

# 赫兹接触、牛顿摆与颗粒晶体中的孤立波

第 43 届决赛短训讲义组

2026 年 10 月

## 目录

|                                     |           |
|-------------------------------------|-----------|
| <b>1 导读</b>                         | <b>3</b>  |
| <b>2 名词与符号</b>                      | <b>5</b>  |
| <b>3 前置模块：弹性体的基本描述</b>              | <b>6</b>  |
| 3.1 应力、应变与胡克定律 . . . . .            | 6         |
| 3.2 量纲分析与标度论证 . . . . .             | 7         |
| 3.3 弹性半空间受点力：Boussinesq 解 . . . . . | 7         |
| 3.4 曲面的局部几何：间隙函数 . . . . .          | 8         |
| <b>4 赫兹接触</b>                       | <b>9</b>  |
| 4.1 问题的提法 . . . . .                 | 9         |
| 4.2 标度论证 . . . . .                  | 10        |
| 4.3 精确解：赫兹压强分布 . . . . .            | 10        |
| 4.4 弹性势能与刚度 . . . . .               | 12        |
| 4.5 何时开始塑性屈服 . . . . .              | 13        |
| <b>5 两球碰撞</b>                       | <b>14</b> |
| 5.1 相对运动方程 . . . . .                | 14        |
| 5.2 最大压缩量 . . . . .                 | 14        |
| 5.3 接触时间 . . . . .                  | 14        |
| 5.4 数值例：钢球 . . . . .                | 15        |
| 5.5 准静态近似何时成立 . . . . .             | 17        |
| 5.6 恢复系数 . . . . .                  | 17        |
| <b>6 牛顿摆：为什么只弹出一个球</b>              | <b>18</b> |

|                                   |           |
|-----------------------------------|-----------|
| 目录                                | 2         |
| 6.1 守恒律不够                         | 18        |
| 6.2 有间隙的球：二体碰撞序列                  | 18        |
| 6.3 紧贴的球：多体问题                     | 18        |
| 6.4 色散：线性链的对照                     | 19        |
| 6.5 赫兹链：声真空                       | 20        |
| <b>7 Nesterenko 孤立波</b>           | <b>21</b> |
| 7.1 离散方程与标度对称性                    | 21        |
| 7.2 长波近似                          | 22        |
| 7.3 行波解：余弦四次方剖面                   | 23        |
| 7.4 数值验证                          | 24        |
| <b>8 应用：界面、冲击防护与声学器件</b>          | <b>28</b> |
| 8.1 异质球链的界面                       | 28        |
| 8.2 冲击力的衰减与能量捕获                   | 29        |
| 8.3 颗粒晶体声透镜与声二极管                  | 29        |
| <b>9 决赛风格例题</b>                   | <b>30</b> |
| <b>10 实验与数据处理：电路通断法测钢球接触时间</b>    | <b>34</b> |
| <b>11 小结：推导链</b>                  | <b>39</b> |
| <b>A 弹性半空间受点力：Boussinesq 解的推导</b> | <b>41</b> |
| A.1 三维弹性力学的基本方程                   | 42        |
| A.2 问题的提法                         | 43        |
| A.3 Papkovitch–Neuber 表示：化为找调和函数  | 44        |
| A.4 选择势函数                         | 44        |
| A.5 用边界条件定常数                      | 45        |
| A.6 结果与检验                         | 45        |
| <b>B 间隙函数的推导</b>                  | <b>47</b> |
| B.1 坐标与符号约定                       | 47        |
| B.2 球面：精确式、展开与误差                  | 47        |
| B.3 一般光滑曲面：二次型与主曲率                | 48        |
| B.4 两个物体：主轴斜交                     | 49        |
| B.5 特例                            | 49        |

|                 |    |
|-----------------|----|
| 1   导读          | 3  |
| B.6  间隙怎样进入接触条件 | 50 |
| C  赫兹压强产生的表面位移  | 51 |
| D  接触时间积分与 B 函数 | 52 |
| E  长波展开与行波解的细节  | 53 |
| F  数值方法         | 54 |
| G  最小二乘公式的推导    | 54 |
| H  名词解释         | 55 |

## 1  导读

两只钢球相撞，“叮”的一声，前后不过几十微秒。在这几十微秒里，接触处被压出一个直径约半毫米的小圆，压强高达数 GPa，然后球又几乎毫无损失地弹开。一排紧挨着的钢球（牛顿摆）被一端的球撞击，另一端恰好只飞出一个球。把成百上千个球排成一行，敲击一端，会出现一种宽约 5 个球、形状不变、速度随振幅变化的“孤立波”。这三件事由同一个力学规律串起来：两个弹性曲面接触时，压力与压缩量之间是  $F \propto \delta^{3/2}$  的非线性关系。本讲从这个规律出发，一步一步走到颗粒晶体中的强非线性波。

### 背景：从牛顿环到接触力学

1880 年圣诞假期，23 岁的赫兹（Heinrich Hertz, 1857 年 2 月生）在柏林大学做亥姆霍兹的助手。当时柏林物理学会常讨论牛顿环：两片玻璃透镜压在一起时，接触区的干涉条纹会随压力变化，但没有人知道接触处的玻璃究竟怎样变形。赫兹在这个假期里完成了大部分推导，1881 年 1 月 21 日在柏林物理学会报告，论文署“1881 年 1 月于柏林”，刊于 1882 年出版的《纯粹与应用数学杂志》第 92 卷 [1, 2]。1882 年他又发表了带实验（用灯黑测接触面积）和“硬度”定义的第二篇论文 [3]。赫兹在原文中给出了几个数值例子：半径 100 mm 的透镜以 1 千克力压在平板上，接触圆半径约 2.67 mm，两者靠近约 71 nm；两个半径 25 mm 的钢球以 10 mm/s 相撞，接触时间约 0.000 38 s；地球那么大的两个钢球以同样速度相撞，接触时间约 27 小时 [1]。本讲第 4、5 节会用自己推出的公式重算这些数（见第 4.3 节与第 5.4 节）。今天，赫兹接触理论是滚动轴承、齿轮、铁轨与车轮、原子力显微镜压痕和颗粒材料模拟的基础 [4, 5]。

### 背景：牛顿摆与颗粒链中的孤立波

牛顿摆（Newton’s cradle）为什么“撞进一个、飞出一个”？1981 年 Herrmann 与 Schmälzle 在《美国物理学杂志》上指出 [6]：对于紧贴的一排球，仅凭动量守恒与能量守恒不足以决定结果，还要求球链能“无色散地”传递能量。1999 年 Hinch 与 Saint-Jean 用赫兹接触律计算了一个球撞击一长列紧贴球的过程，发现末端实际飞出两个球（速度约 0.986V 与 0.149V），撞入球以约 -0.07V 反弹 [7]。2004 年 Hutzler 等人的实验与模拟表明，球列在第一次碰撞时就

已经“散开”，经过多次碰撞后所有球最终同相摆动，这是碰撞中粘弹性耗散的结果 [8]。1983 年，苏联学者 Nesterenko 从赫兹接触律出发，推出一列无预压的球链中可以传播一种宽度约为 5 个球径、速度随振幅增大的孤立波 [9]；1985 年他与 Lazaridi 在实验中观察到这种波 [10]。Nesterenko 把这种没有线性声速的介质称为“声真空” (sonic vacuum) [11]。1997 年 Coste、Falcon 与 Fauve 的实验在不调任何参数的情况下验证了这一理论 [12]。2005–2006 年 Daraio、Nesterenko 等人用 PTFE（聚四氟乙烯）球和不锈钢球链做了系统实验：测量了孤立波速度与振幅的关系，发现了异质球链界面中的“反常反射”，以及复合球链对冲击能量的“捕获” [13–16]。这些研究催生了一类新器件：用预压可调的平行球链把孤立波聚焦成“声弹” (sound bullets) 的非线性声透镜 [17]，以及利用分岔实现开关与整流 (rectification ratio 超过  $10^4$ ) 的颗粒“声二极管” [18]。综述见文献 [19]。

**学习目标** 学完本讲，你应当能够：

1. 用量纲分析和标度论证得到  $a \sim \sqrt{R\delta}$ 、 $F \sim E^*\sqrt{R}\delta^{3/2}$ ，并说明精确系数 4/3 的来源；
2. 由能量守恒推出碰撞的最大压缩量与接触时间  $t_c \approx 2.94 \delta_m/v \propto v^{-1/5}$ ，判断准静态近似与弹性假设何时成立；
3. 解释牛顿摆为什么近似“进一出”，理解色散与非线性在其中的作用；
4. 从离散运动方程出发，经长波近似和行波代入，得到 Nesterenko 孤立波的  $\cos^4$  剖面、宽度与  $V_s \propto F_m^{1/6} \propto v_m^{1/5}$  的标度，并能用数值模拟检验；
5. 处理“电路通断法测接触时间”一类实验数据：线性化、最小二乘、不确定度和系统误差分析。

#### 前置知识：本讲需要的普通物理与数学

- 力学：牛顿定律、动量与能量守恒、质心系、约化质量、简谐振动；
- 热学/材料：知道“杨氏模量”这个词即可，其余在第 3 节补齐；
- 数学：泰勒展开、定积分换元、极坐标下的面积分、对数坐标、复数指数  $e^{i\theta}$ 。

本讲新引入的工具（应力应变、泊松比、量纲分析、Boussinesq 解、色散与群速度、长波近似、 $\Gamma$  函数与 B 函数、最小二乘）都在首次使用前给出定义与推导。

**建议学时** 共 2 学时（约 90 分钟）：前置模块与赫兹接触 25 分钟；碰撞与恢复系数 15 分钟；牛顿摆与色散 15 分钟；Nesterenko 孤立波与数值验证 25 分钟；应用 10 分钟。例题与实验题供课后练习，附录供深入阅读。

**推导路线** 胡克定律 + Boussinesq 点力解  $\Rightarrow$  赫兹接触律  $F = \frac{4}{3}E^*\sqrt{R}\delta^{3/2} \Rightarrow$ （能量守恒）碰撞时间  $\Rightarrow$ （多球）牛顿摆  $\Rightarrow$ （长链 + 长波近似）孤立波  $\Rightarrow$  界面与器件。

## 2 名词与符号

表 1 本讲符号表 (下标 1、2 表示两个接触物体)

| 符号                           | 含义                                                         | 单位                                |
|------------------------------|------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| $\sigma, \varepsilon$        | 正应力 (单位面积上的法向力)、正应变 (相对伸长)                                 | Pa, 1                             |
| $E, \nu$                     | 杨氏模量、泊松比                                                   | Pa, 1                             |
| $\rho$                       | 材料密度                                                       | kg/m <sup>3</sup>                 |
| $G$                          | 切变模量 $E/[2(1+\nu)]$ (附录 A)                                 | Pa                                |
| $c_0 = \sqrt{E/\rho}$        | 细棒中纵波速度                                                    | m/s                               |
| $R_1, R_2; R^*$              | 两物体在接触点的曲率半径; 等效半径                                         | m                                 |
| $E^*$                        | 等效模量 (式 (4.4))                                             | Pa                                |
| $\delta$                     | 压缩量: 两物体远处参考点相互靠近的距离                                       | m                                 |
| $a$                          | 接触圆半径                                                      | m                                 |
| $p(r), p_0$                  | 接触面上的压强分布、最大压强 (中心处)                                       | Pa                                |
| $F, U, k$                    | 接触力、接触弹性势能、法向接触刚度 $dF/d\delta$                             | N, J, N/m                         |
| $K$                          | 赫兹系数, $F = K\delta^{3/2}$ , $K = \frac{4}{3}E^*\sqrt{R^*}$ | N/m <sup>3/2</sup>                |
| $m^*$                        | 约化质量 $m_1m_2/(m_1+m_2)$                                    | kg                                |
| $v, \delta_m, t_c, F_m$      | 碰撞相对速度、最大压缩量、接触时间、最大接触力                                    | m/s, m, s, N                      |
| $Y$                          | 单轴拉伸屈服强度                                                   | Pa                                |
| $\tau_{\max}$                | 最大切应力 (第 4.5 节)                                            | Pa                                |
| $\beta$                      | 接触力律指数, $F = A\psi^\beta$ (赫兹 $\beta = 3/2$ )              | 1                                 |
| $\tau$                       | 链的特征时间 $(m/A)^{2/5}v_0^{-1/5}$ (第 6、7 节图中的时间单位)            | s                                 |
| $e$                          | 恢复系数 (分离速度/接近速度)                                           | 1                                 |
| $d = 2R$                     | 球链中球的直径 (相邻球心间距)                                           | m                                 |
| $u_n, \psi_n$                | 第 $n$ 球的位移; 第 $n-1$ 、 $n$ 球间的接触压缩量                         | m                                 |
| $A$                          | 球链接触系数, $F = A\psi^{3/2}$                                  | N/m <sup>3/2</sup>                |
| $w = -\partial u/\partial x$ | 长波近似中的压缩应变                                                 | 1                                 |
| $V_s, v_m, \xi_m$            | 孤立波速度、球的最大速度、最大应变                                          | m/s, m/s, 1                       |
| $c$                          | Nesterenko 理论中的特征速度 (式 (7.6))                              | m/s                               |
| $q, \omega$                  | 波数、角频率                                                     | m <sup>-1</sup> , s <sup>-1</sup> |

两个容易混淆的名称: 孤立波 (solitary wave) 指形状不变、局域在有限区域内传播的行波; 孤子 (soliton) 原指某些特殊方程 (如描述浅水波的 KdV 方程) 中、彼此碰撞后能完全复原的孤立波。颗粒链中的孤立波彼此碰撞后会留下少量“残波”, 严格说不是孤子, 本讲统一称“孤立波”。

### 3 前置模块：弹性体的基本描述

#### 3.1 应力、应变与胡克定律

##### 定义：应力与应变

在物体内部取一个截面，截面一侧的物质对另一侧单位面积施加的力称为应力。垂直于截面的分量叫正应力  $\sigma$ （本讲取压为负、拉为正时会特别说明），平行于截面的分量叫切应力  $\tau$ 。一根原长  $\ell$  的细棒伸长  $\Delta\ell$ ，其正应变  $\varepsilon = \Delta\ell/\ell$ ，是无量纲数。

##### 定义：杨氏模量与泊松比

对细棒做单轴拉伸，小形变时实验给出

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon_{\perp} = -\nu\varepsilon, \quad (3.1)$$

$E$  叫杨氏模量， $\nu$  叫泊松比， $\varepsilon_{\perp}$  是横向应变（棒拉长时变细）。各向同性材料满足  $-1 < \nu \leq 1/2$ ， $\nu = 1/2$  对应体积不变（不可压缩）。钢： $E \approx 200 \text{ GPa} \sim 210 \text{ GPa}$ ， $\nu \approx 0.27 \sim 0.30$ ， $\rho \approx 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ [20]；玻璃  $E \approx 70 \text{ GPa}$ ， $\nu \approx 0.22$ 。本讲数值计算统一取钢  $E = 210 \text{ GPa}$ 、 $\nu = 0.30$ 、 $\rho = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。

##### 推导：弹性能密度

把截面  $S$ 、长  $\ell$  的棒从应变 0 缓慢拉到  $\varepsilon$ 。拉力  $f = S\sigma = SE\varepsilon'$ ，伸长增量  $d(\Delta\ell) = \ell d\varepsilon'$ ，外力做功全部储存为弹性能：

$$W = \int_0^{\varepsilon} SE\varepsilon' \ell d\varepsilon' = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 (S\ell).$$

除以体积  $S\ell$ ，得单位体积弹性能

$$u_{\text{el}} = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \sigma\varepsilon. \quad (3.2)$$

这里用到了“缓慢”：每一时刻外力与内部应力平衡，动能可忽略（准静态）。

##### 推导：细棒中的纵波速度

取棒上位于  $x$  处、长  $dx$  的一小段，位移为  $u(x, t)$ ，应变  $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ 。两端截面上的力之差给这段的质量  $\rho S dx$  加速度：

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S[\sigma(x+dx) - \sigma(x)] = SE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

这是波动方程  $u_{tt} = c_0^2 u_{xx}$ ，波速

$$c_0 = \sqrt{E/\rho}. \quad (3.3)$$

钢  $c_0 \approx 5.2 \text{ km/s}$ 。（大块固体中的纵波还受横向约束，速度略大；数量级相同。）

**注：为什么接触问题里出现  $1 - \nu^2$**

细棒被拉伸时可以自由地变细。压在大块物体表面的一个小区域时，被压的物质想向四周鼓出（泊松效应），却部分地被周围的物质挡住，于是显得更“硬”。一个可以严格计算的参照是平面应变：只约束一个横向方向（ $\varepsilon_y = 0$ ），另一个横向方向自由。小形变下各方向应力的效应可以叠加： $\sigma_z$  单独作用时，使  $z$  方向伸长  $\sigma_z/E$ ，同时使  $x$ 、 $y$  方向各收缩  $\nu\sigma_z/E$ （式 (3.1)）。对三个正应力求和，得到三维胡克定律，例如  $\varepsilon_y = [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]/E$ ，另两式类推。由  $\varepsilon_y = 0$  得  $\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z)$ 。取  $x$  方向自由（ $\sigma_x = 0$ ），沿  $z$  方向压缩（此时  $\sigma_y = \nu\sigma_z \neq 0$ ），代回  $\varepsilon_z = [\sigma_z - \nu\sigma_y]/E$  得  $\sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_z$ ，有效模量为  $E/(1-\nu^2)$ 。（若两个横向方向都被完全约束，有效模量为  $E(1-\nu)/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ ，在  $\nu \rightarrow 1/2$  时发散；半空间表面的压入不是这种情形。） Boussinesq 解中出现的组合恰好可以写成  $\frac{1-\nu^2}{E} = \frac{1-\nu}{2G}$ ，其中  $G = E/[2(1+\nu)]$  为切变模量：表面被压下主要靠材料的剪切形变来容纳。 $\nu$  从 0.3 变到 0.5， $E/(1-\nu^2)$  只增大约 21%，所以泊松比对接触刚度的影响是适度的。

### 3.2 量纲分析与标度论证

**定义：量纲分析**

物理规律的形式不依赖单位的选取。若所求量  $Q$  只依赖于  $q_1, \dots, q_k$ ，就把  $Q$  写成  $C q_1^{\alpha_1} \cdots q_k^{\alpha_k}$ ，要求两边质量、长度、时间的幂次分别相等，解出指数。 $C$  是无量纲常数，量纲分析给不出它；当可组成的无量纲组合不止一个时，结果中还会含有这些组合的未知函数。

标度论证比量纲分析多走一步：先根据物理图像判断哪些量“同一数量级”（例如“接触区内的应变约为压缩量除以接触半径”），再用这些粗略关系推出幂律。它给出指数和数量级，精确系数要靠完整求解。本讲反复使用这两种方法，并在每处用精确结果加以核对。

### 3.3 弹性半空间受点力：Boussinesq 解

**假设：半空间近似**

接触区的尺度  $a$  远小于物体的曲率半径和整体尺寸（ $a \ll R$ ）。在距接触区  $a$  的几倍处，应力已衰减到很小；所以计算接触区附近的形变时，可以把每个物体看成一个“无限大、表面为平面”的弹性体，即弹性半空间。小参量是  $a/R$ 。下文第 4 节的数值例中  $a/R \sim 10^{-2}$ 。

**要点：Boussinesq 点力解（只用其表面法向位移）**

在弹性半空间（ $E, \nu$ ）表面一点施加垂直于表面、指向内部的集中力  $F$ 。表面上距力作用点  $s$  处的法向（向内）位移为

$$u_z(s) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \frac{F}{s}. \quad (3.4)$$

这是 Boussinesq 在 19 世纪 70–80 年代求得的弹性力学精确解中的一部分（系统阐述见他 1885 年的专著）[4, 21]。完整推导见附录 A；下面先用量纲论证说明它的形式为什么只能是这样。

**推导：点力解的形式从何而来**

1. 线性：小形变下位移与力成正比， $u_z \propto F$ 。
2. 弹性模量：材料越硬位移越小。在给定  $\nu$  时位移只能通过  $F/E$  依赖于力和模量（ $F/E$  的量纲是面积）。
3. 长度：半空间没有任何内禀长度，唯一的长度是  $s$ 。 $u_z$  的量纲为长度，而  $F/E$  的量纲为长度的平方，所以  $u_z = g(\nu) F/(Es)$ 。
4. 无量纲函数  $g(\nu)$  只能由完整求解给出： $g = (1 - \nu^2)/\pi$ 。

$u_z \propto 1/s$  在  $s \rightarrow 0$  处发散，这是“集中力”的理想化造成的；真实载荷总分布在有限面积上，位移有限。

由于方程是线性的，分布载荷产生的位移等于各个面元  $dS'$  上的力  $p dS'$  产生的位移之和（叠加原理）：

$$u_z(\mathbf{r}) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint \frac{p(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.5)$$

这个积分就是附录 C 中求赫兹压强所产生位移的出发点。注意积分形式与“电荷面分布产生的静电势”完全相同（ $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  核），这个类比在附录中很有用。

**3.4 曲面的局部几何：间隙函数****推导：球面在接触点附近的形状**

把半径  $R_1$  的（上方）球面的最低点放在原点。离开对称轴距离  $r$  处，球面相对最低点的高度（向上为正）为

$$z_1(r) = R_1 - \sqrt{R_1^2 - r^2} = R_1 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{r^2}{R_1^2} \right)^{1/2} \right] = \frac{r^2}{2R_1} + \frac{r^4}{8R_1^3} + \dots$$

第二步是对  $(1 - x)^{1/2}$  在  $x = r^2/R_1^2 \ll 1$  处做泰勒展开。保留到  $r^2$  阶，丢掉的相对修正为  $r^2/(4R_1^2)$ 。另一个球（半径  $R_2$ ）在下方，表面比接触点低  $z_2 \approx r^2/(2R_2)$ 。两未形变表面之间的间隙为

$$h(r) = z_1 + z_2 = \frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \equiv \frac{r^2}{2R^*}, \quad \frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (3.6)$$

**检验：几种特例**

球压平面： $R_2 \rightarrow \infty$ ,  $R^* = R_1$ 。两等球： $R^* = R/2$ 。球放在半径更大的凹球窝里：凹面曲率半径取负值  $R_2 < 0$ ,  $|R_2| > R_1$ , 于是  $R^* > R_1$ , 接触更“服帖”。可见在接触问题里，几何只通过一个组合  $R^*$  进入，两个曲面等价于“半径  $R^*$  的球压在平面上”。完整推导（坐标约定、误差估计、一般曲面与主轴斜交物体、间隙如何进入接触条件）见附录 B。

## 4 赫兹接触

### 4.1 问题的提法

两个弹性体在一点相切，再用力  $F$  把它们压紧。远离接触区的参考点（例如两球心）相互靠近  $\delta$ ，叫压缩量。我们要求  $F(\delta)$ 、接触圆半径  $a$  和接触面上的压强分布  $p(r)$ 。

#### 假设：赫兹接触的假设

1. 线弹性：应变很小 ( $a/R \ll 1$ )，材料服从胡克定律，无塑性；
2. 半空间近似： $a \ll R_1, R_2$  (第 3.3 节)；
3. 表面光滑无摩擦：接触面上只有法向压强，没有切向力；
4. 无粘附：接触面上只能有压强 ( $p \geq 0$ )，不能有拉力；
5. 准静态：形变过程足够慢，弹性体内的惯性可以忽略 (第 5.5 节检查碰撞时是否满足)。

图 1(a) 画出了几何关系。如果两物体可以互相“穿透”，未形变的轮廓会重叠，重叠深度正好是  $\delta$ 。真实情况是两物体在接触区都被压下去，表面重合。设物体  $i$  表面在  $r$  处被压下的法向位移为  $u_i(r)$ 。未形变时，两表面在  $r$  处的间距是  $h(r)$ ；两物体整体靠近  $\delta$  后，若不变形，间距变为  $h(r) - \delta$  (负值表示穿透)；两表面再各被压下  $u_1, u_2$ ，间距变为  $h - \delta + u_1 + u_2$ 。接触区内这个间距为零，即

$$u_1(r) + u_2(r) = \delta - h(r) = \delta - \frac{r^2}{2R^*}, \quad r \leq a, \quad (4.1)$$

