或模型不对，远小于 ν 说明误差高估或是少见的涨落。 $\mathbf{V}_\alpha$ 是参数的协方差矩阵：对角元是各参数的方差，非对角元 V_{jk} 描述 α_j 与 α_k 的误差是否“一起偏”；相关系数 $V_{jk}/\sqrt{V_{jj}V_{kk}}$ 。若只知道 σ_i 的相对大小（如实验题中 $\sigma_i \propto w_i^2$ ），先用相对权重求解，再把 $\mathbf{V}_\alpha$ 乘以 χ^2/ν （ $\nu = n_d - p$ ）。直线拟合是 $p = 2$ 、 $\varphi_1 = 1$ 、 $\varphi_2 = u$ 的特例，此时 2×2 的正规方程可手算。

由参数算出的量 $f(\boldsymbol{\alpha})$ （如束腰、 M^2 ）的方差为 $\sigma_f^2 = \sum_{j,k} \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} V_{jk} \frac{\partial f}{\partial \alpha_k}$ ；只用对角元等于假设参数间无相关，在参数强相关时会严重高估或低估（实验题第 (4) 问）。

G 二阶矩宽度严格按二次函数传播

只看 x 方向（对 y 积分后的问题与一维相同）。 $u(x, z)$ 满足 $\partial_x^2 u + 2ik\partial_z u = 0$ ，即 $\partial_z u = \frac{i}{2k} u''$ （撇号表示 ∂_x ），共轭为 $\partial_z u^* = -\frac{i}{2k} u^{*''}$ 。设 u 及其导数在 $|x| \rightarrow \infty$ 时足够快地趋于零（有限光束），以下分部积分的边界项都为零。

第一步：功率守恒 $\partial_z |u|^2 = u^* \partial_z u + u \partial_z u^* = \frac{i}{2k} (u^* u'' - u u^{*''}) = \frac{i}{2k} \partial_x (u^* u' - u u^{*'})$ 是全导数，所以 $P = \int |u|^2 dx$ 不随 z 变。同理， u' 也满足同一方程，所以 $Q \equiv \int |u'|^2 dx$ 也不随 z 变。

第二步： $\Sigma = \int x^2 |u|^2 dx$ 的一阶导数 用第一步的全导数并分部积分一次：

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma}{dz} &= \frac{i}{2k} \int x^2 \partial_x (u^* u' - u u^{*'}) dx = \frac{1}{k} J, \\ J &\equiv -i \int x (u^* u' - u u^{*'}) dx \quad (\text{实数}). \end{aligned}$$

第三步：J 的导数 对 J 求导，含 $(\partial_z u)'$ 与 $(\partial_z u^*)'$ 的两项各分部积分一次，再代入 $\partial_z u = \frac{i}{2k} u''$ ，整理得

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dz} &= \frac{1}{2k} \int \left[-2x \partial_x |u'|^2 - (u^* u'' + u u^{*''}) \right] dx \\ &= \frac{1}{2k} [2Q + 2Q] = \frac{2Q}{k}, \end{aligned}$$

其中用了 $u' u^{*''} + u^{*'} u'' = \partial_x |u'|^2$ 与 $\int (u^* u'' + u u^{*''}) dx = -2Q$ (各分部积分一次)。

结论 $\frac{d^2 \Sigma}{dz^2} = \frac{2Q}{k^2}$ 是常数，所以 $\Sigma(z)$ 、从而 $W_x^2 = 4\Sigma/P$ 严格是 z 的二次函数。配方即得式 (7.15) 的形式。检验：基模 $u \propto e^{-x^2/w_0^2}$ (束腰处) 有 $Q/P = 1/w_0^2$ ， $\frac{d^2}{dz^2} \frac{W_x^2}{4} = \frac{2}{k^2 w_0^2}$ ；而由式 (7.5)， $\frac{d^2}{dz^2} \frac{w^2}{4} = \frac{w_0^2}{2z_R^2} = \frac{2}{k^2 w_0^2}$ (用 $z_R = k w_0^2/2$)，一致。