接触区外则要求两表面不重叠： $u_1 + u_2 > \delta - h(r)$  ( $r > a$ )。

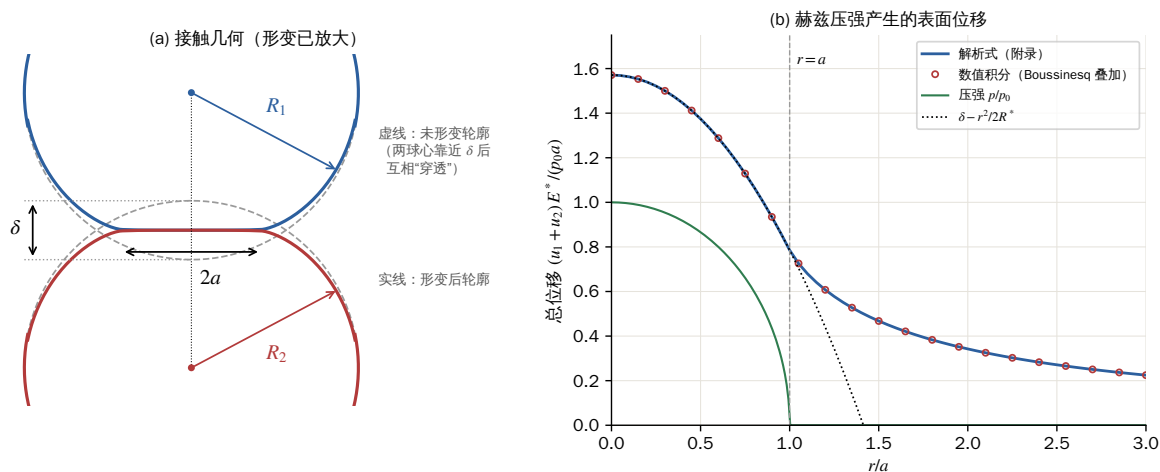


图 1 (a) 两等径同材料球的赫兹接触几何 (按赫兹解计算, 形变放大)。虚线为未形变轮廓 (两球心靠近  $\delta$  后互相“穿透”), 实线为形变后的轮廓, 接触区为半径  $a$  的圆。(b) 赫兹压强  $p = p_0 \sqrt{1 - r^2/a^2}$  (绿线) 产生的总表面位移: 圆圈为对式 (3.5) 的直接数值积分, 蓝线为附录 C 的解析式。在  $r < a$  内位移与要求的抛物线  $\delta - r^2/2R^*$  (点线) 重合;  $r > a$  处位移仍为正, 接触区外的表面也被带着下沉。

## 4.2 标度论证

先不求解，估计各量的数量级。

### 推导：接触半径、应变与力的标度

1. 几何：未形变轮廓重叠区的半径  $a_0$  由  $h(a_0) = \delta$  定出， $a_0 = \sqrt{2R^*\delta}$ 。真实接触半径与它同量级：

$$a \sim \sqrt{R^*\delta}. \quad (4.2)$$

2. 应变：接触区附近被压缩的物质的竖直尺度与水平尺度都是  $a$ （半空间里没有别的长度），在这个尺度上被压下了  $\delta$ ，所以典型应变  $\varepsilon \sim \delta/a \sim \sqrt{\delta/R^*}$ 。小形变要求  $\delta \ll R^*$ ，与  $a \ll R^*$  等价。

3. 应力与力：典型压强  $p \sim E^*\varepsilon \sim E^*\delta/a$ ，作用在面积  $\sim a^2$  上，

$$F \sim p a^2 \sim E^* a \delta \sim E^* \sqrt{R^*} \delta^{3/2}. \quad (4.3)$$

用 Boussinesq 解可以交叉检验：总力  $F$  分布在半径  $a$  的圆上，接触区内的位移  $\sim F/(E^*a)$ （式 (3.4) 中取  $s \sim a$ ），它应等于  $\delta$ ，同样给出  $F \sim E^*a\delta$ 。

### 要点：非线性从哪里来

$F \propto \delta^{3/2}$  而不是  $\propto \delta$ ：压得越深，接触面积越大（ $a \propto \delta^{1/2}$ ），“弹簧”越硬。非线性完全来自几何，材料本身仍然服从线性的胡克定律。刚度  $dF/d\delta \propto \delta^{1/2}$  在  $\delta \rightarrow 0$  时趋于零，这一点在第 6、7 节将起决定作用。

### 练习：其他形状的压头

用同样的标度论证说明：(1) 半顶角为  $\alpha$  的刚性圆锥压入平面， $F \propto E^*\delta^2 \tan \alpha$ （提示：接触半径  $a \propto \delta \tan \alpha$ ，应变  $\sim \delta/a$  与深度无关；锥越尖越容易压入）；(2) 半径为  $a$  的刚性平底圆柱压入平面， $F \propto E^*a\delta$ ，为线性关系。（精确结果分别是 Sneddon 的  $F = \frac{2}{\pi} E^*\delta^2 \tan \alpha$  与  $F = 2E^*a\delta$  [4]。）

## 4.3 精确解：赫兹压强分布

现在求系数。思路是“猜测—检验”：找一个压强分布  $p(r)$ ，使它在接触区内产生的位移恰好满足式 (4.1)，即为常数减去  $r^2$  的项，并满足  $p \geq 0$ 、在边界  $r = a$  处  $p \rightarrow 0$ （表面光滑地分离）。

### 推导：两物体位移的叠加与等效模量

接触面上两物体受到大小相等、方向相反的压强  $p(r)$ （牛顿第三定律）。由式 (3.5)，物体  $i$  的表面位移为

$$u_i(r) = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i} \iint \frac{p dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad i = 1, 2.$$

两式中的积分完全相同，只有前面的材料因子不同。相加得

$$u_1 + u_2 = \frac{1}{\pi E^*} \iint \frac{p \, dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}. \quad (4.4)$$

所以两个弹性体的接触等价于“等效模量  $E^*$  的弹性体与刚体接触”，两物体的柔度  $(1 - \nu^2)/E$  像串联弹簧一样相加。

#### 要点：赫兹压强分布及其位移（证明见附录 C）

半椭圆形压强分布

$$p(r) = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad r \leq a \quad (4.5)$$

在接触区内产生的总位移为

$$u_1(r) + u_2(r) = \frac{\pi p_0}{4aE^*} (2a^2 - r^2), \quad r \leq a. \quad (4.6)$$

它恰好是“常数减  $r^2$  项”的形式。附录 C 用一个只需极坐标积分的技巧算出这个积分；图 1(b) 用数值积分逐点核对了它（最大相对误差  $4 \times 10^{-9}$ ）。

#### 推导：确定 $p_0$ 、 $\delta$ 与 $F$

把式 (4.6) 代入接触条件式 (4.1)：

$$\frac{\pi p_0}{4aE^*} (2a^2 - r^2) = \delta - \frac{r^2}{2R^*} \quad \text{对所有 } r \leq a \text{ 成立.}$$

左右两边都是  $r^2$  的一次多项式，分别比较系数。

$r^2$  项： $\frac{\pi p_0}{4aE^*} = \frac{1}{2R^*}$ ，即

$$p_0 = \frac{2aE^*}{\pi R^*}. \quad (4.7)$$

常数项： $\delta = \frac{\pi p_0 a}{2E^*}$ ，代入式 (4.7) 得

$$\delta = \frac{a^2}{R^*} \quad \Longleftrightarrow \quad a = \sqrt{R^* \delta}. \quad (4.8)$$

总力等于压强对接触圆的积分，用  $dS = 2\pi r \, dr$ ，令  $x = r/a$ ：

$$F = \int_0^a p_0 \sqrt{1 - r^2/a^2} \, 2\pi r \, dr = 2\pi a^2 p_0 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, x \, dx = \frac{2}{3} \pi a^2 p_0.$$

代入式 (4.7) 与 (4.8)，得到  $F = \frac{4E^* a^3}{3R^*}$  和

$$F = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} \delta^{3/2} \equiv K \delta^{3/2}, \quad K = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*}. \quad (4.9)$$

#### 要点：赫兹接触公式汇总

由式 (4.7)–(4.9) 消去中间量，用力  $F$  表示：

$$a = \left( \frac{3FR^*}{4E^*} \right)^{1/3}, \quad \delta = \frac{a^2}{R^*} = \left( \frac{9F^2}{16E^{*2}R^*} \right)^{1/3}, \quad p_0 = \frac{3F}{2\pi a^2} = \frac{2E^*}{\pi} \left( \frac{\delta}{R^*} \right)^{1/2}. \quad (4.10)$$

最大压强是平均压强  $F/(\pi a^2)$  的  $3/2$  倍。注意  $a = \sqrt{R^* \delta}$  比“几何重叠半径”  $a_0 = \sqrt{2R^* \delta}$  小  $\sqrt{2}$  倍：接触区外的表面也被带着下沉（图 1(b) 中  $r > a$  处位移仍为正），所以真实接触圆比几何重叠圆小。

#### 注：为什么“猜”出的解就是答案

线弹性接触问题的解是唯一的（可以用能量方法证明，此处不展开 [4]）。式 (4.5) 满足全部条件：接触区内位移形式正确； $p \geq 0$ ； $p(a) = 0$ ，表面在边缘光滑分离；接触区外两表面不重叠（图 1(b) 中  $r > a$  时实际位移大于  $\delta - h$ ）。所以它就是解。如果压头是平底的，边缘压强会发散（ $p \propto 1/\sqrt{a^2 - r^2}$ ）。光滑球面不会出现这种奇异性，这正是光滑曲面接触的特点。

#### 检验：量纲、极限与赫兹本人的数值

- 量纲： $[E^* \sqrt{R^*} \delta^{3/2}] = \text{Pa} \cdot \text{m}^{1/2} \cdot \text{m}^{3/2} = \text{N}$ 。  $[p_0] = [E^*][\delta/R^*]^{1/2} = \text{Pa}$ 。
- 极限：  $E_2 \rightarrow \infty$ （刚性平面）时  $E^* = E_1/(1 - \nu_1^2)$ ，只有一个物体变形；两物体相同时  $E^* = E/[2(1 - \nu^2)]$ 。钢—钢  $E^* = 115.4 \text{ GPa}$ ，钢—玻璃  $E^* = 55.8 \text{ GPa}$ 。
- 与标度论证比较：式 (4.3) 的数量级估计被确认，精确系数为  $4/3$ ；  $a = \sqrt{R^* \delta}$  与式 (4.2) 同量级。
- 赫兹的透镜例子：玻璃透镜（ $R = 100 \text{ m}$ ）压在玻璃平板上， $F = 9.8 \text{ N}$ 。取  $E^* = 36.8 \text{ GPa}$ ，由式 (4.10) 得  $a = 2.71 \text{ mm}$ 、 $\delta = 74 \text{ nm}$ ；赫兹原文为  $2.67 \text{ mm}$  与  $71 \text{ nm}$ [1]，差别来自所取的玻璃弹性常数。 $\delta \approx 70 \text{ nm}$  约为可见光波长的  $1/8$ ，正好处在牛顿环干涉能分辨的范围：这就是赫兹出发的那个问题。
- 钢球静压：两只  $R = 10 \text{ mm}$  的钢球以  $F = 10 \text{ N}$  压紧， $a = 69 \mu\text{m}$ ， $\delta = 0.95 \mu\text{m}$ ， $p_0 = 1.0 \text{ GPa}$ 。 $a/R^* \approx 0.014$ ，半空间近似很好；但  $10 \text{ N}$ （约  $1 \text{ 千克力}$ ）就已产生  $1 \text{ GPa}$  的压强。

## 4.4 弹性势能与刚度

接触力只依赖于压缩量  $\delta$ ，且是弹性的（加载、卸载走同一条曲线），所以它是保守力，存在势能：

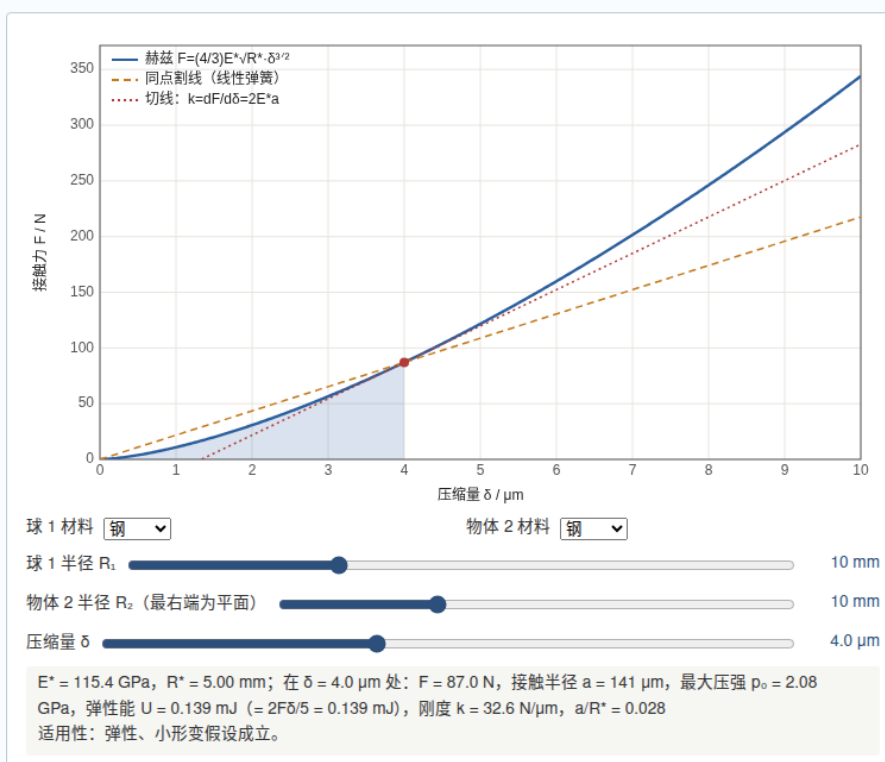
$$U(\delta) = \int_0^\delta K \delta'^{3/2} d\delta' = \frac{2}{5} K \delta^{5/2} = \frac{8}{15} E^* \sqrt{R^*} \delta^{5/2} = \frac{2}{5} F \delta. \quad (4.11)$$

同样的压缩量与终态力下，它是线性弹簧储能  $\frac{1}{2} F \delta$  的  $4/5$ ：赫兹“弹簧”一开始很软。刚度（切线斜率）为

$$k(\delta) = \frac{dF}{d\delta} = \frac{3}{2} K \delta^{1/2} = 2E^* a. \quad (4.12)$$

最后一个等号有简单的物理意义：刚度只由接触圆半径决定，与平底圆柱压头（半径  $a$ ）的  $2E^* a$  相同。

交互演示：赫兹接触的  $F-\delta$  曲线。选择材料与曲率半径，拖动压缩量  $\delta$ ：阴影面积为弹性势能  $U = \frac{2}{5}F\delta$ ，橙色虚线为同一点的线性弹簧（割线），红色点线为切线  $k = 2E^*a$ 。读数给出  $a$ 、 $p_0$ 、 $U$ ；当  $p_0$  超过  $1.6Y$ 、玻璃接触力超过 Auerbach 临界载荷（例 1 的量级估计）或  $a/R^* > 0.1$  时，读数以红字提示理想赫兹公式已不再适用。



网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 hertz-scaling）。

## 4.5 何时开始塑性屈服

赫兹理论假定纯弹性。由式 (4.10),  $p_0$  可达 GPa 量级, 必须检查材料是否屈服。

### 定义：屈服强度与屈服判据

单轴拉伸时材料开始发生不可恢复（塑性）形变的应力叫屈服强度  $Y$ 。金属塑性来自晶面之间的滑移，由切应力驱动。过物体内一点可以取各种方向的截面；可以证明总能找到三个相互垂直的截面，其上只有正应力、没有切应力，这三个正应力叫主应力，记最大、最小者为  $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$ 。该点各方向截面上切应力的最大值为  $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ （取与这两个主方向成  $45^\circ$  的截面）。常用的 Tresca 判据： $\tau_{\max}$  达到  $Y/2$  时屈服（单轴拉伸中  $\sigma_1 = \sigma$ 、 $\sigma_3 = 0$ ,  $\tau_{\max} = \sigma/2$ , 判据自洽）。

接触区表面上三个方向都受压，切应力反而不大；最大切应力出现在表面下方。弹性力学给出对称轴上 ( $r = 0$ , 深度  $z$ ) 的主应力（引用结果 [4]）：

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = -\frac{1}{1 + z^2/a^2}, \quad \frac{\sigma_r}{p_0} = \frac{\sigma_\theta}{p_0} = -(1 + \nu)\left(1 - \frac{z}{a} \arctan \frac{a}{z}\right) + \frac{1}{2(1 + z^2/a^2)},$$

负号表示压应力。于是  $\tau_{\max} = \frac{1}{2}|\sigma_z - \sigma_r|$ 。对  $z$  数值求极大 ( $\nu = 0.3$ ):  $\tau_{\max} \approx 0.31p_0$ , 位于深度

$z \approx 0.48a$  处。因此屈服起始条件为

$$p_0 \approx 1.6Y. \quad (4.13)$$

塑性首先在表面下方约半个接触半径深处萌生，被周围的弹性材料包围，表面上看不出来。这就是轴承“次表面疲劳”剥落的原因 [4]。低碳结构钢  $Y$  只有约 0.25 GPa，调质钢约 1 GPa，淬火轴承钢可达约 2 GPa。由上面的数值例，两只 10 mm 钢球静压 10 N 时  $p_0 \approx 1$  GPa，仍在弹性范围；碰撞时的压强则要高得多（见第 5.6 节）。

## 5 两球碰撞

### 5.1 相对运动方程

两球质量  $m_1, m_2$ ，沿连心线以相对速度  $v$  正碰。设球心位置为  $x_1 < x_2$ ，压缩量  $\delta = (x_1 - x_2) + (R_1 + R_2)$ （未接触时  $\delta < 0$ ，接触时  $\delta > 0$ ）。接触力  $F(\delta)$  沿连心线，大小相等方向相反：

$$m_1 \ddot{x}_1 = -F(\delta), \quad m_2 \ddot{x}_2 = +F(\delta).$$

第一式除以  $m_1$ ，第二式除以  $m_2$ ，相减：

$$\ddot{\delta} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)F \implies m^* \ddot{\delta} = -K\delta^{3/2}, \quad m^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.1)$$

这是一个质量为  $m^*$ （约化质量）、受非线性弹力的单自由度振子，初始条件  $\delta(0) = 0, \dot{\delta}(0) = v$ 。这里用到了准静态假设：每一时刻接触力由该时刻的  $\delta$  按静态赫兹公式给出，球体内部的弹性波已经“来得及”把力传开（第 5.5 节检验）。球落在固定的大质量平板上，取  $m_2 \rightarrow \infty, m^* = m_1, R^* = R_1$ 。

### 5.2 最大压缩量

式 (5.1) 乘以  $\dot{\delta}$  并对时间积分，得能量守恒：

$$\frac{1}{2}m^* \dot{\delta}^2 + \frac{2}{5}K\delta^{5/2} = \frac{1}{2}m^* v^2.$$

最大压缩时  $\dot{\delta} = 0$ ：

$$\delta_m = \left(\frac{5m^* v^2}{4K}\right)^{2/5} = \left(\frac{15m^* v^2}{16E^* \sqrt{R^*}}\right)^{2/5}. \quad (5.2)$$

相应的最大力与最大接触半径为  $F_m = K\delta_m^{3/2}$ 、 $a_m = \sqrt{R^* \delta_m}$ 。

### 5.3 接触时间

由能量守恒解出  $\dot{\delta} = v\sqrt{1 - (\delta/\delta_m)^{5/2}}$ 。压缩阶段从  $\delta = 0$  到  $\delta_m$ ，恢复阶段是它的时间反演（式 (5.1) 不含  $\dot{\delta}$ ，在  $t \rightarrow -t$  下不变），两段用时相等。于是

$$t_c = 2 \int_0^{\delta_m} \frac{d\delta}{\dot{\delta}} = \frac{2\delta_m}{v} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{5/2}}}, \quad x = \delta/\delta_m. \quad (5.3)$$

附录 D 把这个积分化成 B 函数 ( $B(x, y) \equiv \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ , 一种可查表的标准积分):  $\int_0^1 (1-x^{5/2})^{-1/2}dx = \frac{2}{5}B(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}) = 1.4716$ 。所以

$$t_c = 2.943 \frac{\delta_m}{v} = 2.943 \left( \frac{15 m^*}{16 E^* \sqrt{R^*}} \right)^{2/5} v^{-1/5}. \quad (5.4)$$

#### 检验：量纲分析与物理解释

$t_c$  只能依赖  $m^*$ 、 $K$  (量纲  $\text{kg m}^{-1/2} \text{s}^{-2}$ ) 与  $v$ 。令  $t_c \propto m^{*\alpha} K^\beta v^\gamma$ : 质量  $\alpha + \beta = 0$ ; 长度  $-\beta/2 + \gamma = 0$ ; 时间  $-2\beta - \gamma = 1$ 。解得  $\alpha = \frac{2}{5}$ 、 $\beta = -\frac{2}{5}$ 、 $\gamma = -\frac{1}{5}$ , 与式 (5.4) 一致。三个量只能组成一个时间, 所以量纲分析唯一确定了指数, 只有系数 2.943 需要计算。

- $t_c \propto v^{-1/5}$ : 撞得越快, 接触越短, 但依赖极弱, 速度增大 10 倍, 接触时间只缩短 37%。原因是赫兹“弹簧”压得越深越硬。线性弹簧的接触时间  $\pi\sqrt{m^*/k}$  与速度无关。
- 同种材料、等速时  $m^* \propto R^3$ ,  $t_c \propto (R^3/R^{1/2})^{2/5} = R$ : 接触时间正比于球的尺寸。
- 数值核对: 图 2 中用龙格-库塔法 (一种高精度的常微分方程数值解法) 积分式 (5.1) 得到的  $t_c$  与式 (5.4) 相对偏差  $< 10^{-5}$ , 拟合斜率  $-0.2000$ ; 分离速度等于接近速度 (到  $10^{-6}$ )。

### 5.4 数值例：钢球

两只半径  $R = 10 \text{ mm}$  的钢球 ( $m = 32.9 \text{ g}$ ,  $m^* = m/2$ ,  $R^* = R/2$ ,  $E^* = 115.4 \text{ GPa}$ ) 相撞, 结果列于表 2。

表 2 两只  $R = 10 \text{ mm}$  钢球正碰 (由式 (5.2)、(5.4)、(4.10) 计算; 数值积分逐项核对)

| $v / (\text{m/s})$ | $\delta_m / \mu\text{m}$ | $t_c / \mu\text{s}$ | $F_m / \text{N}$ | $a_m / \mu\text{m}$ | $p_0 / \text{GPa}$ |
|--------------------|--------------------------|---------------------|------------------|---------------------|--------------------|
| 0.1                | 3.24                     | 95.4                | 63               | 127                 | 1.87               |
| 0.3                | 7.80                     | 76.5                | 237              | 198                 | 2.90               |
| 1.0                | 20.4                     | 60.2                | 1005             | 320                 | 4.70               |
| 3.0                | 49.2                     | 48.3                | 3757             | 496                 | 7.29               |

几个值得注意的数: 以  $1 \text{ m/s}$  相撞, 峰值力约  $1 \text{ kN}$ , 是球重的约 3000 倍, 而压缩量只有  $20 \mu\text{m}$ 。接触时间几十微秒, 正是实验中用计数器或示波器能测的量级 (第 10 节)。赫兹的例子 ( $R = 25 \text{ mm}$  钢球,  $v = 10 \text{ mm/s}$ ) 用式 (5.4) 算得  $t_c = 378 \mu\text{s}$ 、 $a_m = 0.127 \text{ mm}$ , 与原文的  $380 \mu\text{s}$ 、 $0.13 \text{ mm}$  一致; 地球大小的钢球按  $t_c \propto R$  放大得 26.7 小时 [1]。

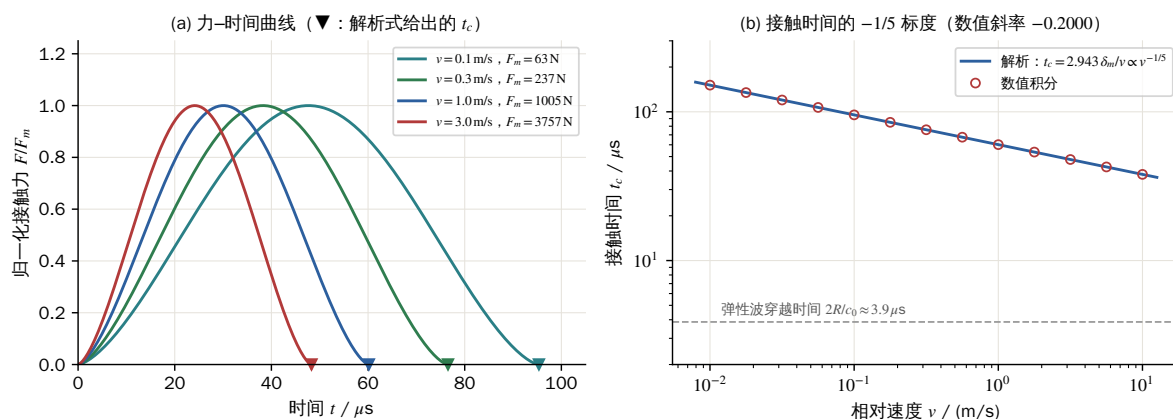
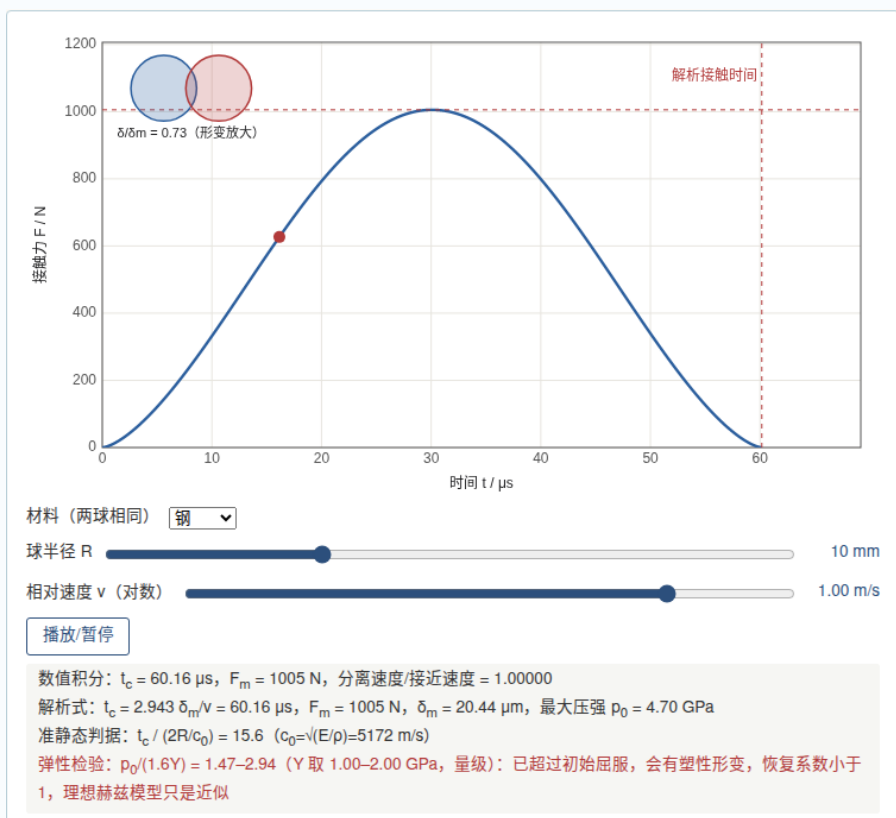


图 2 两只  $R = 10\text{ mm}$  钢球正碰。(a) 数值积分得到的接触力-时间曲线 (以各自的  $F_m$  归一化), 三角为式 (5.4) 给出的接触时间; 曲线关于  $t_c/2$  对称 (时间反演)。(b) 接触时间随相对速度的变化 (对数坐标): 圆圈为数值积分, 直线为式 (5.4), 斜率  $-1/5$ ; 虚线为纵波穿过球直径的时间  $2R/c_0$ 。

**交互演示：两球碰撞的力-时间曲线。**改变材料、球半径与相对速度 (对数滑块): 读数比较 RK4 数值积分与解析式 (5.4) 的  $t_c$ 、 $F_m$ , 并给出准静态判据  $t_c/(2R/c_0)$  与弹性检验  $p_0/(1.6Y)$ 。超过初始屈服时读数以红字提示: 真实碰撞会有塑性损耗, 恢复系数小于 1, 理想模型给出的“分离速度/接近速度 = 1”只是近似。对玻璃, 读数给出接触边缘拉应力, 并按 Auerbach 判据 (例 1) 估计是否锥裂。左上角为形变放大的两球示意。



网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 hertz-collision)。

### 5.5 准静态近似何时成立

式 (5.1) 假设接触力随  $\delta$  瞬时调整。实际上, 接触区的应力要靠弹性波传遍整个球, 球才作为整体减速。只有碰撞持续时间远大于弹性波穿过球所需的时间, 才能把每一时刻看成静态平衡:

$$t_c \gg \frac{2R}{c_0}. \quad (5.5)$$

#### 推导: 判据的标度

同材料等径球:  $m^* = \frac{2}{3}\pi\rho R^3$ ,  $R^* = R/2$ ,  $E^* = E/[2(1 - \nu^2)]$ 。代入式 (5.2),  $\delta_m/R \propto (\rho v^2/E)^{2/5} = (v/c_0)^{4/5}$ 。于是

$$\frac{t_c}{2R/c_0} = \frac{2.943}{2} \frac{\delta_m}{R} \frac{c_0}{v} \propto \left(\frac{v}{c_0}\right)^{4/5} \frac{c_0}{v} = \left(\frac{c_0}{v}\right)^{1/5}.$$

由于  $v \ll c_0$ , 比值很大, 但增长极慢 (五分之一次方)。钢球 ( $c_0 = 5.17 \text{ km/s}$ ) 以  $1 \text{ m/s}$  相撞时  $t_c/(2R/c_0) = 15.6$ ; 即使以  $3 \text{ m/s}$  相撞, 比值仍为  $12.5$  (表 2 的数据, 见图 2(b) 的虚线)。

准静态成立时, 碰撞中转化为球内弹性振动和波的能量很少。Hunter (1957) 与 Reed (1985) 专门估算了这部分能量 [22, 23], 对于  $v \ll c_0$  的碰撞它只占入射动能的很小一部分 (Reed 指出 Hunter 的估计偏低约 4.5 倍, 但结论的量级不变)。

### 5.6 恢复系数

#### 定义: 恢复系数

正碰后两物体的分离速度与碰前接近速度之比,  $e = |\dot{\delta}(t_c)|/v$ 。  $e = 1$  为完全弹性碰撞。

**理想赫兹碰撞完全弹性** 式 (5.1) 中的力是保守力 (只依赖于  $\delta$ 、单值), 且方程具有时间反演对称性, 所以分离时  $\dot{\delta} = -v$ ,  $e = 1$ 。这是在线弹性、准静态和无内耗三条假设下才成立的结论。真实碰撞中  $e < 1$ , 原因有三类:

1. 塑性屈服。由式 (4.10),  $p_0 = \frac{2E^*}{\pi}(\delta_m/R^*)^{1/2}$ , 而  $(\delta_m/R^*)^{5/2} = 15m^*v^2/(16E^*R^3)$ 。令  $p_0 = 1.6Y$  (式 (4.13)), 对球 (半径  $R$ 、密度  $\rho$ ) 撞刚性平板 ( $m^* = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ ,  $R^* = R$ ) 解出屈服速度:

$$\frac{\rho v_Y^2}{Y} = \frac{4}{5\pi}(0.8\pi)^5 \left(\frac{Y}{E^*}\right)^4 \approx 26 \left(\frac{Y}{E^*}\right)^4. \quad (5.6)$$

与 Johnson 书中给出的系数 26 一致 [4]。式中没有  $R$ : 屈服速度与球的大小无关。钢球撞钢板,  $Y = 1 \text{ GPa}$  时  $v_Y \approx 0.14 \text{ m/s}$ ,  $Y = 2 \text{ GPa}$  时约  $0.77 \text{ m/s}$ ; 两等球相撞时  $m^*/R^3$  是球撞平板时的 4 倍, 相对屈服速度减半。所以日常的钢球碰撞往往已经轻微超过初始屈服。不过塑性区很小, 被弹性材料包围, 能量损失有限, 恢复系数仍接近 1, 并随速度增大而缓慢减小 [4]。

2. 粘弹性内耗。材料内部的分子摩擦使接触力多出一项与形变速率有关的耗散力, Brilliantov 等由准静态粘弹性理论推出了它的形式 ( $\propto \sqrt{\delta} \dot{\delta}$ ) [24]。Kuwabara 与 Kono 由此得到  $1 - e \propto v^{1/5}$  [25]: 速度越大,  $e$  越小, 但依赖很弱。

3. 表面粗糙与振动激发。表面微凸体先接触、先屈服；球体振动模式会带走少量能量（第 5.5 节）。

## 6 牛顿摆：为什么只弹出一个球

### 6.1 守恒律不够

$N$  个质量都为  $m$  的球排成一列，第 1 个以  $v_0$  撞入，其余静止。设末态速度为  $v_1, \dots, v_N$ 。动量与能量守恒给出

$$\sum_{n=1}^N v_n = v_0, \quad \sum_{n=1}^N v_n^2 = v_0^2. \quad (6.1)$$

$N$  个未知数、两个方程。 $N = 2$  时，除平凡解（未碰撞）外只有“交换速度”一解。 $N \geq 3$  时有无穷多解。例如  $N = 3$ ， $(v_1, v_2, v_3) = (0, 0, v_0)$  满足式 (6.1)， $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})v_0$  也满足。所以“为什么只飞出一个”不是守恒律能回答的，答案取决于球之间的相互作用力律 [6]。

### 6.2 有间隙的球：二体碰撞序列

如果相邻球之间有微小间隙  $g$ ，且  $g$  远大于碰撞的最大压缩量  $\delta_m$ ，那么第 1、2 球的碰撞在第 2 球碰到第 3 球之前就已结束。每次碰撞都是等质量的完全弹性二体碰撞，速度完全交换： $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow N$ ，最后只有第  $N$  个球以  $v_0$  飞出，其余全部静止。这是教科书上“进一出”的理想情形。由第 5 节， $\delta_m$  只有几到几十微米，所以几十微米的间隙就已足够。

### 6.3 紧贴的球：多体问题

真实的牛顿摆通常是紧贴的（零间隙、零预压）。这时第 1 个球还没停下，压缩已传到第 3、4 个球，多个接触同时受压，必须解  $N$  体运动方程

$$m\ddot{u}_n = F(u_{n-1} - u_n) - F(u_n - u_{n+1}), \quad F(\psi) = \begin{cases} A\psi^\beta, & \psi > 0 \\ 0, & \psi \leq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

其中  $u_n$  是第  $n$  个球离开初始位置的位移， $\psi = u_{n-1} - u_n$  是相邻两球的压缩量。 $F = 0$  ( $\psi \leq 0$ ) 表示球只能互相推、不能互相拉。赫兹接触  $\beta = 3/2$ ；作为对照， $\beta = 1$  是“只压不拉”的线性弹簧。在压缩区内， $\beta = 1$  的单边链与下面式 (6.3) 的双边线性链方程完全相同，区别只在于接触分离后不再有拉力。

**要点：标度不变性：结果与撞击速度、刚度无关**

在式 (6.2) 中令  $u_n = \lambda \tilde{u}_n$ ， $t = T\tilde{t}$ ，取  $T = (m/(A\lambda^{\beta-1}))^{1/2}$ ，方程变为  $\tilde{u}_n'' = \tilde{F}(\tilde{u}_{n-1} - \tilde{u}_n) - \tilde{F}(\tilde{u}_n - \tilde{u}_{n+1})$ ，其中  $\tilde{F}(\psi) = \psi^\beta$  ( $\psi > 0$ )，不含任何参数。初速度  $v_0$  可用  $\lambda$  吸收（取  $\lambda/T = v_0$ ）。所以末态速度比  $v_n/v_0$  只依赖于  $N$  和指数  $\beta$ ，与  $v_0$ 、 $A$ 、 $m$  都无关。这也是交互演示可以用“很软”的接触来放慢动画、而不改变结果的原因。

图 3(a) 给出 5 球牛顿摆的数值结果。赫兹接触下末球获得  $0.989v_0$ ，第 4 球  $0.127v_0$ ，前三个球以  $-0.071v_0$ 、 $-0.030v_0$ 、 $-0.014v_0$  后退；动量和、动能和分别守恒到  $10^{-10}$  与  $10^{-7}$ 。末球带走

97.8% 的能量，其余球速度很小，肉眼看来就是“只飞出一个”。线性弹簧链的末球只有  $0.942v_0$ ，第 4 球却有  $0.296v_0$ ，“多球飞出”明显得多。Hinch 与 Saint-Jean 对长链的计算给出末端两球  $0.986V$ 、 $0.149V$ ，撞入球反弹  $-0.07V$ [7]，与我们 5 球的结果定性一致（末两球分别为  $0.989v_0$  与  $0.127v_0$ ，撞入球  $-0.071v_0$ ）。

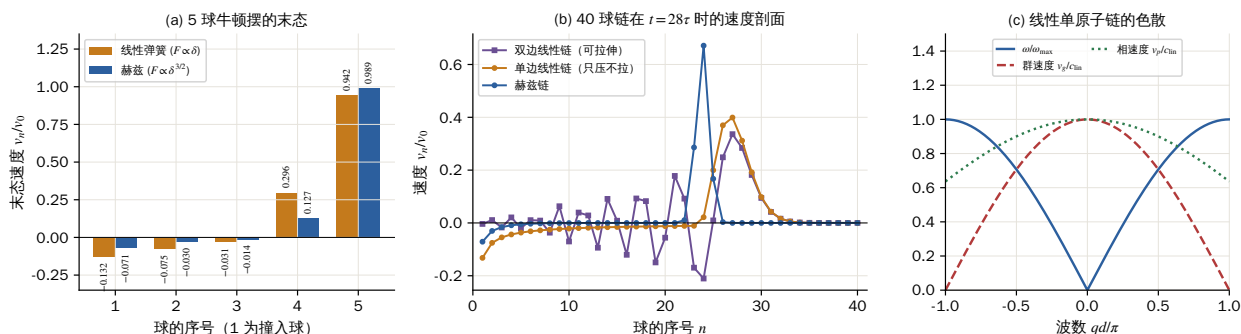


图 3 (a) 5 球紧贴牛顿摆的末态速度（式 (6.2) 的数值解，单位  $m = A = v_0 = 1$ ）。(b) 40 球链中同一时刻 ( $t = 28\tau$ ,  $\tau = (m/A)^{2/5}v_0^{-1/5}$  为赫兹链的特征时间，此处为 1；线性链取  $k = 1$ ，其时间单位  $\sqrt{m/k}$  也为 1) 的速度剖面：可拉伸的双边线性链（紫）后方拖着明显的振荡尾巴（色散）；只压不拉的单边线性链（橙）脉冲展宽到约 7 个球，后方是一长段缓慢后退的区域，振荡被“接触分离”截掉；赫兹链的脉冲只占约 3 个球。(c) 线性单原子链的色散关系式 (6.4)、群速度与相速度（以长波声速  $c_{lin}$  为单位）。

## 6.4 色散：线性链的对照

为什么线性链会“散开”？考虑线性弹簧（刚度  $k$ ，允许拉伸）连接的无限长等质量链，运动方程为

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}). \quad (6.3)$$

（第 41 届决赛考过双原子链，这里只用单原子链作为对照。）

### 推导：色散关系

代入试探解  $u_n = Ue^{i(qnd - \omega t)}$  ( $d$  为相邻球心间距， $q$  为波数)。左边  $m\ddot{u}_n = -m\omega^2 u_n$ ；右边  $k(e^{iqd} - 2 + e^{-iqd})u_n = -2k(1 - \cos qd)u_n = -4k \sin^2(qd/2)u_n$ 。两边约去  $u_n$ ：

$$\omega(q) = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \left| \sin \frac{qd}{2} \right|. \quad (6.4)$$

长波 ( $qd \ll 1$ ) 时  $\omega \approx d\sqrt{k/m}q$ ，所有长波以同一速度  $c_{lin} = d\sqrt{k/m}$  传播，就是连续弹性介质中的声速。

### 前置知识：相速度、群速度与色散

单色波  $e^{i(qx - \omega t)}$  的波峰以相速度  $v_p = \omega/q$  移动。任何形状的脉冲都可以写成许多单色波的叠加（傅里叶分解） $u(x) = \int U(q)e^{iqx}dq$ ；脉冲宽度  $\Delta x$  越小，所需的波数范围  $\Delta q \sim 1/\Delta x$  越大。一个波包由许多相近的  $q$  叠加而成。取两个分量  $q \pm \Delta q$ ，叠加得  $2\cos(\Delta qx - \Delta\omega t)e^{i(qx - \omega t)}$ ，包络以  $\Delta\omega/\Delta q$  移动，所以包络（能量）以群速度  $v_g = d\omega/dq$  传播。若  $\omega(q)$  不是  $q$  的正比函数，不同波长的分量跑得不一樣快，波包会展宽，这叫色散。

由式 (6.4),  $v_g = d\sqrt{k/m} \cos(qd/2)$ , 短波 ( $qd \rightarrow \pi$ ) 的群速度趋于零 (图 3(c))。任何脉冲都可以写成许多不同波数的正弦波之和 (傅里叶分解), 脉冲越窄, 所需的短波成分越多。一次碰撞产生的脉冲很尖, 短波成分很多, 这些成分跑得慢, 于是脉冲展宽、后面拖着振荡尾巴 (图 3(b) 紫线)。对于只压不拉的单边线性链 (橙线), 压缩部分的传播与双边链相同, 但尾巴中本应出现拉伸的地方接触分离了, 振荡被截掉, 只剩下展宽的主脉冲和后方的缓慢后退区; 色散导致展宽这一结论在定性上不变。到达链末端时, 能量分摊到好几个球上, 就会有几个球一起飞出。Hinch 与 Saint-Jean 的计算表明, 线性力律下飞出的球数约为  $1.5N^{1/3}$ [7]。

## 6.5 赫兹链：声真空

赫兹链的情况根本不同。先看有静态预压力  $F_0$  的链：每个接触有静压缩  $\psi_0 = (F_0/A)^{2/3}$ 。在它附近做小振动, 等效线性刚度为切线斜率  $k_0 = \frac{3}{2}A\psi_0^{1/2}$  (式 (4.12)), 长波声速为

$$c_{\text{lin}} = d\sqrt{\frac{k_0}{m}} = d\sqrt{\frac{3A}{2m}} \left(\frac{F_0}{A}\right)^{1/6} \propto F_0^{1/6}. \quad (6.5)$$

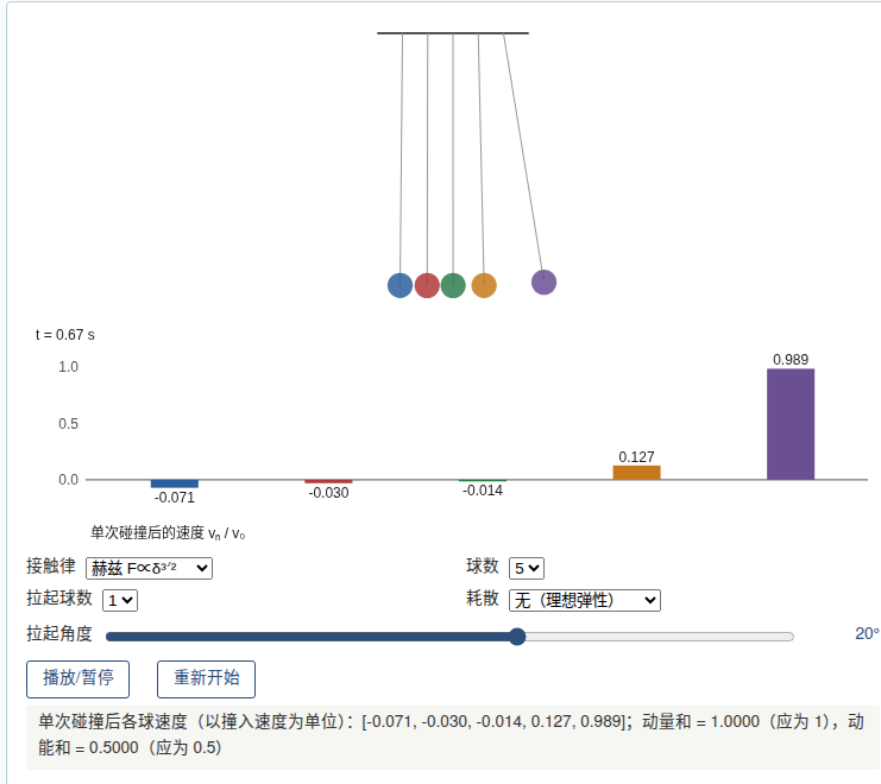
当  $F_0 \rightarrow 0$  时线性声速趋于零。无预压的赫兹链里不存在线性声波, 任何扰动都是“强非线性”的。Nesterenko 把这种介质称为声真空 [11]。

### 检验：与实验的预压声速比较

Daraio 等用直径 4.76 mm 的不锈钢球 ( $E = 193 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ ) 做实验 [14]。仅有重力预压 ( $F_0 \approx 0.062 \text{ N}$ ) 时, 由式 (6.5) 算得  $c_{\text{lin}} = 293 \text{ m/s}$ ; 加磁力预压后总预压 2.44 N, 算得 540 m/s。原文给出的长波近似值分别为 292.6 m/s 与 539.6 m/s, 与之一致。这两个速度都比钢中声速 5 km/s 小一个数量级。

没有线性声速, 就没有“所有长波都一样快”的基准。脉冲的传播速度取决于它自身的振幅：振幅大处更“硬”、跑得快, 非线性有使波前变陡的趋势; 离散性 (色散) 又使脉冲展宽。两者在某个固定宽度上达到平衡, 形成一个形状不变的孤立波。这正是图 3(b) 中赫兹链脉冲始终紧凑的原因, 也是 Herrmann 与 Schmälzle 所说的“无色散传递”的物理实质 [6]。下一节定量地求出这个孤立波。

交互演示：牛顿摆动画（小角度单摆 + 相邻球的接触力）。切换赫兹接触、线性弹簧与“赫兹 + 小间隙”，改变球数与拉起的球数，可选粘弹性耗散。下方柱状图为单次碰撞后各球速度。可以看到：有间隙时严格“进一出”；紧贴时第 4 球也被带出少许；开启耗散并长时间运行，球列逐渐趋于整体摆动（Hutzler 等的发现 [8]）。



网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 hertz-cradle）。

## 7 Nesterenko 孤立波

### 7.1 离散方程与标度对称性

考虑一系列相同的弹性球（直径  $d = 2R$ ，质量  $m = \frac{\pi}{6}\rho d^3$ ），初始时恰好相切、无预压。第  $n$  个球的位移为  $u_n$ ，第  $n-1$  与第  $n$  个球之间的接触压缩量为  $\psi_n = u_{n-1} - u_n$ 。由式 (4.9)，等径同材料球  $R^* = R/2 = d/4$ 、 $E^* = E/[2(1-\nu^2)]$ ，接触系数

$$A = \frac{4}{3}E^*\sqrt{R^*} = \frac{E\sqrt{d}}{3(1-\nu^2)} = \frac{E\sqrt{2R}}{3(1-\nu^2)}. \quad (7.1)$$

运动方程为（括号下标 + 表示只取正值）

$$m\ddot{u}_n = A[(\psi_n)_+^{3/2} - (\psi_{n+1})_+^{3/2}]. \quad (7.2)$$

用  $\psi$  表示更简洁： $\ddot{\psi}_n = \ddot{u}_{n-1} - \ddot{u}_n$ ，代入两次式 (7.2)。在孤立波所在的区域，各接触都处于压缩状态 ( $\psi > 0$ )，可以去掉“取正值”的记号：

$$m\ddot{\psi}_n = A[\psi_{n-1}^{3/2} - 2\psi_n^{3/2} + \psi_{n+1}^{3/2}]. \quad (7.3)$$

右边是  $f = \psi^{3/2}$  的二阶差分，与线性链式 (6.3) 结构相同，只是对象从位移换成了“力”。

**要点：标度对称性：精确的振幅依赖**

若  $\psi_n(t)$  是式 (7.3) 的解，则对任意  $\lambda > 0$ ,

$$\tilde{\psi}_n(t) = \lambda \psi_n(\lambda^{1/4}t) \quad (7.4)$$

也是解（下面用  $\Delta^2 f_n \equiv f_{n-1} - 2f_n + f_{n+1}$  表示二阶差分）。验证：左边  $m\ddot{\tilde{\psi}}_n = \lambda \cdot \lambda^{1/2} m\ddot{\psi}_n$ ，右边  $A\Delta^2(\lambda^{3/2}\psi^{3/2}) = \lambda^{3/2}A\Delta^2\psi^{3/2}$ ，两边同为  $\lambda^{3/2}$  倍。因此，若存在一个孤立波，把它的振幅放大  $\lambda$  倍，就得到一个快  $\lambda^{1/4}$  倍、空间形状（以球数计）完全相同的孤立波。由此得到精确结论：

$$V_s \propto \psi_m^{1/4}, \quad v_m \propto \frac{\psi_m}{T} \propto \psi_m^{5/4}, \quad F_m = A\psi_m^{3/2} \Rightarrow V_s \propto F_m^{1/6} \propto v_m^{1/5}, \quad (7.5)$$

其中  $T \propto \psi_m^{-1/4}$  是孤立波掠过一个球所需的时间。宽度与振幅无关。这些指数不依赖于任何近似，下面的长波近似只用来求前因子与剖面形状。

**7.2 长波近似****假设：长波近似**

设孤立波的空间尺度  $L$  远大于球径  $d$ ，把离散的  $u_n(t)$  看成连续场  $u(x, t)$  在  $x = nd$  处的取值，相邻球的位移用泰勒级数相联系。小参量是  $d/L$ ，保留到  $(d/L)^2$  阶，即对差分保留到  $d$  的四阶导数项（相对主项为  $d^2$  阶）。警告：后面将看到孤立波宽度约  $5d$ ，所以  $d/L$  只有约 0.2，并不真正很小。长波近似给出的剖面与前因子只有百分之几的精度，必须用离散数值解检验（第 7.4 节）。

定义压缩应变  $w(x, t) = -\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ （压缩为正）。附录 E 逐步完成如下三个展开：

1. 第  $n$  个球受的合力是两侧接触力之差，接触位于  $x \mp d/2$ ，所以  $m\ddot{u} = f(x - \frac{d}{2}) - f(x + \frac{d}{2}) = -d f' - \frac{d^3}{24} f''' + \dots$ ；
2. 接触压缩量  $\psi(x) = u(x - \frac{d}{2}) - u(x + \frac{d}{2}) = d w + \frac{d^3}{24} w'' + \dots$ ；
3. 把 2 代入  $f = \psi^{3/2}$  并展开（要求  $d^2 w''/w \ll 1$ ），再代入 1，整理后对  $x$  求一次导数，得到应变场满足的方程。

结果是 Nesterenko 的长波方程 [9, 11]：

$$w_{tt} = c^2 \left[ w^{3/2} + \frac{d^2}{10} w^{1/4} (w^{5/4})_{xx} \right]_{xx}, \quad c^2 = \frac{A d^{5/2}}{m} = \frac{2E}{\pi \rho (1 - \nu^2)}. \quad (7.6)$$

方括号中第一项是连续介质的非线性“应力”（赫兹律），第二项来自离散性（色散）。如果把赫兹律换成线性律，第一项变成  $w$ ，就回到普通的波动方程加色散修正。

## 7.3 行波解：余弦四次方剖面

**推导：从偏微分方程到常微分方程**

设  $w = w(z)$ ,  $z = x - V_s t$  (以速度  $V_s$  向右传播、形状不变)。则  $\partial_t = -V_s d/dz$ ,  $\partial_x = d/dz$ , 式 (7.6) 变为

$$V_s^2 w'' = c^2 \left[ w^{3/2} + \frac{d^2}{10} w^{1/4} (w^{5/4})'' \right].$$

对  $z$  积分两次。孤立波前方的球静止且无预压 ( $z \rightarrow +\infty$  时  $w$  及其各阶导数为零), 两个积分常数都为零:

$$V_s^2 w = c^2 \left[ w^{3/2} + \frac{d^2}{10} w^{1/4} (w^{5/4})'' \right]. \quad (7.7)$$

**推导：幂函数代换与首次积分**

令  $y = w^{5/4}$ , 则  $w = y^{4/5}$ 、 $w^{1/4} = y^{1/5}$ 、 $w^{3/2} = y^{6/5}$ 。式 (7.7) 两边除以  $c^2 w^{1/4} = c^2 y^{1/5}$ :

$$\frac{d^2}{10} y'' = \frac{V_s^2}{c^2} y^{3/5} - y.$$

这是一个“非线性振子”方程：把  $z$  看成时间,  $y$  看成坐标, 右边就是“力”。与振子一样, 乘以  $y'$  后可以积分一次 (相当于能量守恒)。孤立波前方  $y = y' = 0$ , 积分常数为零:

$$\frac{d^2}{20} y'^2 = \frac{5}{8} \frac{V_s^2}{c^2} y^{8/5} - \frac{1}{2} y^2.$$

右边两项的幂次不同。代换  $y = B s^5$  ( $s$  为待求函数, 最大值为 1) 使它们统一:  $y'^2 = 25 B^2 s^8 s'^2$ ,  $y^{8/5} = B^{8/5} s^8$ ,  $y^2 = B^2 s^{10}$ 。两边除以  $B^2 s^8$ :

$$\frac{5d^2}{4} s'^2 = \frac{5}{8} \frac{V_s^2}{c^2} B^{-2/5} - \frac{1}{2} s^2.$$

$s$  的最大值为 1 时  $s' = 0$ , 所以  $\frac{5}{8} \frac{V_s^2}{c^2} B^{-2/5} = \frac{1}{2}$ , 即  $B^{2/5} = \frac{5V_s^2}{4c^2}$ 。方程化为

$$s'^2 = \kappa^2 (1 - s^2), \quad \kappa^2 = \frac{2}{5d^2},$$

其解 (取峰在  $z = 0$ ) 为  $s = \cos(\kappa z)$ ,  $\kappa = \sqrt{10}/(5d)$ 。这就是余弦出现的原因:  $s$  满足的正是简谐振动的“能量方程”。 $s$  降到 0 时 ( $|\kappa z| = \pi/2$ ),  $y$ 、 $y'$ 、 $y''$  都为零 (方程只含到二阶导数), 所以此后取  $w \equiv 0$ , 可以与前方的静止区光滑衔接。回到  $w = y^{4/5} = B^{4/5} \cos^4(\kappa z)$ , 记  $\xi_m = B^{4/5}$  为最大应变, 则  $\xi_m = \left(\frac{5V_s^2}{4c^2}\right)^2$ 。我们把  $w \neq 0$  的区间  $|\kappa z| < \pi/2$  称为孤立波的支撑区, 其长度为“总宽度”。

**要点：Nesterenko 孤立波**

$$w(x, t) = \xi_m \cos^4 \left[ \frac{\sqrt{10}}{5d} (x - V_s t) \right], \quad |x - V_s t| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{5d}{\sqrt{10}}, \quad (7.8)$$

在此区间外  $w = 0$ 。总宽度  $\pi\sqrt{5/2}d \approx 4.97d$ , 约 5 个球径, 与振幅无关。波速

$$V_s = \frac{2}{\sqrt{5}} c \xi_m^{1/4}. \quad (7.9)$$

**推导：换成可测量：最大接触力与最大粒子速度**

(1) 最大接触力：取主阶关系  $\psi_m \approx d\xi_m$ ,  $F_m = A\psi_m^{3/2}$ , 所以  $\xi_m = (F_m/A)^{2/3}/d$ 。代入式 (7.9),  $\xi_m^{1/4} = (F_m/A)^{1/6}d^{-1/4}$ , 并用  $c = (Ad^{5/2}/m)^{1/2}$ :

$$V_s = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{A^{1/3}d}{m^{1/2}} F_m^{1/6}.$$

再代入  $A = Ed^{1/2}/[3(1-\nu^2)]$  (式 (7.1)) 与  $m = \frac{\pi}{6}\rho d^3$ :  $A^{1/3} = \frac{E^{1/3}d^{1/6}}{3^{1/3}(1-\nu^2)^{1/3}}$ ,  $m^{-1/2} = (\frac{6}{\pi})^{1/2}\rho^{-1/2}d^{-3/2}$ , 所以

$$V_s = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/2} 3^{-1/3} \frac{E^{1/3}}{(1-\nu^2)^{1/3}\rho^{1/2}d^{1/3}} F_m^{1/6} = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/2} 6^{-1/3} \left[\frac{2E}{d\rho^{3/2}(1-\nu^2)}\right]^{1/3} F_m^{1/6},$$

数值系数  $0.8944 \times 1.3820 \times 0.5503 = 0.6802$ , 即

$$V_s = 0.6802 \left[\frac{2E}{d\rho^{3/2}(1-\nu^2)}\right]^{1/3} F_m^{1/6}. \quad (7.10)$$

这正是 Daraio 等文中使用的公式 [14]。

(2) 最大粒子速度：行波中  $\partial_t u = -V_s \partial_z u = V_s w$ , 所以  $v_m = V_s \xi_m$ 。代入式 (7.9) 消去  $\xi_m$ :  $V_s = \frac{2}{\sqrt{5}} c (v_m/V_s)^{1/4}$ , 即

$$V_s = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{4/5} c^{4/5} v_m^{1/5} = 0.915 c^{4/5} v_m^{1/5}. \quad (7.11)$$

两个指数 1/6、1/5 与标度对称性给出的式 (7.5) 一致。

**检验：量纲与数量级**

$[c^{4/5}v_m^{1/5}] = \text{m/s}$ 。式 (7.10) 方括号的量纲为  $\text{Pa}/(\text{m} \cdot \text{kg}^{3/2}\text{m}^{-9/2}) = \text{m}^{5/2}\text{kg}^{-1/2}\text{s}^{-2}$ , 其 1/3 次方 ( $\text{m}^{5/6}\text{kg}^{-1/6}\text{s}^{-2/3}$ ) 乘以  $F^{1/6}$  ( $\text{kg}^{1/6}\text{m}^{1/6}\text{s}^{-1/3}$ ) 得  $\text{m/s}$ 。钢球链  $d = 5 \text{ mm}$  中  $c = 4.33 \text{ km/s}$ ; 撞入速度  $0.1 \text{ m/s}$  时  $V_s \approx 430 \text{ m/s}$ , 比钢中声速慢一个数量级 (图 5)。

**7.4 数值验证**

我们用速度 Verlet 法 (附录 F) 积分 50 球链的式 (7.2)。第 1 球以  $v_0$  撞入 (相当于一个与链中球相同的撞击器), 能量相对误差  $< 10^{-7}$ 。结果见图 4、5 与表 3。

**要点：数值验证的结论**

1. 前因子 (真正检验长波近似的量)：离散链的  $C = 0.906$  位于两种长波近似之间，比式 (7.10) 快约 1.2%。两种同样“正确到  $(d/L)^2$  阶”的长波近似彼此相差 2%，因为  $d/L \approx 0.2$  不够小，高阶项不可忽略。实验精度 (约 5%) 下，式 (7.10) 完全够用。
2. 剖面形状： $\cos^4$  很好地描述了离散孤立波 (近似 I 的均方根偏差 1.4%)。真实的离散孤立波没有严格的边界，尾部以“双指数”方式 (比任何指数衰减都快) 衰减 [26]; 99.9% 的压缩集中在约  $5d$  内，与“约 5 个球径”一致。

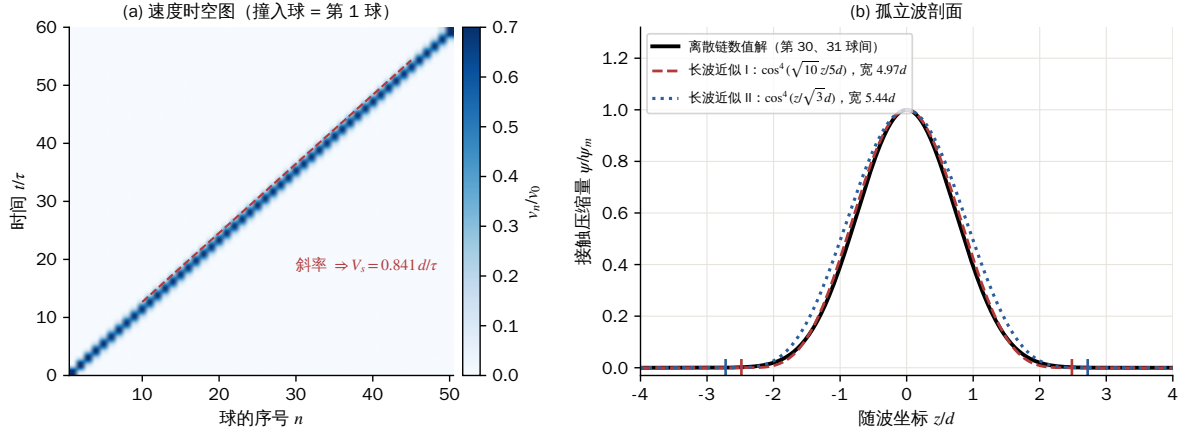


图 4 (a) 50 球赫兹链的速度时空图 (单位  $m = A = v_0 = 1$ , 位置以球的序号计, 时间单位  $\tau = (m/A)^{2/5} v_0^{-1/5}$ ): 撞击后迅速形成一个孤立波并匀速传播, 红色虚线为拟合的传播轨迹。(b) 第 30、31 球间接触压缩量随时间的变化, 换算成随波坐标  $z = V_s(t - t_{\text{peak}})$  后与长波近似的  $\cos^4$  剖面比较。近似 I 为式 (7.8) (Nesterenko), 近似 II 为附录 E 中以  $\psi$  为变量的另一种长波近似; 竖线标出两者的支撑区边界。

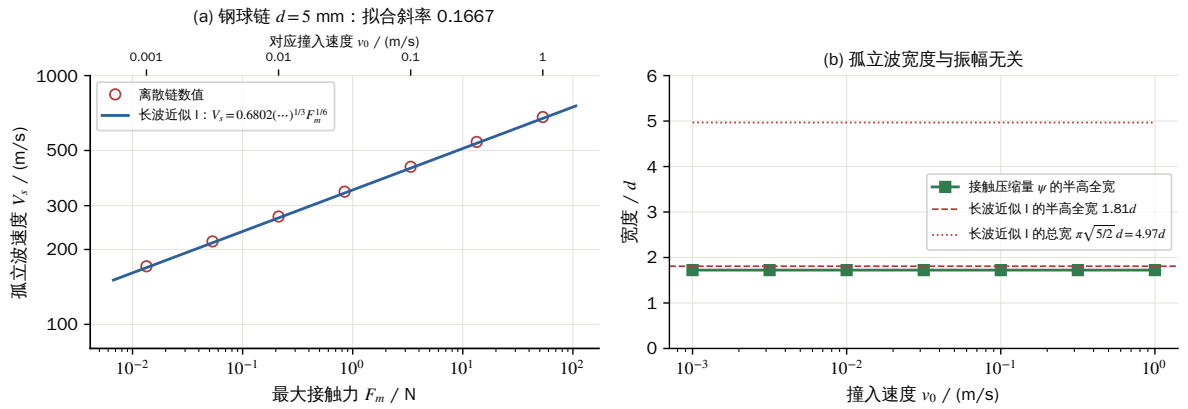


图 5 钢球链 ( $d = 5 \text{ mm}$ ,  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ) 的数值结果, 撞入速度  $v_0$  从  $1 \text{ mm/s}$  到  $1 \text{ m/s}$ 。(a) 孤立波速度与最大接触力: 拟合斜率 0.1667 (理论  $1/6$ ), 直线为式 (7.10); 上方横轴标出对应的撞入速度。(b) 接触压缩量剖面的半高全宽与振幅无关 ( $1.72d$ )。两者都是标度对称性的直接结果, 这里起检验程序的作用。

表 3 孤立波参数: 两种长波近似与离散链数值解 (速度前因子  $C$  定义为  $V_s = C d (A \psi_m^{1/2} / m)^{1/2}$ ; 在主阶  $\psi_m = d \xi_m$  下, 近似 I 的  $C = 2/\sqrt{5}$ )

|                  | 近似 I (Nesterenko) | 近似 II ( $\psi$ 方程) | 离散链数值   |
|------------------|-------------------|--------------------|---------|
| 速度前因子 $C$        | 0.894             | 0.913              | 0.906   |
| 式 (7.10) 中的系数    | 0.6802            | 0.694              | 0.689   |
| 剖面支撑宽度           | $4.97d$           | $5.44d$            | 无严格边界   |
| 压缩量半高全宽          | $1.81d$           | $1.98d$            | $1.72d$ |
| 与数值剖面的均方根偏差      | 0.014             | 0.045              | —       |
| $V_s - F_m$ 拟合指数 | $1/6$             | $1/6$              | 0.1667  |

3. 指数  $V_s \propto F_m^{1/6} \propto v_m^{1/5}$  与“宽度与振幅无关”：数值拟合 0.1667、0.2000，7 个振幅下的半高全宽相同。由于这是离散方程标度对称性（式 (7.4)）的严格推论，对同一方程做数值拟合只是检验了程序的正确性，并非对物理的独立验证。真正检验它的是实验（Coste 等的实验 [12]，以及图 7 中仅重力预压的数据）；而预压会引入新的力尺度、破坏标度对称性，使小振幅下的速度趋于线性声速（图 7 中  $F_0 = 2.44 \text{ N}$  的曲线）。
4. 撞入球与链中球相同时，孤立波中球的最大速度  $v_m = 0.682v_0$ ，撞入球以  $-0.071v_0$  反弹。第 9 节例 3 将用“孤立波有效质量”解释这两个数。

#### 注：与实验的比较

Coste 等的钢球链实验在不调任何参数的情况下验证了 Nesterenko 理论 [12]。Daraio 等把实验推进到直径 4.76 mm 的小球和 0.1 N 量级的小振幅，并用嵌入球中的压电片直接测接触力（图 6）。图 7 把他们测得的不锈钢链孤立波速度与本讲的离散链计算放在一起。仅有重力预压时，速度随力的增大而缓慢增大，与  $F_m^{1/6}$  的弱依赖一致；施加 2.38 N 磁力预压后，小振幅下的速度趋于式 (6.5) 的线性声速，介质不再是“声真空” [14]。定量上，磁力预压组的数据平均比本讲计算高约 7%，在实验误差（约  $\pm 8\%$ ）以内；仅重力预压组的数据平均比本讲计算（也就是原文式 (1) 在  $F_0 = 0.062 \text{ N}$  时的值）低约 13%，超出误差棒。模型与实验有两处明显差别：(i) 竖直球链中重力预压随深度逐球增加（每个球重约 4.4 mN），并不是一个均匀的  $F_0$ ，而式 (1) 和本讲模型都把它取为均匀的 0.062 N；(ii) 内嵌传感器测的是传感器球内部的平均力，而不是两球之间的接触力，两者之间需要换算 [13]。哪一个偏差的主要来源，这里不作推测。

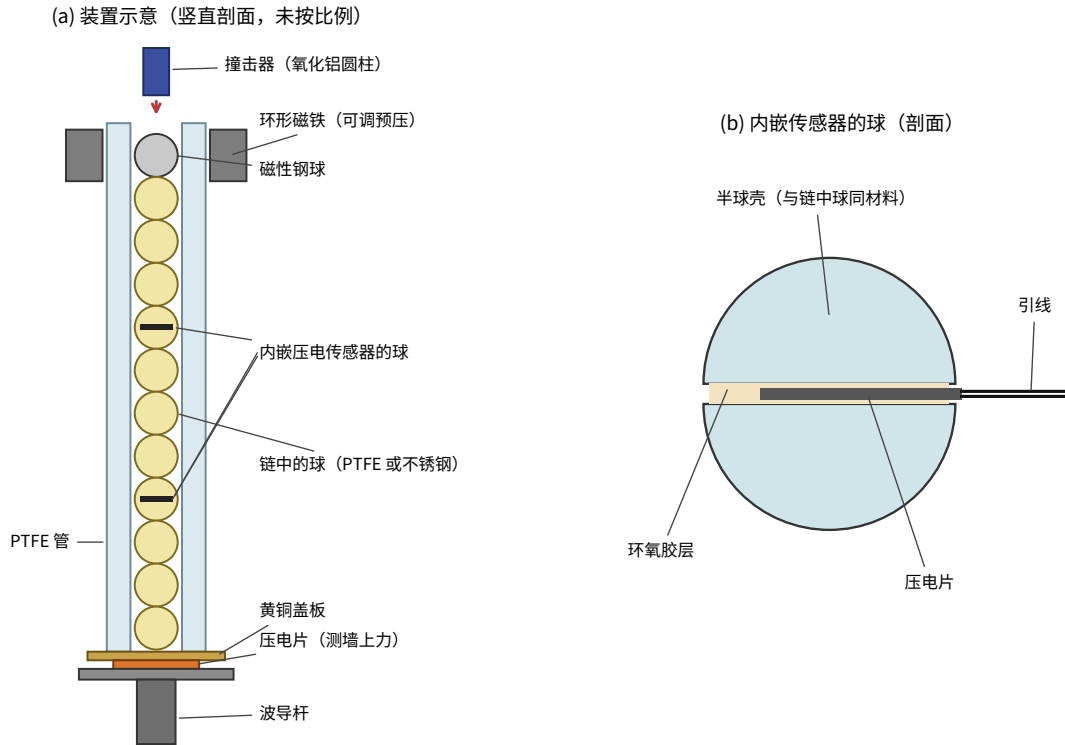


图 6 颗粒链冲击实验装置示意 (据 Daraio 等 (2006) 图 1 重绘, 未按比例) [14]。(a) 球链竖直放在 PTFE 管中, 顶端用氧化铝圆柱撞击 (钢链实验用 1.2 g, PTFE 链用 0.47 g); 两个带黑色横条的球内嵌压电传感器, 底部压电片测墙上的力, 顶部环形磁铁可对磁性钢球施加可调预压。(b) 内嵌传感器的球: 两个半球壳 (与链中球同材料) 之间夹一片压电片, 用环氧胶粘接。

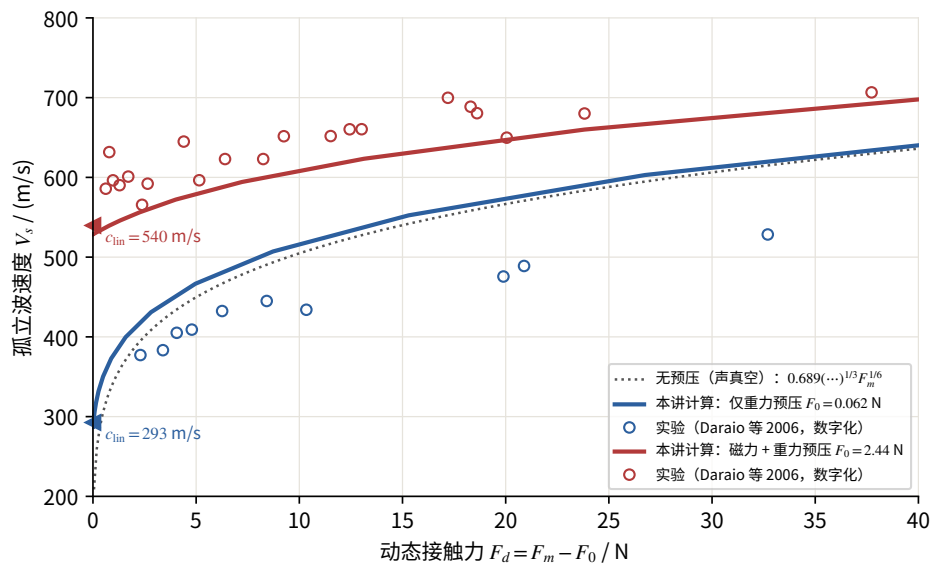
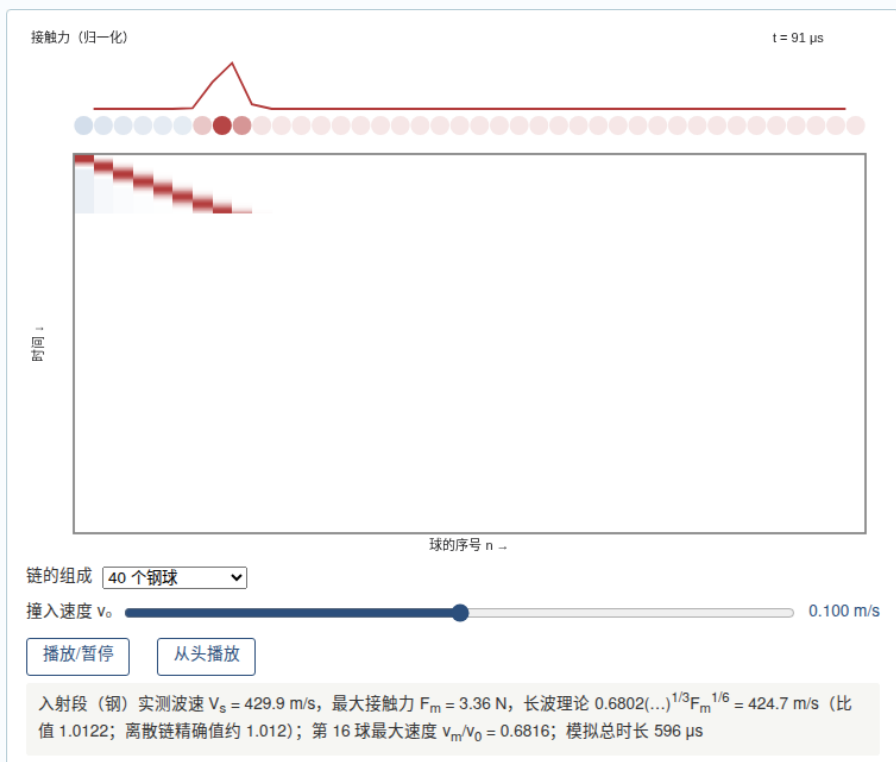


图 7 直径 4.76 mm 不锈钢球链 ( $E = 193 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ ) 中孤立波速度随动态接触力  $F_d = F_m - F_0$  的变化。实线 (本讲计算): 离散赫兹链的数值模拟, 均匀静态预压  $F_0 = 0.062 \text{ N}$  (仅重力) 与  $F_0 = 2.44 \text{ N}$  (磁力 + 重力); 左端三角为式 (6.5) 的线性声速  $c_{\text{lin}}$ ; 点线为无预压 (声真空) 结果。本讲曲线与原文式 (1) (含预压的长波近似) 在  $F_d > 1 \text{ N}$  时相差不到 1.5%。圆圈 (文献数据): 实验数据取自 Daraio 等 (2006) 图 7, 由原图数字化得到 [14]; 低力端 ( $F_d \lesssim 2 \text{ N}$ ) 十余个相互重叠的仅重力预压数据点无法分辨, 未画出; 原图中误差棒多为约  $\pm 8\%$ , 此处未画出。

交互演示：40 球颗粒链 ( $d = 5 \text{ mm}$ ) 中的孤立波。上：接触力剖面；中：球（颜色深浅表示速度，红色向右、蓝色向左；绿边为 PTFE）；下：速度时空图随动画逐行生成。改变撞入速度，读出实测波速并与式 (7.10) 比较；切换“钢 + PTFE”组合可观察第 8.1 节的界面现象。



网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 hertz-soliton）。

## 8 应用：界面、冲击防护与声学器件

### 8.1 异质球链的界面

线性波在两种介质的界面上部分反射、部分透射，反射系数由声阻抗（密度与声速之积  $Z = \rho c$ ）之比决定，与振幅无关。强非线性的颗粒链则不同。我们模拟了等径 ( $d = 5 \text{ mm}$ ) PTFE 球链与钢球链的界面（图 8）。PTFE 参数取 Daraio 等使用的动态值  $E = 1.46 \text{ GPa}$ 、 $\nu = 0.46$ 、 $\rho = 2200 \text{ kg/m}^3$ [13]。钢球质量是同径 PTFE 球的 3.6 倍，接触刚度约大两个数量级。

**物理解释** 两种情形都可以用“撞击器”的图像理解。(b) 中界面处最后一个钢球像一个重撞击器压向轻的 PTFE 链。重撞击器减速很慢，持续推挤，就会依次发出一串孤立波；它自身最终几乎静止，所以钢中没有反射压缩波。(a) 中轻的 PTFE 球撞向重的钢球，像轻球撞重球一样被弹回，形成反射的压缩波。这些结论与 Nesterenko、Daraio 等的实验和计算一致 [15]。他们还发现，若对界面施加预压，从钢到 PTFE 的方向也会出现“反常”的反射压缩波，这一现象可用来设计非对称的声传输 [15]。

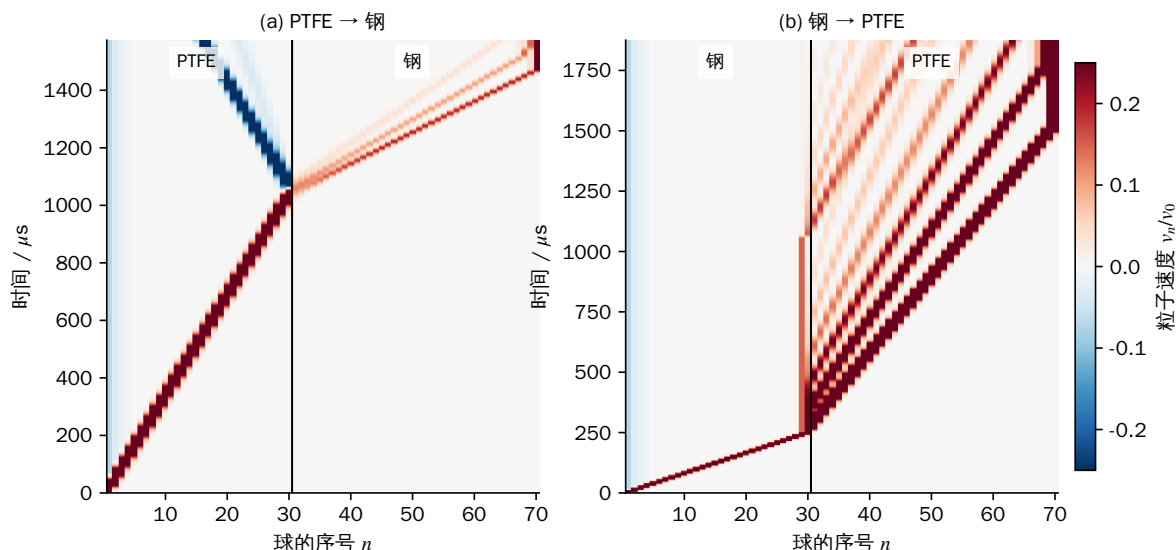


图 8 孤立波穿过 PTFE/钢界面（竖线）的速度时空图（数值模拟；撞入速度  $0.5 \text{ m/s}$ ，色标在  $\pm 0.25v_0$  处截断以显示弱波）。(a) 由轻而软的 PTFE 进入重而硬的钢：约 62% 的能量以压缩孤立波（蓝色，粒子向左运动）反射回 PTFE，透射进钢的是几个快速小孤立波。(b) 由钢进入 PTFE：99.4% 的能量透射，入射脉冲分裂成一串振幅递减的孤立波；钢一侧没有反射的压缩波，界面附近钢球间张开间隙，形成向左传播的稀疏波（卸载波：接触压力下降、粒子减速并彼此分开的区域）。

## 8.2 冲击力的衰减与能量捕获

由图 8(b)，一个强脉冲进入软而轻的链后分裂成一串较弱的孤立波，能量在时间上被“摊开”，单个峰值力大大降低。Daraio 等把钢球段与 PTFE 段交替排列，发现软段之间会“捕获”能量，再以弱脉冲的形式缓慢放出，从而显著降低传到末端的冲击力 [16]。这为冲击防护材料提供了一种不同于“吸能”（塑性、断裂）的思路：通过非线性动力学重新分配能量。

## 8.3 颗粒晶体声透镜与声二极管

**声弹（非线性声透镜）** 由式 (6.5) 与图 7，预压越大，波传得越快。Spadoni 与 Daraio 把 21 条平行的钢球链（每条 21 个直径  $9.5 \text{ mm}$  的球）排成阵列，对各链施加不同的静态预压，使中间链的波慢、外侧链的波快。各链出口的孤立波在下游介质中同时到达一点，形成高度集中的“声弹”；改变预压即可调节焦点位置与强度 [17]。这与光学透镜“中间厚、走得慢”的原理相同，只是“折射率”由预压控制。

**声开关与声整流** Boechler 等在预压的颗粒链靠近一端处放一个轻的“缺陷”球，用特定频率驱动，当驱动振幅超过某个阈值时，体系的稳态响应突然改变性质（称为分岔），从单一频率的振动跳到含许多频率的宽带振动（准周期或混沌态）。这种跳变很陡，可用作声开关；正反两个方向的传输差别可达  $10^4$  倍以上，形成“声二极管” [18]。这些器件都利用了赫兹接触的非线性：小振幅下近似线性，大振幅下强非线性，以及只压不拉带来的不对称。

## 9 决赛风格例题

### 例题：例 1：玻璃上的赫兹锥裂与 Auerbach 定律

**背景：**赫兹在 1882 年的第二篇论文中，提出用“球压在平面上、刚出现裂纹时的压强”来定义脆性材料的硬度 [3]。钢球压在厚玻璃上时，接触圆外侧会出现一圈环形裂纹，向下扩展成锥形，这叫赫兹锥裂。1891 年 Auerbach 测量发现：产生锥裂的临界载荷  $F_c$  正比于球的半径  $R$  (Auerbach 定律) [27]，而不是像下面第 (1) 问所推出的那样正比于  $R^2$ 。此前 Roesler (1956) 已用能量标度论证作过初步解释 [28]，1967 年 Frank 与 Lawn 用断裂力学给出了完整的解释 [29]。本题用标度论证重走这条路。

**已知：**钢球  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.30$ ,  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ , 屈服强度  $Y = 2.0 \text{ GPa}$ ；厚玻璃板  $E = 70 \text{ GPa}$ ,  $\nu_g = 0.22$ ,  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ 。下面两条为引用结果，不必证明。

- 赫兹接触中，玻璃表面在接触圆边缘  $r = a$  处的径向应力为拉应力，大小为  $\sigma_r = \frac{1-2\nu_g}{3}p_0$  [4]。这是整个应力场中最大的拉应力，它沿深度方向在  $\sim a$  的距离内迅速衰减。
  - Griffith 断裂判据：深为  $c$  的表面裂纹在垂直于它的拉应力  $\sigma$  作用下扩展的条件是  $\sigma\sqrt{\pi c} \geq K_c$ 。  $K_c$  叫断裂韧性，是材料常数（第 (2) 问会解释其来源）。本题取玻璃  $K_c = 0.75 \text{ MPa m}^{1/2}$ （题设）。
1. 应力判据。设玻璃表面最深的既有微裂纹深为  $c_f$ ，按“ $\sigma_r$  一达到  $\sigma_f \equiv K_c/\sqrt{\pi c_f}$  就锥裂”计算临界载荷  $F_c$ ，证明  $F_c \propto \sigma_f^3 R^2/E^{*2}$ 。大块玻璃的拉伸强度约  $\sigma_f = 70 \text{ MPa}$ ，求  $R = 5 \text{ mm}$  时的  $F_c$ 。
  2. 能量判据。用 Griffith 的能量论证说明  $K_c$  的来源：长  $c$  的裂纹使周围约  $c^2$  量级的面积（单位厚度）内的弹性能  $\sigma^2/(2E)$  得到释放，同时新增表面能  $2\gamma c$  ( $\gamma$  为单位面积表面能)。由此求临界条件，说明  $K_c \sim \sqrt{E\gamma}$ 。在赫兹应力场中，拉应力只存在于深度  $\sim a$  的表层内，并随深度迅速衰减，裂纹尖端处的有效拉应力远小于表面值  $\sigma_r$ 。整个应力场只有  $a$  一个长度标度，所以可以把锥裂的临界条件写成  $\sigma_r\sqrt{\pi\zeta a} = K_c$ ，其中  $\zeta$  是一个与  $R$ 、 $F$  无关的无量纲数，它综合了应力随深度的衰减和几何因子。证明这一判据给出  $F_c \propto R$ ，即 Auerbach 定律。
  3. 实验（题设）： $R = 5 \text{ mm}$  的钢球静压时  $F_c = 500 \text{ N}$ 。求此时的  $a$ 、 $p_0$ 、 $\sigma_r$  与  $\zeta$ 。
  4. 两个判据都必须满足，起作用的是给出较大  $F_c$  的那一个。说明为什么小球服从 Auerbach 定律、大球服从  $R^2$  律。Frank 与 Lawn 指出，典型情形下转变发生在几厘米的球半径 [29]。取转变半径  $R_x = 5 \text{ cm}$ ，求玻璃表面的“等效强度”  $\sigma_f$  与既有裂纹深度  $c_f$ ，并与  $70 \text{ MPa}$  对应的  $c_f$  比较，解释差别。
  5. 落球。钢球从高  $h$  处落到玻璃板上（准静态碰撞， $m^* = m$ ,  $R^* = R$ ）。求最大接触力  $F_m$  对  $R$ 、 $h$  的标度，进而求锥裂的临界落高  $h_c(R)$ 。计算  $R = 2.5$ 、 $5$ 、 $10 \text{ mm}$  三种钢球的  $h_c$ 。哪种球最容易打裂玻璃？若按第 (1) 问的应力判据， $h_c$  是多少，与  $R$  有什么关系？
  6. 检验本题的模型假设：(a) 钢球是否保持弹性；(b) 准静态条件；(c) 玻璃板要多厚才能当作“半空间”并忽略板的弯曲振动。

## 解答

(1) 钢—玻璃  $E^* = 55.8 \text{ GPa}$ ,  $(1 - 2\nu_g)/3 = 0.1867$ 。由式 (4.10),  $p_0 = \frac{3F}{2\pi a^2}$ ,  $a^3 = \frac{3FR}{4E^*}$ , 消去  $a$ :

$$p_0 = \left( \frac{6FE^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3}.$$

令  $\sigma_r = 0.1867 p_0 = \sigma_f$ , 得

$$F_c = \frac{\pi^3 R^2}{6E^{*2}} \left( \frac{3\sigma_f}{1 - 2\nu_g} \right)^3 \propto \frac{\sigma_f^3 R^2}{E^{*2}}.$$

代入  $\sigma_f = 70 \text{ MPa}$ ,  $R = 5 \text{ mm}$ :  $F_c = 2.2 \text{ N}$ , 相当于 220 克的砝码。这显然不符合常识: 一个钢球放在玻璃上轻轻按一下并不会压出裂纹。

(2) 长  $c$  的裂纹释放弹性能  $\sim \frac{\sigma^2}{2E} \cdot \pi c^2$  (单位厚度, 系数取 Griffith 精确解的  $\pi$ ), 并付出表面能  $2\gamma c$ 。总能量  $\mathcal{U}(c) = 2\gamma c - \frac{\pi\sigma^2 c^2}{2E}$  在  $c^* = \frac{2E\gamma}{\pi\sigma^2}$  处取极大。 $c > c^*$  时裂纹继续长大能降低总能量, 扩展不可逆。所以扩展条件是  $\sigma\sqrt{\pi c} \geq \sqrt{2E\gamma} \equiv K_c$ 。

在赫兹场中, 临界条件  $\sigma_r\sqrt{\pi\zeta a} = K_c$  即  $\sigma_r^2 a = K_c^2/(\pi\zeta) = \text{常数}$ 。而  $\sigma_r \propto p_0 \propto F/a^2$ ,  $a^3 \propto FR$ , 所以

$$\sigma_r^2 a \propto \frac{F^2}{a^3} \propto \frac{F^2}{FR} = \frac{F}{R} = \text{常数} \Rightarrow F_c \propto R.$$

物理上, 大球的接触圆大, 拉应力场延伸得深, 裂纹在更深处仍受到足够的拉应力, 所以所需的表面应力反而低。

(3)  $a = (3F_c R/4E^*)^{1/3} = 323 \mu\text{m}$ ,  $p_0 = 3F_c/(2\pi a^2) = 2.29 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_r = 428 \text{ MPa}$ 。 $\zeta = K_c^2/(\pi\sigma_r^2 a) = 0.0030$ 。 $\zeta$  很小, 说明裂纹尖端处的有效拉应力只有表面值的几个百分点 ( $\sqrt{\zeta} \approx 0.055$ ), 这正是拉应力随深度迅速衰减的结果。按 Frank 与 Lawn 的分析, 此时既有缺陷先稳定地长成一圈浅的环形裂纹; 载荷继续增大到某一临界值时, 这条环形裂纹失稳, 扩展成锥裂。在这一区域里, 临界载荷与既有缺陷的大小无关, 所以赫兹试验可以用来测量表面能 [29]。注意  $\sigma_r$  远大于  $70 \text{ MPa}$ 。

(4) 应力判据  $F_c \propto R^2$ , 能量判据  $F_c \propto R$ 。 $R$  小时  $R^2$  律给出的  $F_c$  更小, 所以起作用 (给出较大  $F_c$ ) 的是 Auerbach 律;  $R$  大时反之。两者相等处:

$$\frac{\pi^3 R_x^2}{6E^{*2}} \left( \frac{\sigma_f}{0.1867} \right)^3 = k_A R_x, \quad k_A = \frac{F_c}{R} = 1.0 \times 10^5 \text{ N/m},$$

解得  $\sigma_f = 0.1867(6E^{*2}k_A/\pi^3 R_x)^{1/3} = 199 \text{ MPa}$ ,  $c_f = K_c^2/(\pi\sigma_f^2) = 4.5 \mu\text{m}$ 。而  $70 \text{ MPa}$  对应  $c_f = 37 \mu\text{m}$ 。大块试样的强度由其中最深的那条裂纹决定; 赫兹接触区只有零点几毫米, 碰到的只是普通的表面微裂纹。脆性材料的强度与受力体积有关, 这正是一个“尺寸效应”。

(5) 由式 (5.2),  $F_m = K\delta_m^{3/2} \propto E^* R^{1/2} (mv^2/E^* R^{1/2})^{3/5} = E^{*2/5} m^{3/5} R^{1/5} v^{6/5}$ 。代入  $m \propto R^3$ ,  $v^2 = 2gh$ :

$$F_m \propto R^2 h^{3/5}.$$

令  $F_m = k_A R$ , 得  $h_c^{3/5} \propto R^{-1}$ , 即

$$h_c \propto R^{-5/3}.$$

数值:  $R = 2.5, 5, 10 \text{ mm}$  时,  $h_c = 32.8, 10.3, 3.3 \text{ cm}$ , 对应  $v = 2.54, 1.42, 0.80 \text{ m/s}$ 。大球最容易打裂玻璃, 尽管它撞击时的压强最小 ( $p_0 = 2.89, 2.29, 1.82 \text{ GPa}$ )。这些数值完全取决于

题设的  $F_c = 500 \text{ N}$ 。实际玻璃的 Auerbach 常数随表面磨损状态可以相差数倍，而  $h_c \propto k_A^{5/3}$ ，所以这里只代表量级。若按应力判据， $F_c \propto R^2$  与  $F_m \propto R^2 h^{3/5}$  中的  $R$  抵消， $h_c$  与  $R$  无关，数值仅  $0.012 \text{ mm}$ ，与经验完全不符。

(6) (a) 钢球最大压强  $p_0 \leq 2.89 \text{ GPa} < 1.6Y = 3.2 \text{ GPa}$ ，保持弹性；但  $R = 2.5 \text{ mm}$  时已达  $0.9 \times 1.6Y$ ，更小的球在锥裂前会先发生塑性变形。(b)  $R = 5 \text{ mm}$  时  $t_c = 43 \mu\text{s}$ ，而  $2R/c_0 = 10 \text{ mm}/(5.17 \text{ km/s}) = 1.9 \mu\text{s}$ ，准静态成立。(c) 板厚  $H \gg a$ （零点几毫米）只是让接触区附近的应力场与半空间相同。还要求整块板不发生明显的弯曲：碰撞期间板的弯曲振动会带走能量。Zener 专门分析了球撞击大平板时的这种“板的内禀非弹性”：板越薄（相对球的尺寸），弯曲越显著，损失越大 [30]。所以需要  $H$  比  $R$  大几倍以上，即厚度达到厘米量级的玻璃块，而不是几毫米厚的窗玻璃；对薄板，接触力与临界落高都要重新估计。

评分要点： $p_0(F, R)$  的消元； $F_c \propto R^2$ ；Griffith 能量极值； $\sigma_r^2 a = \text{常数} \Rightarrow F_c \propto R$ ；两判据取大者与转变半径； $F_m \propto R^2 h^{3/5}$  与  $h_c \propto R^{-5/3}$ ；对三条假设的检验。

### 例题：例 2：幂律接触链中孤立波的标度

把赫兹律推广为  $F = A\psi^\beta$  ( $\beta > 1$ )，考虑无预压的等质量球链  $m\ddot{\psi}_n = A(\psi_{n-1}^\beta - 2\psi_n^\beta + \psi_{n+1}^\beta)$  (孤立波区域内各接触都处于压缩状态)。

1. 证明：若  $\psi_n(t)$  是解，则  $\lambda\psi_n(\lambda^{(\beta-1)/2}t)$  也是解。由此求孤立波速度  $V_s$  与最大压缩量  $\psi_m$ 、最大接触力  $F_m$ 、球的最大速度  $v_m$  之间的标度指数，并说明孤立波宽度与振幅无关。
2. 对  $\beta = 3/2$  写出结果。 $\beta \rightarrow 1$  时指数如何？这与线性链的什么性质对应？
3. 采用“以  $\psi$  为变量”的长波近似： $m\psi_{tt} = Ad^2[\psi^\beta + \frac{d^2}{12}(\psi^\beta)_{xx}]_{xx}$  (附录 E)。求行波解的剖面形状与宽度（提示：仿照第 7.3 节，乘以导数后积分一次），讨论  $\beta \rightarrow 1$  的极限。
4. 实验中常见三种接触：球—球 ( $\beta = 3/2$ )、尖锥—平面 ( $\beta = 2$ )、带预压的接触在小振幅下近似线性。若要做一条“信号速度对振幅最敏感”的延迟线，应选哪种？

### 解答

(1) 令  $\tilde{\psi}_n(t) = \lambda\psi_n(\mu t)$ 。左边  $m\ddot{\tilde{\psi}}_n = \lambda\mu^2 m\ddot{\psi}_n$ ，右边  $= \lambda^\beta A\Delta^2\psi^\beta = \lambda^\beta m\ddot{\psi}_n$ 。两边相等要求  $\lambda\mu^2 = \lambda^\beta$ ，即  $\mu = \lambda^{(\beta-1)/2}$ 。新解的时间尺度缩短为原来的  $1/\mu$ ，空间形状（以球数计）不变，所以宽度与振幅无关，而

$$V_s \propto \mu \propto \psi_m^{(\beta-1)/2}, \quad F_m \propto \psi_m^\beta \Rightarrow V_s \propto F_m^{(\beta-1)/(2\beta)},$$

$v_m \propto \psi_m \cdot \mu \propto \psi_m^{(\beta+1)/2}$ ，故  $V_s \propto v_m^{(\beta-1)/(\beta+1)}$ 。

(2)  $\beta = 3/2$ :  $V_s \propto \psi_m^{1/4} \propto F_m^{1/6} \propto v_m^{1/5}$ ，与式 (7.5) 一致。 $\beta \rightarrow 1$ : 三个指数都趋于零，速度与振幅无关，对应线性链中声速与振幅无关。

(3) 行波  $\psi(x - V_s t)$  代入并积分两次（积分常数为零）： $\frac{d^2}{12}f'' = \lambda_0 f^{1/\beta} - f$ ，其中  $f = \psi^\beta$ ， $\lambda_0 = mV_s^2/(Ad^2)$ 。乘以  $f'$  积分一次： $\frac{d^2}{24}f'^2 = \frac{\lambda_0\beta}{\beta+1}f^{(\beta+1)/\beta} - \frac{f^2}{2}$ 。令  $f = Bs^\eta$ ，并选  $\eta$  使  $f'^2 \propto s^{2\eta-2}s'^2$  与  $f^{(\beta+1)/\beta} \propto s^{\eta(\beta+1)/\beta}$  同次： $2\eta - 2 = \eta(\beta + 1)/\beta$ ，得  $\eta = \frac{2\beta}{\beta-1}$ 。再适当选  $B$ ，

方程化为  $s'^2 = \kappa^2(1 - s^2)$ , 其中  $\kappa^2 = \frac{12}{\eta^2 d^2}$ , 解为  $s = \cos \kappa z$ 。于是

$$\psi \propto f^{1/\beta} \propto \cos^{2/(\beta-1)}(\kappa z), \quad \text{宽度} = \frac{\pi}{\kappa} = \frac{\pi \eta d}{\sqrt{12}} = \frac{\pi \beta}{\sqrt{3}(\beta-1)} d.$$

$\beta = 3/2$  时为  $\cos^4$ 、宽度  $\sqrt{3}\pi d = 5.44d$  (表 3 近似 II)。 $\beta \rightarrow 1$  时宽度  $\rightarrow \infty$ : 线性链中不存在局域的孤立波, 脉冲由于色散而散开 (第 6.4 节)。非线性越强 ( $\beta$  越大), 孤立波越窄。

(4) 对振幅最敏感, 即  $V_s \propto F_m^{(\beta-1)/(2\beta)}$  的指数最大:  $\beta = 2$  时为  $1/4$ , 大于  $\beta = 3/2$  的  $1/6$ ; 带预压的近线性接触指数趋于 0。应选尖锥接触。(实际器件还需考虑尖端的塑性。)

评分要点: 标度变换中  $\mu = \lambda^{(\beta-1)/2}$ ; 三个指数; 首次积分与  $\eta = 2\beta/(\beta-1)$ ;  $\beta \rightarrow 1$  极限的物理解释。

### 例题: 例 3: 撞击器打击球链——孤立波的“有效质量”

直径  $d = 5.00 \text{ mm}$  的钢球 (参数同例 1) 排成一长列, 无预压。一个与链中球完全相同的球以  $v_0 = 0.300 \text{ m/s}$  撞击链端。数值模拟表明: 形成一个孤立波; 撞入球及附近几个球以很小的速度后退。

1. 利用正文的标度对称性说明: 孤立波的总动量  $P$  与总能量  $\mathcal{E}$  满足  $\mathcal{E} = P^2/(2m_{\text{eff}})$ , 其中  $m_{\text{eff}}$  与振幅无关。
2. 用长波近似的剖面式 (7.8) 计算  $m_{\text{eff}}/m$ 。已知  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{8}$ ,  $\int \cos^8 = \frac{35\pi}{128}$ ,  $\int \cos^{10} = \frac{63\pi}{256}$  (积分限相同)。
3. 把孤立波看成质量为  $m_{\text{eff}}$  的“准粒子”, 撞入球与它做完全弹性碰撞。求撞入球的末速度与孤立波的动量。与数值结果 (所有后退球的总动量  $-0.138mv_0$ , 孤立波最大粒子速度  $v_m = 0.682v_0$ ) 比较。
4. 估算  $v_m$ 、 $V_s$  与最大接触力  $F_m$ 。
5. 若链末端是一块厚钢板, 估计钢板受到的最大力。提示: 先考虑线性弦上的波在固定端反射时端点力的变化。

### 解答

(1) 由式 (7.4), 振幅放大  $\lambda$  倍, 位移放大  $\lambda$  倍, 时间缩短  $\lambda^{1/4}$  倍, 所以每个球的速度放大  $\lambda^{5/4}$  倍:  $P \propto \lambda^{5/4}$ 。动能  $\propto \lambda^{5/2}$ , 接触势能  $\frac{2}{5}A\psi^{5/2} \propto \lambda^{5/2}$ , 所以  $\mathcal{E} \propto \lambda^{5/2} \propto P^2$ 。比例系数与  $\lambda$  无关, 记作  $1/(2m_{\text{eff}})$ 。 $m_{\text{eff}}$  是孤立波作为一个整体的“惯性”。

(2) 线密度为  $m/d$ 。行波中速度场  $\partial_t u = V_s w$ , 接触势能密度为  $\frac{2}{5}A(dw)^{5/2}/d$ 。令  $\theta = \kappa z$ ,  $\kappa = \sqrt{10}/(5d)$ :

$$P = \frac{m}{d} \int V_s w dz = \frac{mV_s \xi_m}{\kappa d} \cdot \frac{3\pi}{8}, \quad \mathcal{E}_k = \frac{m}{d} \int \frac{V_s^2 w^2}{2} dz = \frac{mV_s^2 \xi_m^2}{2\kappa d} \cdot \frac{35\pi}{128},$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{d} \int \frac{2}{5} A(dw)^{5/2} dz = \frac{2Ad^{3/2}\xi_m^{5/2}}{5\kappa} \cdot \frac{63\pi}{256}.$$

两式相除，并用  $c^2 = Ad^{5/2}/m$  把  $Ad^{3/2}$  换成  $mc^2/d$ ：

$$\frac{\mathcal{E}_p}{\mathcal{E}_k} = \frac{4}{5} \cdot \frac{c^2 \xi_m^{1/2}}{V_s^2} \cdot \frac{63/256}{35/128} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{10},$$

其中第二个因子用了式 (7.9),  $V_s^2 = \frac{4}{5}c^2\xi_m^{1/2}$ 。动能占  $10/19 = 52.6\%$ 。于是

$$\frac{m_{\text{eff}}}{m} = \frac{P^2}{2m\mathcal{E}} = \frac{(3\pi/8)^2}{\kappa d \left(\frac{35\pi}{128}\right) \left(1 + \frac{9}{10}\right)} = 1.345.$$

(离散数值解： $m_{\text{eff}} = 1.304m$ ；动能占比随波峰相对格点的位置在 54.4%–56.7% 之间振荡，平均 55.6%，而  $m_{\text{eff}}$  不振荡。)

(3) 质量  $m$  以  $v_0$  撞静止的  $m_{\text{eff}}$ ，完全弹性碰撞：

$$u = \frac{m - m_{\text{eff}}}{m + m_{\text{eff}}} v_0 = -0.147v_0, \quad P = m(v_0 - u) = 1.147mv_0.$$

数值结果：后退总动量  $-0.138mv_0$ ，孤立波动量  $1.138mv_0$ ，相差不到 1%。这就解释了牛顿摆中撞入球为什么会反弹：孤立波比一个球“重”，等质量的撞入球不能把动量和能量全部交给它。（数值上后退动量分散在撞入球  $-0.071mv_0$  和其后的几个球上。）

(4) 由 (2),  $P = \frac{3\pi}{8\kappa d}mv_m = 1.863mv_m$  (因为  $v_m = V_s\xi_m$ )，所以  $v_m = 1.147v_0/1.863 = 0.616v_0 = 0.185\text{ m/s}$  (数值:  $0.682v_0$ , 长波近似偏低约 10%)。  $c = \sqrt{2E/[\pi\rho(1-\nu^2)]} = 4326\text{ m/s}$ , 由式 (7.11):  $V_s = 0.915c^{4/5}v_m^{1/5} = 529\text{ m/s}$  (数值 536 m/s)。  $\xi_m = v_m/V_s = 3.5 \times 10^{-4}$ ,  $A = E\sqrt{d}/[3(1-\nu^2)] = 5.44 \times 10^9\text{ N/m}^{3/2}$ ,  $F_m = A(d\xi_m)^{3/2} = 12.6\text{ N}$  (数值 12.6 N)。孤立波通过 20 个球 (10 cm) 约需 190  $\mu\text{s}$ ，而钢中纵波只需 19  $\mu\text{s}$ 。

(5) 线性弦上脉冲在固定端反射时，入射与反射脉冲在端点处叠加，端点受力加倍。对孤立波作同样估计，墙受最大力  $\approx 2F_m \approx 25\text{ N}$ 。数值模拟 (球—平板接触  $A_w = \frac{4}{3}E^*\sqrt{R} = \sqrt{2}A$ ) 给出墙上最大力为  $1.94F_m$ ，与估计一致。

评分要点： $\mathcal{E} \propto P^2$  的标度论证；三个积分与  $m_{\text{eff}} = 1.34m$ ；弹性碰撞公式与数值对比； $V_s$ 、 $F_m$  数值；墙力加倍的论证。

## 10 实验与数据处理：电路通断法测钢球接触时间

### 背景：实验原理

两只金属球相接触时导电，分开时断路。把两球、电阻与一台计数器（或示波器）串联，计数器在回路导通期间对 10 MHz 时钟脉冲计数，即可测出接触时间，分辨率 0.1  $\mu\text{s}$ 。这种电学方法常被用来检验赫兹理论。Hessel 等在《美国物理学杂志》上用晶体振荡器和计数器测量了两个相同钢球的碰撞时间 [31]。Gugan 测量了球撞击平面时接触面积与接触时间随速度的变化，发现即使动能损失约 40%，结果仍与赫兹的弹性理论相符 [32]。

### 例题：实验题：由接触时间测钢的等效模量（本题使用模拟数据）

两只相同的轴承钢球（直径  $2R = 25.40\text{ mm}$ ，称得质量  $m = 66.9\text{ g}$ ）用双线悬挂成摆长  $L = 1.000\text{ m}$  的单摆，静止时恰好相切。B 球静止，把 A 球拉到偏角  $\theta$  后由静止释放，A 在最低点

与 B 正碰。两球与计数器串联，记录导通时间  $t$ 。每个  $\theta$  重复 5 次，表 4 给出平均值  $\bar{t}$  与 5 次测量的样本标准差  $s_t$ 。 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ 。

1. 写出碰撞相对速度  $v$  与  $\theta$  的关系，并说明在什么条件下  $t$  等于赫兹接触时间  $t_c$ 。
2. 由赫兹理论， $\ln t$  与  $\ln v$  应满足什么线性关系？斜率的理论值是多少？
3. 用最小二乘法拟合  $\ln t = \alpha + b \ln v$ ，求  $b$  及其标准不确定度。用表中的  $s_t$  检验拟合残差是否与测量的随机误差相符，并判断数据与理论斜率是否相符。
4. 固定斜率为  $-1/5$ ，由截距求等效模量  $E^*$  及其统计不确定度。取  $\nu = 0.30$ ，求杨氏模量  $E$ ，并与轴承钢的参考值  $E \approx 210 \text{ GPa}$  比较。
5. 实验者怀疑：两球表面有很薄的氧化膜，只有压缩量超过某个很小的阈值  $\delta_{\text{th}}$  ( $\delta_{\text{th}} \ll \delta_m$ ) 后回路才导通，压缩量回落到  $\delta_{\text{th}}$  以下时又断开。(a) 证明测得的时间  $t \approx t_c - 2\delta_{\text{th}}/v$ 。(b) 这会使 (3)(4) 的结果怎样偏离？与你在 (3)(4) 中的发现是否一致？(c) 设计一种线性化方法，能同时求出  $E^*$  与  $\delta_{\text{th}}$ ，并说明为什么可以对各数据点等权拟合。给出结果。
6. 讨论其他误差来源及改进方案。

表 4 双摆碰撞的接触时间（模拟数据，生成方法见正文）

| $\theta / (^{\circ})$ | $\bar{t} / \mu\text{s}$ | $s_t / \mu\text{s}$ |
|-----------------------|-------------------------|---------------------|
| 1.0                   | 132.1                   | 0.6                 |
| 1.5                   | 123.6                   | 0.6                 |
| 2.0                   | 116.5                   | 1.4                 |
| 3.0                   | 108.0                   | 0.8                 |
| 4.0                   | 101.5                   | 0.9                 |
| 6.0                   | 94.3                    | 1.0                 |
| 8.0                   | 89.2                    | 0.5                 |
| 11.0                  | 83.9                    | 1.2                 |
| 15.0                  | 78.6                    | 0.4                 |
| 20.0                  | 74.7                    | 0.5                 |

数据说明：表 4 是模拟数据。生成方法：由式 (5.4) 取  $E^* = 115.4 \text{ GPa}$  算出  $t_c$ ，扣除阈值  $\delta_{\text{th}} = 0.10 \mu\text{m}$  造成的漏计时间（按  $2 \int_0^{\delta_{\text{th}}} d\delta/\dot{\delta}$  精确计算），再乘以  $1 + \epsilon$ ， $\epsilon$  为标准差 0.8% 的高斯随机数，每个角度 5 次。随机种子 20261003（生成程序随讲义源文件提供）。

#### 前置知识：最小二乘直线拟合（推导见附录 G）

对  $n$  组数据  $(x_i, y_i)$  拟合  $y = \alpha + bx$ ，使残差平方和  $\sum (y_i - \alpha - bx_i)^2$  最小。这样做的前提是

各  $y_i$  的随机误差相同（等权）。记  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$ ,  $S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2$ ,  $S_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ :

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \quad \alpha = \bar{y} - b\bar{x}, \quad s = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \alpha - bx_i)^2}{n-2}}, \quad (10.1)$$

$$u_b = \frac{s}{\sqrt{S_{xx}}}, \quad u_\alpha = s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}}.$$

$s$  是由残差估计的半点标准差，分母  $n-2$  是因为拟合用掉了两个参数。若斜率已知为  $b_0$ ，则  $\alpha = \bar{y} - b_0\bar{x}$ ,  $u_\alpha = s'/\sqrt{n}$ ,  $s'$  为  $y_i - b_0x_i$  的样本标准差。 $N$  次测量平均值的标准误差是单次标准差的  $1/\sqrt{N}$ 。

### 解答

(1) A 球下落高度  $L(1 - \cos \theta)$ ，由机械能守恒得  $v = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta)} = 2\sqrt{gL} \sin(\theta/2)$ 。B 静止，相对速度就是  $v$ 。 $\theta = 1.0^\circ$  时  $v = 0.0546 \text{ m/s}$ ， $\theta = 20^\circ$  时  $v = 1.087 \text{ m/s}$ 。 $t = t_c$  要求以下四点：回路恰在接触开始时导通、分离时断开；碰撞为正碰（摆线竖直、两球心等高）；准静态 ( $t_c/(2R/c_0) \approx 15 \gg 1$ )；碰撞时间内摆线的作用可忽略 ( $t_c \sim 100 \mu\text{s}$ ，远小于摆的周期  $2\text{ s}$ )。

(2) 两等球  $m^* = m/2$ ,  $R^* = R/2$ 。由式 (5.4)，

$$\ln t = \ln C_t - \frac{1}{5} \ln v, \quad C_t = 2.943 \left( \frac{15m^*}{16E^*\sqrt{R^*}} \right)^{2/5},$$

斜率的理论值为  $-1/5$ 。

(3) 计算  $x_i = \ln(v_i/(\text{m/s}))$  与  $y_i = \ln(\bar{t}_i/\text{s})$ ，列于表 5。由式 (10.1)：

$$b = -0.1929 \pm 0.0013, \quad \alpha = -9.4858 \pm 0.0021, \quad s = 0.0038.$$

残差检验： $y_i$  的随机误差是平均值的相对标准误差  $s_t/(\sqrt{5}\bar{t})$ ，各点在 0.0020–0.0064 之间，平均 0.0036，与残差标准差  $s = 0.0038$  相符。各点的相对误差相近，所以等权拟合  $\ln t$  是合理的。（按  $1/\sigma_i^2$  加权得  $b = -0.1927 \pm 0.0008$ ，结论相同。）

斜率： $b$  比  $-0.2$  大 0.0071，约为  $5.5u_b$ ，在统计上显著偏离：数据比赫兹理论预言的更“平”，说明存在随速度变化的系统误差，见 (5)。数据与拟合直线见图 9(a)。

(4) 固定斜率  $-1/5$ :  $\ln C_t = \overline{y + x/5} = -9.4955$ ,  $u(\ln C_t) = 0.0025$ ,  $C_t = 7.519 \times 10^{-5} \text{ s}(\text{m/s})^{1/5}$ 。由  $C_t$  的表达式解出

$$E^* = \frac{15m^*}{16\sqrt{R^*}} \left( \frac{2.943}{C_t} \right)^{5/2} = 119.3 \text{ GPa}, \quad u(E^*) = \frac{5}{2} u(\ln C_t) E^* = 0.8 \text{ GPa}.$$

注意  $E^* \propto C_t^{-5/2}$ ,  $C_t$  的相对误差被放大  $5/2$  倍。 $E = 2(1 - \nu^2)E^* = (217 \pm 1) \text{ GPa}$ ，比参考值  $210 \text{ GPa}$  高约 3%，偏差远大于统计不确定度。

(5) (a) 碰撞开始和结束时  $\delta \ll \delta_m$ ，由能量守恒  $\dot{\delta} = v\sqrt{1 - (\delta/\delta_m)^{5/2}} \approx v$ 。所以从接触到压缩量达到  $\delta_{\text{th}}$  用时  $\delta_{\text{th}}/v$ ，分离前同样漏计  $\delta_{\text{th}}/v$ ：

$$t \approx t_c - \frac{2\delta_{\text{th}}}{v}.$$

相对修正为  $(\delta_{\text{th}}/\delta_m)^{5/2}$  量级。 $\delta_m$  为几微米，这一修正可以忽略。

(b) 漏计时间  $\propto 1/v$ , 相对偏差  $\frac{2\delta_{th}}{vt_c} \propto v^{-4/5}$ , 在低速端最大。低速端的  $t$  被压低得最多,  $\ln t - \ln v$  直线的左端下沉, 斜率变“平” ( $b > -1/5$ ), 与 (3) 一致。所有  $t$  都偏短, 固定斜率求出的  $C_t$  偏小,  $E^*$  偏大, 与 (4) 一致。

(c) 两边乘以  $v^{1/5}$ :

$$Q \equiv tv^{1/5} = C_t - 2\delta_{th}P, \quad P \equiv (v/(m/s))^{-4/5}.$$

这是  $Q$  对  $P$  的直线, 截距为  $C_t$ , 斜率为  $-2\delta_{th}$ 。因为  $v$  的误差可以忽略,  $Q$  的相对误差与  $t$  相同 (约 0.4%); 而  $Q$  在各点只变化 3%, 所以各点的绝对误差几乎相同, 可以等权拟合。(如果改用  $tv = C_tv^{4/5} - 2\delta_{th}$ , 因变量在各点相差约 11 倍, 等权拟合就不合适了。) 由表 5 的  $P$ 、 $Q$  列作最小二乘:

$$C_t = (7.591 \pm 0.013) \times 10^{-5} \text{ s (m/s)}^{1/5}, \quad \delta_{th} = (0.091 \pm 0.013) \mu\text{m}.$$

由此  $E^* = (116.5 \pm 0.5) \text{ GPa}$ ,  $E = (212 \pm 1) \text{ GPa}$ , 与参考值相差约  $2\sigma$ , 属于正常的统计涨落; 况且轴承钢  $E$  本身就有约  $\pm 5\%$  的分散, 所以与参考值相符。残差相对标准差 0.32%, 与随机误差一致。(生成数据时所用的真值为  $\delta_{th} = 0.10 \mu\text{m}$ 、 $E^* = 115.4 \text{ GPa}$ , 偏差分别为不确定度的 0.7 倍与 2.2 倍。) 见图 9(b)。

(6) 其他误差来源:

- 角度读数:  $v \propto \sin(\theta/2)$ 。小角度时  $\pm 0.2^\circ$  的读数误差在  $\theta = 1^\circ$  处造成 20% 的速度误差。好在  $t \propto v^{-1/5}$ , 只引起 4% 的时间变化, 但它仍是低速端的主要误差, 而且会被误认成阈值效应。改进: 用光电门测碰前速度。
- 表面粗糙: 微凸体使初始接触比光滑球更软, 低速时  $t$  偏长, 与阈值效应的方向相反; 电接触也可能在微凸体处断续。
- 电子学延迟: 比较器的开关延迟若在两端不同, 会造成与速度无关的恒定偏差  $\Delta_0$ , 模型变为  $t = t_c - 2\delta_{th}/v - \Delta_0$ , 可以从  $\ln t - \ln v$  的弯曲趋势中区分 ( $\Delta_0$  使高速端偏离更大)。
- 非正碰与转动: 两球心不等高或摆线不平行时, 碰撞有切向分量。
- 塑性: 由式 (5.6), 两等球的相对屈服速度为 0.07–0.4 m/s (屈服强度取 1–2 GPa)。所以  $\theta \gtrsim 8^\circ$  ( $v \geq 0.44 \text{ m/s}$ ) 的数据点都已超过初始屈服; 最高速度时  $p_0 \approx 4.9 \text{ GPa}$ , 即使取 2 GPa,  $p_0/(1.6 \times 2 \text{ GPa}) \approx 1.5$  (演示 hertz-collision 中可见)。塑性区很小, 但它对  $t$  的影响本讲无法定量给出, 需要同时测 B 的弹出速度、求恢复系数来监控。

改进方案: 用示波器记录回路电压的完整波形, 直接看导通是否“滞后”; 改变回路电压, 检验  $\delta_{th}$  是否变化 (氧化膜击穿与电压有关); 清洁或镀金表面; 扩大速度范围 ( $t \propto v^{-1/5}$  依赖很弱, 需跨两个数量级以上的速度才能把斜率定准); 用不同直径的球检验  $t_c \propto R$ 。

评分要点:  $v(\theta)$ ; 斜率  $-1/5$  的推导; 最小二乘公式、 $u_b$  与残差  $-s_t$  一致性检验;  $E^*$  的表达式及误差放大因子 5/2;  $\Delta = 2\delta_{th}/v$  的推导与偏差方向;  $Q-P$  ( $tv^{1/5} - v^{-4/5}$ ) 线性化及等权的理由。

表 5 实验题的线性化数据（由表 4 计算； $P$ 、 $Q$  用于第 (5) 问）

| $\theta / (^{\circ})$ | $v / (\text{m/s})$ | $x = \ln v$ | $y = \ln t$ | $P = (v/(\text{m/s}))^{-4/5}$ | $Q / 10^{-5} \text{ s} (\text{m/s})^{1/5}$ |
|-----------------------|--------------------|-------------|-------------|-------------------------------|--------------------------------------------|
| 1.0                   | 0.0546             | -2.907      | -8.932      | 10.23                         | 7.386                                      |
| 1.5                   | 0.0820             | -2.502      | -8.998      | 7.40                          | 7.494                                      |
| 2.0                   | 0.1093             | -2.214      | -9.058      | 5.88                          | 7.482                                      |
| 3.0                   | 0.1639             | -1.809      | -9.133      | 4.25                          | 7.522                                      |
| 4.0                   | 0.2185             | -1.521      | -9.195      | 3.38                          | 7.488                                      |
| 6.0                   | 0.3277             | -1.116      | -9.269      | 2.44                          | 7.544                                      |
| 8.0                   | 0.4367             | -0.828      | -9.325      | 1.94                          | 7.558                                      |
| 11.0                  | 0.6001             | -0.511      | -9.386      | 1.50                          | 7.575                                      |
| 15.0                  | 0.8172             | -0.202      | -9.451      | 1.18                          | 7.549                                      |
| 20.0                  | 1.0872             | 0.084       | -9.502      | 0.94                          | 7.596                                      |

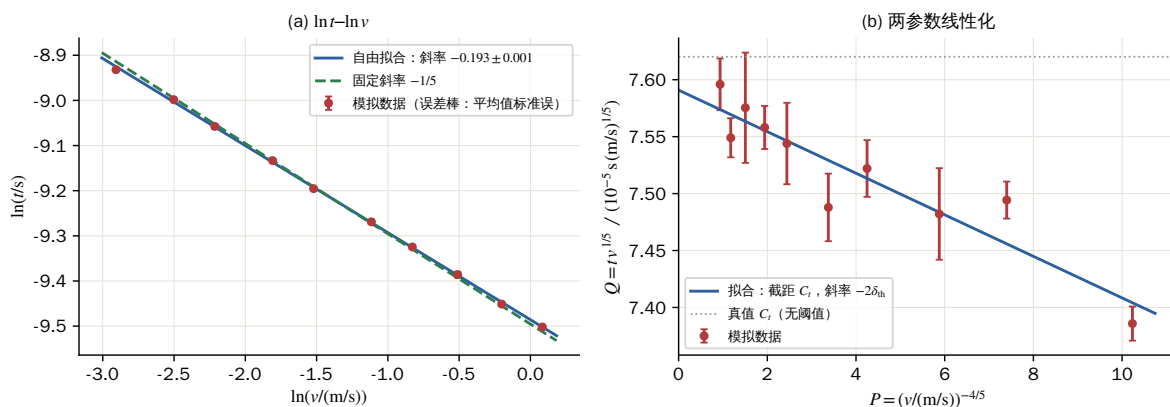


图 9 实验题的模拟数据。(a)  $\ln t - \ln v$ ：实线为自由最小二乘拟合（斜率  $-0.193$ ），虚线为固定斜率  $-1/5$  的拟合。(b) 两参数线性化  $Q = tv^{1/5}$  对  $P = (v/(\text{m/s}))^{-4/5}$ ：截距给出  $C_t$ ，斜率给出  $-2\delta_{th}$ ；点线为生成数据所用的真值  $C_t$ 。误差棒均为平均值的标准误  $s_t/\sqrt{5}$ 。

## 11 小结：推导链

1. **弹性基础**：胡克定律 + 泊松效应  $\Rightarrow$  半空间点力解  $u_z = (1 - \nu^2)F/(\pi Es)$  (式 (3.4))，由量纲分析确定形式；叠加原理给出分布载荷的位移积分。
2. **赫兹接触**：几何间隙  $r^2/2R^*$  + 接触条件 + 半椭圆压强  $\Rightarrow a = \sqrt{R^*\delta}$ 、 $F = \frac{4}{3}E^*\sqrt{R^*\delta^3/2}$ 、 $p_0 = 3F/(2\pi a^2)$ 、 $U = \frac{2}{5}F\delta$  (式 (4.9)–(4.11))。非线性来自接触面积随压缩增大。
3. **碰撞**：约化质量 + 能量守恒  $\Rightarrow \delta_m \propto v^{4/5}$ 、 $t_c = 2.943\delta_m/v \propto v^{-1/5}$  (式 (5.4))。准静态判据  $t_c/(2R/c_0) \propto (c_0/v)^{1/5} \gg 1$ 。理想赫兹碰撞  $e = 1$ ；屈服速度与尺寸无关 (式 (5.6))。
4. **牛顿摆**：守恒律不足以决定末态  $\Rightarrow$  需要力律。线性链有色散 (式 (6.4))，脉冲散开；赫兹链无线性声速 (式 (6.5)，声真空)，脉冲保持紧凑。
5. **孤立波**：离散方程的标度对称性 (式 (7.4))  $\Rightarrow$  精确指数  $V_s \propto F_m^{1/6} \propto v_m^{1/5}$ 、宽度与振幅无关；长波近似 (式 (7.6)) + 行波 + 幂函数代换  $\Rightarrow \cos^4$  剖面、宽度约  $5d$ 、前因子 0.6802 (式 (7.10))，对应  $C = 2/\sqrt{5} = 0.894$ ，离散数值解给出 0.689 ( $C = 0.906$ )。
6. **应用**：撞击器图像解释界面的反射与分裂；预压调速  $\Rightarrow$  声透镜；非线性与分岔  $\Rightarrow$  声开关与整流。

## 参考文献

- [1] Heinrich Hertz. Ueber die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92:156–171, 1882. doi: 10.1515/crll.1882.92.156. Dated Berlin, January 1881.
- [2] Heinrich Hertz. *Miscellaneous Papers*. Macmillan, London, 1896. URL <https://archive.org/details/cu31924012500306>. Translated by D. E. Jones and G. A. Schott, with an introduction by P. Lenard (pp. xviii–xix describe the origin of the contact paper).
- [3] Heinrich Hertz. Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte. In *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes*. Berlin, 1882. November 1882; English translation in Hertz, *Miscellaneous Papers* (1896).
- [4] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985. doi: 10.1017/CBO9781139171731.
- [5] K. L. Johnson. One hundred years of Hertz contact. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 196(1):363–378, 1982. doi: 10.1243/PIME\_PROC\_1982\_196\_039\_02.
- [6] F. Herrmann and P. Schmälzle. Simple explanation of a well-known collision experiment. *American Journal of Physics*, 49(8):761–764, 1981. doi: 10.1119/1.12407.
- [7] E. J. Hinch and S. Saint-Jean. The fragmentation of a line of balls by an impact. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 455:3201–3220, 1999. doi: 10.1098/rspa.1999.0447.

- [8] S. Hutzler, G. Delaney, D. Weaire, and F. MacLeod. Rocking Newton's cradle. *American Journal of Physics*, 72(12):1508–1516, 2004. doi: 10.1119/1.1783898.
- [9] V. F. Nesterenko. Propagation of nonlinear compression pulses in granular media. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 24(5):733–743, 1983. doi: 10.1007/BF00905892. Russian original: Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. No. 5, 136–148 (1983).
- [10] A. N. Lazaridi and V. F. Nesterenko. Observation of a new type of solitary waves in a one-dimensional granular medium. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 26(3):405–408, 1985. doi: 10.1007/BF00910379.
- [11] V. F. Nesterenko. *Dynamics of Heterogeneous Materials*. Springer, New York, 2001. doi: 10.1007/978-1-4757-3524-6.
- [12] C. Coste, E. Falcon, and S. Fauve. Solitary waves in a chain of beads under Hertz contact. *Physical Review E*, 56(5):6104–6117, 1997. doi: 10.1103/PhysRevE.56.6104.
- [13] C. Daraio, V. F. Nesterenko, E. B. Herbold, and S. Jin. Strongly nonlinear waves in a chain of Teflon beads. *Physical Review E*, 72:016603, 2005. doi: 10.1103/PhysRevE.72.016603. URL <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0503299>.
- [14] C. Daraio, V. F. Nesterenko, E. B. Herbold, and S. Jin. Tunability of solitary wave properties in one-dimensional strongly nonlinear phononic crystals. *Physical Review E*, 73:026610, 2006. doi: 10.1103/PhysRevE.73.026610. URL <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0506513>.
- [15] V. F. Nesterenko, C. Daraio, E. B. Herbold, and S. Jin. Anomalous wave reflection at the interface of two strongly nonlinear granular media. *Physical Review Letters*, 95:158702, 2005. doi: 10.1103/PhysRevLett.95.158702. URL <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0506349>.
- [16] C. Daraio, V. F. Nesterenko, E. B. Herbold, and S. Jin. Energy trapping and shock disintegration in a composite granular medium. *Physical Review Letters*, 96:058002, 2006. doi: 10.1103/PhysRevLett.96.058002. URL <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0509622>.
- [17] A. Spadoni and C. Daraio. Generation and control of sound bullets with a nonlinear acoustic lens. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 107(16):7230–7234, 2010. doi: 10.1073/pnas.1001514107.
- [18] N. Boechler, G. Theocharis, and C. Daraio. Bifurcation-based acoustic switching and rectification. *Nature Materials*, 10(9):665–668, 2011. doi: 10.1038/nmat3072.
- [19] S. Sen, J. Hong, J. Bang, E. Avalos, and R. Doney. Solitary waves in the granular chain. *Physics Reports*, 462(2):21–66, 2008. doi: 10.1016/j.physrep.2007.10.007.
- [20] AZoM. AISI 52100 Alloy Steel (UNS G52986): properties. AZoM materials database, 2012. URL <https://www.azom.com/article.aspx?ArticleID=6704>. E = 190–210 GPa, Poisson's ratio 0.27–0.30, density 7.81 g/cm<sup>3</sup>.

- [21] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Theory of Elasticity*. Course of Theoretical Physics, Vol. 7. Pergamon, Oxford, 3rd edition, 1986. §8 (Boussinesq problem), §9 (contact of solids).
- [22] S. C. Hunter. Energy absorbed by elastic waves during impact. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 5(3):162–171, 1957. doi: 10.1016/0022-5096(57)90002-9.
- [23] J. Reed. Energy losses due to elastic wave propagation during an elastic impact. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 18(12):2329–2337, 1985. doi: 10.1088/0022-3727/18/12/004.
- [24] N. V. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch, and T. Pöschel. Model for collisions in granular gases. *Physical Review E*, 53(5):5382–5392, 1996. doi: 10.1103/PhysRevE.53.5382.
- [25] G. Kuwabara and K. Kono. Restitution coefficient in a collision between two spheres. *Japanese Journal of Applied Physics*, 26(8):1230–1233, 1987. doi: 10.1143/JJAP.26.1230.
- [26] J. M. English and R. L. Pego. On the solitary wave pulse in a chain of beads. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 133(6):1763–1768, 2005. doi: 10.1090/S0002-9939-05-07851-2.
- [27] F. Auerbach. Absolute Härtemessung. *Annalen der Physik*, 279(5):61–100, 1891. doi: 10.1002/andp.18912790505. Wiedemann’s Annalen 43.
- [28] F. C. Roesler. Indentation hardness of glass as an energy scaling law. *Proceedings of the Physical Society B*, 69:55–60, 1956. doi: 10.1088/0370-1301/69/1/307.
- [29] F. C. Frank and B. R. Lawn. On the theory of Hertzian fracture. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 299:291–306, 1967. doi: 10.1098/rspa.1967.0137.
- [30] C. Zener. The intrinsic inelasticity of large plates. *Physical Review*, 59:669–673, 1941. doi: 10.1103/PhysRev.59.669.
- [31] R. Hessel, A. C. Perinotto, R. A. M. Alfaro, and A. A. Freschi. Force-versus-time curves during collisions between two identical steel balls. *American Journal of Physics*, 74(3):176–179, 2006. doi: 10.1119/1.2173276.
- [32] D. Guban. Inelastic collision and the Hertz theory of impact. *American Journal of Physics*, 68(10):920–924, 2000. doi: 10.1119/1.1285850.
- [33] D. Tabor and R. H. S. Winterton. The direct measurement of normal and retarded van der Waals forces. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 312:435–450, 1969. doi: 10.1098/rspa.1969.0169.

## A 弹性半空间受点力: Boussinesq 解的推导

本附录推导第 3.3 节的式 (3.4), 即表面位移  $u_z = \frac{(1-\nu^2)F}{\pi E_s}$ 。路线是:

1. 写出三维弹性体的平衡方程 (Navier 方程);
2. 用一个“把弹性问题化为找调和函数”的表示把它化简;
3. 仿照静电学中的点电荷与像电荷, 选出两个势函数;
4. 用表面无外力与合力为  $F$  两个条件定出待定常数。

所有中间式都用 sympy 逐一核验过。注意: 本附录中  $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$  表示到受力点的距离,  $\psi$ 、 $\beta$  是势函数, 与正文中的密度  $\rho$ 、接触压缩量  $\psi$  无关。

### A.1 三维弹性力学的基本方程

#### 定义：位移场与应变

物体内原来位于  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$  的质点移动到  $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}$  叫位移场。小形变下定义应变

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{A.1})$$

$i = j$  时,  $\varepsilon_{xx} = \partial u_x / \partial x$  就是  $x$  方向小线段的相对伸长 (正应变), 与正文 §3.1 的定义相同。  
 $i \neq j$  时叫切应变: 原来沿  $x$ 、 $y$  方向的两条小线段, 前者因  $\partial u_y / \partial x$  转过小角度  $\partial u_y / \partial x$ , 后者因  $\partial u_x / \partial y$  向反方向转过  $\partial u_x / \partial y$ , 两线间的直角减小了  $\gamma_{xy} = \partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y = 2\varepsilon_{xy}$ 。所以切应变是“直角的改变量”的一半。整体转动不改变直角, 也不出现在  $\varepsilon_{ij}$  中。

#### 定义：应力分量

$\sigma_{ij}$  表示外法线沿  $x_j$  方向的截面上, 单位面积所受力的  $x_i$  分量。 $\sigma_{xx}$  等是正应力 (拉为正),  $\sigma_{xy}$  等是切应力。对一个小立方体取力矩平衡可得  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 。外法线为单位矢量  $\mathbf{n}$  的面元上, 单位面积受力 (称为面力) 为  $t_i = \sum_j \sigma_{ij} n_j$ 。

#### 推导：各向同性胡克定律

正应力部分: 由正文 §3.1 的三维胡克定律  $\varepsilon_{xx} = [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]/E$  等三式, 三式相加得  $\text{tr } \varepsilon \equiv \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{1-2\nu}{E} \text{tr } \sigma$ 。把第一式写成  $E\varepsilon_{xx} = (1+\nu)\sigma_{xx} - \nu \text{tr } \sigma$ , 再代入  $\text{tr } \sigma$ , 解出

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xx} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr } \varepsilon.$$

切应力部分: 实验上, 切应力  $\tau$  引起的直角改变量  $\gamma$  与  $\tau$  成正比,  $\tau = G\gamma$ ,  $G$  叫切变模量。要求  $G$  与  $E$ 、 $\nu$  的关系, 可以把坐标轴转过  $45^\circ$ 。应力分量在转轴时的变换规则与附录 B.3 中二次型系数  $\kappa_{ij}$  的完全相同 (应变也一样), 所以 “ $x$ 、 $y$  面上只有切应力  $\tau$ ” 等价于 “ $45^\circ$  方向上有主应力  $+\tau$  与  $-\tau$ ”。由三维胡克定律, 这两个方向的主应变为  $\pm(\tau + \nu\tau)/E$ , 再转回  $x$ 、 $y$  轴得  $\varepsilon_{xy} = (1+\nu)\tau/E$ 。于是  $\gamma = 2\varepsilon_{xy} = 2(1+\nu)\tau/E$ , 即

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

合写: 引入  $\lambda \equiv \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}$  (拉梅常数), 正应力与切应力两部分可以合写成

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij} \text{tr } \varepsilon, \quad (\text{A.2})$$

其中  $\delta_{ij}$  在  $i = j$  时为 1, 否则为 0。检验: 只有  $\sigma_{xx} = \sigma$  时, 解出  $\varepsilon_{xx} = \sigma/E, \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu\sigma/E$ , 回到正文式 (3.1)。

#### 推导: 平衡方程与 Navier 方程

第 1 步: 体元受力。取边长  $dx, dy, dz$  的小长方体, 与由压强差求流体元合力的方法相同。它的两个  $x$  面上, 力的  $x$  分量之差为  $[\sigma_{xx}(x+dx) - \sigma_{xx}(x)]dydz = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dV$ ;  $y$  面、 $z$  面上的切应力同样贡献  $\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}dV, \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}dV$ 。静止且不计重力时合力为零:

$$\sum_j \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{A.3})$$

第 2 步: 代入胡克定律。由式 (A.1),  $\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(2G\varepsilon_{ij}) = G\sum_j \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) = G[\nabla^2 u_i + \frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla \cdot \mathbf{u})]$ , 其中  $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \text{tr } \varepsilon$  是体积的相对变化。另一项  $\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda\delta_{ij} \text{tr } \varepsilon) = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla \cdot \mathbf{u})$ 。

第 3 步: 合并。  $G\nabla^2 u_i + (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$ 。由于  $\lambda + G = \frac{G}{1-2\nu}$ , 两边除以  $G$ :

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (\text{A.4})$$

这就是各向同性弹性体的平衡方程 (Navier 方程)。它与  $G$  无关: 位移的空间形状只由  $\nu$  决定,  $G$  只出现在边界条件中。

## A.2 问题的提法

#### 假设: Boussinesq 问题

1. 物体占据半空间  $z > 0$ ,  $z$  轴指向物体内部; 表面是  $z = 0$  平面。
2. 原点处作用一个沿  $+z$  方向 (指向物体内部) 的集中力  $F$ ; 表面其余各处不受力。表面外法线为  $-\hat{z}$ , 面力为  $t_i = -\sigma_{iz}$ , 所以在  $z = 0, r \neq 0$  处要求  $\sigma_{zz} = 0, \sigma_{rz} = 0$ 。
3. 力的大小用整体平衡来表达。取  $0 < z < c$  的整块“厚板”: 它在原点受外力  $+F$ ; 在  $z = c$  平面上受下方材料的面力, 该面的外法线为  $+\hat{z}$ , 面力的  $z$  分量为  $\sigma_{zz}$ ; 侧面在无穷远处, 应力衰减足够快 (下面会看到  $\sigma \propto 1/\rho^2$ ), 贡献为零。所以

$$\int_0^\infty \sigma_{zz}(r, c) 2\pi r dr = -F \quad \text{对任意 } c > 0. \quad (\text{A.5})$$

负号表示平面上受压。

4. 无穷远处位移趋于零。

**柱坐标下的轴对称形变** 问题绕  $z$  轴对称, 位移只有  $u_r(r, z), u_z(r, z)$  两个分量。各应变分量为

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).$$

其中  $\varepsilon_{\theta\theta} = u_r/r$  来自周向: 半径  $r$  的一圈质点整体向外移动  $u_r$ , 周长由  $2\pi r$  变为  $2\pi(r + u_r)$ , 相对伸长为  $u_r/r$ 。在任一点取局部的  $(r, \theta, z)$  正交方向, 式 (A.2) 照样成立 (各向同性材料不分方

向), 于是  $\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_{zz} + \lambda \operatorname{tr} \varepsilon$ ,  $\sigma_{rz} = 2G\varepsilon_{rz}$ ,  $\operatorname{tr} \varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}$ 。

### A.3 Papkovitch–Neuber 表示：化为找调和函数

满足  $\nabla^2 f = 0$  的函数叫调和函数，静电学中无电荷区域的电势就是调和函数。下面的表示把求解 Navier 方程化为寻找调和函数。

#### 要点：Papkovitch–Neuber 表示

若矢量函数  $\psi$  的三个分量和标量函数  $\beta$  都是调和函数 ( $\nabla^2 \psi = 0$ ,  $\nabla^2 \beta = 0$ )，则

$$\mathbf{u} = 4(1 - \nu)\psi - \nabla(\mathbf{x} \cdot \psi + \beta) \quad (\text{A.6})$$

满足 Navier 方程 (A.4)。这一表示在 20 世纪 30 年代由 Papkovitch 与 Neuber 提出；下面只需要证明它确实满足方程。

#### 推导：证明

第 1 步：一个恒等式。对  $x\psi_x$  用乘积求导两次： $\nabla^2(x\psi_x) = x\nabla^2\psi_x + 2\frac{\partial\psi_x}{\partial x} + \psi_x\nabla^2 x = x\nabla^2\psi_x + 2\frac{\partial\psi_x}{\partial x}$ 。对  $y\psi_y$ 、 $z\psi_z$  同理，三式相加：

$$\nabla^2(\mathbf{x} \cdot \psi) = \mathbf{x} \cdot \nabla^2 \psi + 2\nabla \cdot \psi = 2\nabla \cdot \psi \quad (\text{因为 } \nabla^2 \psi = 0).$$

第 2 步： $\nabla^2 \mathbf{u}$ 。拉普拉斯算符与梯度可以交换顺序： $\nabla^2 \mathbf{u} = 4(1 - \nu)\nabla^2 \psi - \nabla[\nabla^2(\mathbf{x} \cdot \psi) + \nabla^2 \beta] = -2\nabla(\nabla \cdot \psi)$ 。

第 3 步： $\nabla \cdot \mathbf{u}$ 。梯度的散度就是拉普拉斯： $\nabla \cdot \mathbf{u} = 4(1 - \nu)\nabla \cdot \psi - \nabla^2(\mathbf{x} \cdot \psi) - \nabla^2 \beta = 4(1 - \nu)\nabla \cdot \psi - 2\nabla \cdot \psi = 2(1 - 2\nu)\nabla \cdot \psi$ 。

第 4 步：代入。 $\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -2\nabla(\nabla \cdot \psi) + 2\nabla(\nabla \cdot \psi) = 0$ 。证毕。系数  $4(1 - \nu)$  正是为了让第 4 步两项抵消而选的。

线弹性问题的解是唯一的：满足方程和全部边界条件的位移场只有一个。所以只要找到满足所有条件的  $\psi$ 、 $\beta$ ，得到的就是答案。这与静电学中“猜”出满足边界条件的电势（如像电荷法）是同一个思路。

### A.4 选择势函数

第 1 步：点源。力集中作用在原点，位移在原点附近应当发散。仿照点电荷的电势，取

$$\psi = \frac{A}{\rho} \hat{z}, \quad \rho = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$A$  为待定常数。 $1/\rho$  是点电荷的电势，除原点外处处调和。

第 2 步：“像”源。只用第 1 步的  $\psi$  时，表面上会留下切应力（下面第 A.5 节会算出），需要再加一个奇点在物体外面的调和函数来抵消。取

$$\beta = B \ln(\rho + z),$$

$B$  为待定常数。它的电学图像是: 沿负  $z$  轴 ( $z < 0$ ) 从原点到无穷远均匀分布的线电荷, 其电势为  $\int_0^L \frac{ds}{\sqrt{r^2 + (z+s)^2}} = \ln(2L) - \ln(\rho + z) + \mathcal{O}(1/L)$ , 常数  $\ln(2L)$  不影响导数。线电荷由点电荷叠加而成, 每个点电荷的电势都调和, 所以  $\ln(\rho + z)$  在线电荷以外处处调和 (也可以直接求导验证)。它的奇点  $\rho + z = 0$  只在负  $z$  轴上, 即物体外部 (加上原点), 不会在物体内部引入新的力源。

第 3 步: 位移。此时  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\psi} = zA/\rho$ , 记  $\phi = zA/\rho + B \ln(\rho + z)$ 。轴对称时梯度为  $\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$ 。用  $\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{r}{\rho}$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{z}{\rho}$  以及  $\frac{\partial}{\partial z} \ln(\rho + z) = \frac{z/\rho + 1}{\rho + z} = \frac{1}{\rho}$ , 由式 (A.6) 得

$$u_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = A \frac{rz}{\rho^3} - B \frac{r}{\rho(\rho + z)}, \quad (\text{A.7})$$

$$u_z = \frac{4(1-\nu)A}{\rho} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = A \frac{z^2}{\rho^3} + \frac{(3-4\nu)A - B}{\rho}. \quad (\text{A.8})$$

### A.5 用边界条件定常数

第 1 步: 表面无切应力定  $B$ 。在  $z = 0$  ( $r > 0$ ) 处对式 (A.7)、(A.8) 求导。  $\frac{\partial}{\partial z} [\rho(\rho + z)]_{z=0} = r$ , 所以  $\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho(\rho + z)} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{r^3}$ , 于是

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{A+B}{r^2}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} \Big|_{z=0} = -\frac{(3-4\nu)A - B}{r^2},$$

$$\sigma_{rz}(r, 0) = G \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)_{z=0} = \frac{G}{r^2} [2B - 2(1-2\nu)A] = 0 \implies B = (1-2\nu)A.$$

如果没有  $\beta$  ( $B = 0$ ), 表面切应力为  $-2(1-2\nu)GA/r^2 \neq 0$ , 这就是第 A.4 节第 2 步要加 “像源” 的原因。

第 2 步: 求  $\sigma_{zz}$ 。代入  $B = (1-2\nu)A$ ,  $u_z = A \left[ \frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1-\nu)}{\rho} \right]$ 。求导得

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = A \left[ \frac{2\nu z}{\rho^3} - \frac{3z^3}{\rho^5} \right].$$

由第 A.3 节第 3 步,  $\text{tr} \varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{u} = 2(1-2\nu) \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = -2(1-2\nu) \frac{Az}{\rho^3}$ 。于是

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_{zz} + \lambda \text{tr} \varepsilon = 2GA \left[ \frac{2\nu z}{\rho^3} - \frac{3z^3}{\rho^5} \right] - \frac{2G\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{2(1-2\nu)Az}{\rho^3} = -\frac{6GAz^3}{\rho^5}.$$

$\nu$  的项恰好抵消。在  $z = 0$ 、 $r \neq 0$  处  $\sigma_{zz} = 0$ , 表面法向无外力的条件自动满足。同理可得  $\sigma_{rz} = -6GA rz^2/\rho^5$ , 在表面也为零。

第 3 步: 合力定  $A$ 。代入式 (A.5), 令  $t = r^2 + c^2$ ,  $dt = 2r dr$ :

$$\int_0^\infty -\frac{6GA c^3}{(r^2 + c^2)^{5/2}} 2\pi r dr = -6\pi GAc^3 \int_{c^2}^\infty t^{-5/2} dt = -6\pi GAc^3 \cdot \frac{2}{3c^3} = -4\pi GA.$$

结果与  $c$  无关, 正是整体平衡所要求的 (任一平面传递的合力都等于  $F$ )。令其等于  $-F$ :

$$A = \frac{F}{4\pi G}.$$

### A.6 结果与检验

## 要点: Boussinesq 解

$$u_z = \frac{F}{4\pi G} \left[ \frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1-\nu)}{\rho} \right], \quad u_r = \frac{F}{4\pi G} \left[ \frac{rz}{\rho^3} - \frac{(1-2\nu)r}{\rho(\rho+z)} \right]. \quad (\text{A.9})$$

在表面  $z = 0$  ( $\rho = r$ ):

$$u_z(r, 0) = \frac{(1-\nu)F}{2\pi G r} = \frac{(1-\nu^2)F}{\pi E r}, \quad u_r(r, 0) = -\frac{(1-2\nu)F}{4\pi G r}. \quad (\text{A.10})$$

第二个等号用了  $G = E/[2(1+\nu)]$ :  $\frac{1-\nu}{2\pi G} = \frac{(1-\nu) \cdot 2(1+\nu)}{2\pi E} = \frac{1-\nu^2}{\pi E}$ 。这正是正式式 (3.4)。

## 检验

- 量纲:  $[F/(Gr)] = \text{N}/(\text{Pa} \cdot \text{m}) = \text{m}$ , 是长度。
- $1/r$  律: 与第 3.3 节量纲论证的结论一致, 现在得到了系数  $(1-\nu^2)/\pi$ 。
- $u_r(r, 0) < 0$ : 表面质点被拉向受力点。压入处的材料向下移动, 带动周围表面向中心收拢。 $\nu = 1/2$  时  $u_r(r, 0) = 0$ : 此时  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 2(1-2\nu)\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$ , 处处体积不变 (不可压缩), 表面质点只沿竖直方向移动;  $\nu < 1/2$  时材料在受力点下方被压缩 ( $\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} < 0$ ), 表面随之向中心收拢。
- 合力: 由第 A.5 节第 3 步, 任一深度的平面上, 合力都是  $-F$ 。另外, 用位移数值求导出  $\sigma_{zz}$  再数值积分,  $c = 0.1, 1, 5$  时都得  $-F$  (相对误差  $< 10^{-4}$ , 受数值求导精度限制)。
- 远处:  $\rho \rightarrow \infty$  时位移按  $1/\rho$  趋于零, 应力按  $1/\rho^2$  趋于零, 满足假设第 3、4 条。
- sympy 核验: 在笛卡儿坐标中, 把式 (A.6) 直接代入 Navier 方程三个分量, 在随机有理点上以 40 位精度求值, 结果为零;  $1/\rho$ 、 $\ln(\rho+z)$  的调和性,  $\sigma_{rz}(r, 0)$ 、 $\sigma_{zz}$  的闭式与合力积分都逐一核对 (图 10)。

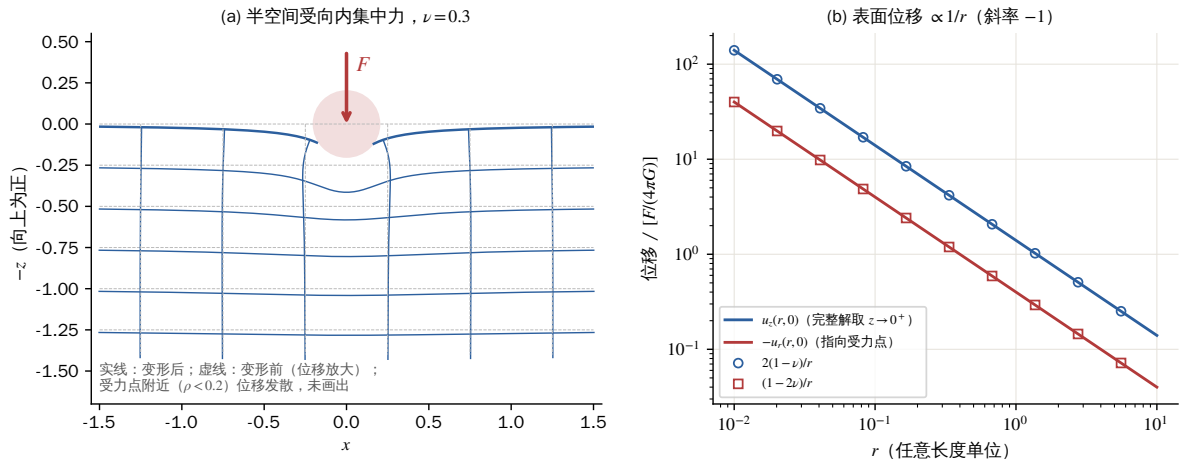


图 10 Boussinesq 解,  $\nu = 0.3$ 。(a) 截面  $y = 0$  上网格线的变形 (式 (A.9), 位移放大; 受力点附近  $\rho < 0.2$  位移发散, 未画出): 表面下陷, 并向受力点收拢, 影响随深度衰减。(b) 表面位移 (完整解取  $z \rightarrow 0^+$ ) 与  $1/r$  律:  $u_z$  与  $2(1-\nu)/r$ 、 $-u_r$  与  $(1-2\nu)/r$  (以  $F/(4\pi G)$  为单位) 重合, 双对数斜率为  $-1$ 。

## B 间隙函数的推导

本附录补全第 3.4 节的几何推导：先约定坐标与符号，再给出球面的精确式与误差估计；接着处理一般光滑曲面和主轴不重合的两个物体；最后说明间隙怎样进入接触条件。

### B.1 坐标与符号约定

1. 公共切平面。两个未形变的光滑物体在点  $O$  相切。 $O$  处两个表面各有一个切平面；两表面相切而不相交，这两个切平面必须重合，称为公共切平面。取  $O$  为原点， $x$ 、 $y$  轴在公共切平面内， $z$  轴沿公共法线、指向物体 1（上方的物体）。
2. 两个高度函数。物体 1 的表面在  $(x, y)$  处离开切平面的高度记为  $z_1(x, y)$ ，向上为正；物体 2 的表面离开切平面的深度记为  $z_2(x, y)$ ，向下为正。两种约定都使“表面离开切平面、远离对方”时取正值。于是两未形变表面在  $(x, y)$  处的竖直间距为

$$h(x, y) = z_1(x, y) + z_2(x, y). \quad (\text{B.1})$$

3. 凹面的符号。若物体 2 是一个凹窝（表面向上弯、包住物体 1），离开  $O$  后它的表面高于切平面，按约定  $z_2 < 0$ 。下文的曲率半径由  $z = \frac{r^2}{2R}$  定义，所以凹面的曲率半径取负值。
4. 为什么没有一次项。把  $z_1$  在  $O$  点作二元泰勒展开：

$$z_1(x, y) = z_1(0, 0) + \frac{\partial z_1}{\partial x} \Big|_O x + \frac{\partial z_1}{\partial y} \Big|_O y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} y^2 \right)_O + \cdots$$

$O$  在表面上，所以  $z_1(0, 0) = 0$ ；切平面就是在  $O$  点与表面坡度相同的平面，而它就是  $z = 0$  平面，所以两个一阶导数（表面在  $O$  点沿  $x$ 、 $y$  方向的坡度）都为零。因此展开从二次项开始。 $z_2$  同理。

### B.2 球面：精确式、展开与误差

半径  $R$  的球面（以  $O$  为最低点）上，离对称轴距离  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  处的高度为（勾股定理）

$$z = R - \sqrt{R^2 - r^2}. \quad (\text{B.2})$$

第 1 步：有理化。分子分母同乘  $R + \sqrt{R^2 - r^2}$ ：

$$z = \frac{R^2 - (R^2 - r^2)}{R + \sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{r^2}{R + \sqrt{R^2 - r^2}}.$$

第 2 步：提出抛物线近似。记  $x \equiv r^2/R^2$ ，则

$$z = \frac{r^2}{2R} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1 - x}}. \quad (\text{B.3})$$

$x \rightarrow 0$  时第二个因子趋于 1，所以领头项是  $z \approx r^2/(2R)$ 。

第 3 步：级数。由二项式展开  $\sqrt{1 - x} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-x)^k = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \cdots$ ，其中  $k \geq 1$  的通项为  $-\frac{(2k)!}{(2k-1)4^k(k!)^2} x^k$ 。代入式 (B.2)：

$$z = R(1 - \sqrt{1 - x}) = R \left( \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots \right) = \frac{r^2}{2R} + \frac{r^4}{8R^3} + \frac{r^6}{16R^5} + \cdots$$

第 4 步：丢掉高阶项的误差。定义相对误差  $\varepsilon \equiv z/\frac{r^2}{2R} - 1$ 。由式 (B.3)，记  $s = \sqrt{1-x}$ ，

$$\varepsilon = \frac{2}{1+s} - 1 = \frac{1-s}{1+s} = \frac{(1-s)(1+s)}{(1+s)^2} = \frac{x}{(1+\sqrt{1-x})^2}.$$

这是精确式。因为  $1-x \leq \sqrt{1-x} \leq 1$  ( $0 \leq x \leq 1$ )，所以

$$\frac{x}{4} \leq \varepsilon \leq \frac{x}{(2-x)^2}, \quad \varepsilon \approx \frac{x}{4} = \frac{r^2}{4R^2} \quad (x \ll 1). \quad (\text{B.4})$$

接触区内  $r \leq a$ ，所以丢掉  $r^4$  及更高次项造成的相对误差不超过约  $(a/R)^2/4$ 。用正文的数值：两只  $R = 10\text{mm}$  钢球静压  $10\text{N}$ ， $a/R^* = 0.014$ ， $\varepsilon \approx 5 \times 10^{-5}$ ；以  $1\text{m/s}$  相撞， $a_m/R^* = 0.064$ ， $\varepsilon \approx 1.0 \times 10^{-3}$ ；即使以  $3\text{m/s}$  相撞， $a_m/R^* = 0.099$ ， $\varepsilon \approx 2.5 \times 10^{-3}$ 。（这里保守地用  $R^*$  估计；对每个球应当用它自己的  $R_i \geq R^*$ ，误差更小。）而接触区的应变本身就是  $a/R$  量级，线弹性理论忽略的非线性修正也是这个量级，比  $(a/R)^2/4$  大得多。所以在赫兹理论的精度内，只需保留二次项。

### B.3 一般光滑曲面：二次型与主曲率

第 1 步：二次型。由第 B.1 节第 4 条，任何光滑表面在切点附近都可以写成

$$z = \frac{1}{2}(\kappa_{xx}x^2 + 2\kappa_{xy}xy + \kappa_{yy}y^2) + \mathcal{O}(r^3), \quad (\text{B.5})$$

其中  $\kappa_{xx} = \partial^2 z / \partial x^2$  等是 O 点的二阶导数（量纲为  $1/\text{长度}$ ）。球面  $\kappa_{xx} = \kappa_{yy} = 1/R$ ， $\kappa_{xy} = 0$ 。

第 2 步：转动坐标轴。把坐标轴绕  $z$  轴转过  $\theta$ ，新坐标  $(x', y')$  与旧坐标的关系为  $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$ ， $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$ 。代入式 (B.5) 并按  $x'^2$ 、 $x'y'$ 、 $y'^2$  合并：

$$\begin{aligned} \kappa'_{xx} &= \kappa_{xx} \cos^2 \theta + 2\kappa_{xy} \sin \theta \cos \theta + \kappa_{yy} \sin^2 \theta, \\ \kappa'_{yy} &= \kappa_{xx} \sin^2 \theta - 2\kappa_{xy} \sin \theta \cos \theta + \kappa_{yy} \cos^2 \theta, \\ \kappa'_{xy} &= -\frac{\kappa_{xx} - \kappa_{yy}}{2} \sin 2\theta + \kappa_{xy} \cos 2\theta. \end{aligned}$$

第 3 步：两个组合量。前两式相加得  $\kappa'_{xx} + \kappa'_{yy} = \kappa_{xx} + \kappa_{yy}$ ：平均曲率  $S \equiv \frac{1}{2}(\kappa_{xx} + \kappa_{yy})$  与转角无关。前两式相减再用倍角公式得  $\frac{1}{2}(\kappa'_{xx} - \kappa'_{yy}) = \frac{\kappa_{xx} - \kappa_{yy}}{2} \cos 2\theta + \kappa_{xy} \sin 2\theta$ 。把它与  $\kappa'_{xy}$  合成一个复数：

$$D \equiv \frac{\kappa_{xx} - \kappa_{yy}}{2} + i \kappa_{xy} \implies D' = e^{-2i\theta} D. \quad (\text{B.6})$$

即坐标轴转过  $\theta$  时， $D$  只是在复平面上转过  $-2\theta$ ，模  $|D|$  不变。

第 4 步：消去交叉项。交叉项系数  $\kappa'_{xy} = \text{Im } D'$ 。选  $2\theta$  等于  $D$  的辐角， $D'$  就成为正实数，交叉项消失：

$$\tan 2\theta = \frac{2\kappa_{xy}}{\kappa_{xx} - \kappa_{yy}}. \quad (\text{B.7})$$

此时  $\kappa'_{xx} = S + |D|$ ， $\kappa'_{yy} = S - |D|$ ，即两个主曲率

$$\kappa_{\pm} = \frac{\kappa_{xx} + \kappa_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa_{xx} - \kappa_{yy}}{2}\right)^2 + \kappa_{xy}^2}, \quad R' = \frac{1}{\kappa_+}, \quad R'' = \frac{1}{\kappa_-}, \quad (\text{B.8})$$

$R'$ 、 $R''$  叫主曲率半径，对应的方向叫主轴。在主轴坐标下， $z = \frac{1}{2}(x'^2/R' + y'^2/R'')$ 。这就是“对称矩阵  $\begin{pmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} \\ \kappa_{xy} & \kappa_{yy} \end{pmatrix}$  的本征值与本征方向”，这里只用到了三角恒等式和复数。

**例题：圆柱面**

半径  $R$ 、轴线沿  $y$  方向的圆柱面，截面是圆， $z = R - \sqrt{R^2 - x^2} \approx x^2/(2R)$ ，与  $y$  无关： $\kappa_{xx} = 1/R$ ， $\kappa_{yy} = \kappa_{xy} = 0$ 。主曲率半径  $R' = R$ （垂直于轴线）、 $R'' = \infty$ （沿轴线）。若把轴线转到与  $y$  轴成  $\varphi$  角，按第 2 步算出的  $\kappa_{xx}$ 、 $\kappa_{xy}$ 、 $\kappa_{yy}$  不再简单，但  $S = \frac{1}{2R}$ 、 $|D| = \frac{1}{2R}$  不变，由式 (B.8) 仍得  $\kappa_{\pm} = 1/R, 0$ 。

**B.4 两个物体：主轴斜交**

设物体 1 的主轴沿  $x, y$ ，主曲率半径  $R'_1, R''_1$ ；物体 2 的主曲率半径  $R'_2, R''_2$ ，其主轴相对  $x$  轴转过  $\omega$ 。

第 1 步：同一坐标系中相加。两个高度函数都是  $(x, y)$  的二次型，由式 (B.1)，间隙的系数是两者系数之和： $K_{xx} = \kappa_{xx}^{(1)} + \kappa_{xx}^{(2)}$  等。相应地，平均曲率与复数  $D$  也直接相加。

第 2 步：写出各自的  $S, D$ 。物体 1 在自己的主轴坐标中  $\kappa_{xy} = 0$ ：

$$S_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R''_1} \right), \quad D_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R''_1} \right).$$

物体 2 在自己的主轴坐标中  $D_2^{(\text{自})} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R''_2} \right)$  为实数。它的主轴坐标相对  $(x, y)$  转过  $\omega$ ，由式 (B.6) 反推，在  $(x, y)$  坐标中  $D_2 = e^{2i\omega} D_2^{(\text{自})}$ ；而  $S_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R''_2} \right)$  与坐标无关。

第 3 步：合成。 $S = S_1 + S_2$ ， $D = D_1 + e^{2i\omega} D_2^{(\text{自})}$ 。由余弦定理（两复数之和的模），

$$|D|^2 = D_1^2 + (D_2^{(\text{自})})^2 + 2D_1 D_2^{(\text{自})} \cos 2\omega.$$

第 4 步：转到合成主轴。按第 B.3 节第 4 步转到  $D$  的主轴  $(x', y')$ ，间隙成为  $h = \frac{1}{2}(S - |D|)x'^2 + \frac{1}{2}(S + |D|)y'^2 \equiv Ax'^2 + By'^2$ （取  $B \geq A$ ）。于是

$$A + B = S = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R''_1} + \frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R''_2} \right), \quad (\text{B.9})$$

$$B - A = |D| = \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R''_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R''_2} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R''_1} \right) \left( \frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R''_2} \right) \cos 2\omega}. \quad (\text{B.10})$$

这正是接触力学文献中常用的形式 [4]。我们用 200 组随机曲率（含凹面）与矩阵本征值逐一比较，二者一致到  $10^{-12}$ ；sympy 也验证了  $(B - A)^2 = (A + B)^2 - 4 \det$  这一恒等式。

第 5 步：等效半径。把  $h = Ax'^2 + By'^2$  写成  $h = \frac{x'^2}{2R_a} + \frac{y'^2}{2R_b}$ ， $R_a = \frac{1}{2A}$ ， $R_b = \frac{1}{2B}$ ，取几何平均，定义等效半径

$$R_e = \sqrt{R_a R_b} = \frac{1}{2\sqrt{AB}}. \quad (\text{B.11})$$

$A = B$  时  $R_e = 1/(2A)$ ，就是正文的  $R^*$ 。 $h$  是常数的等间隙线是以  $x', y'$  为主轴的椭圆（图 11(a)）。 $A \neq B$  时接触区也是椭圆，压强分布是半椭球面，求解要用到椭圆积分 [4]，超出本讲范围。本讲只处理  $A = B$  的轴对称情形。

**B.5 特例**

1. 两球： $R'_i = R''_i = R_i$ ， $D_1 = D_2 = 0$ ，所以  $A = B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{2R^*}$ ， $h = r^2/(2R^*)$ ，回到正文式 (3.6)。

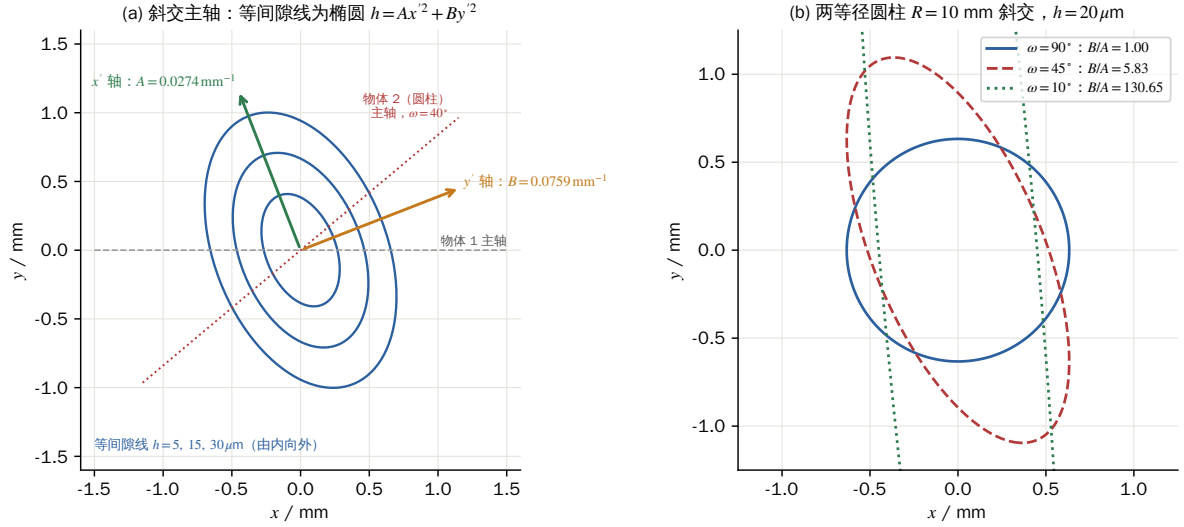


图 11 等间隙线  $h(x, y) = \text{常数}$ 。(a) 物体 1:  $R'_1 = 10 \text{ mm}$ 、 $R''_1 = 25 \text{ mm}$  (主轴沿  $x$ 、 $y$ )；物体 2: 半径  $15 \text{ mm}$  的圆柱 ( $R''_2 = \infty$ )，轴线方向转过  $\omega = 40^\circ$ 。合成间隙的主轴 (箭头) 与两物体的主轴都不重合；由式 (B.9)–(B.10) 得  $A = 0.0274 \text{ mm}^{-1}$ 、 $B = 0.0759 \text{ mm}^{-1}$ ，与数值求本征值一致，等间隙线为椭圆。(b) 两只半径  $10 \text{ mm}$  的圆柱以不同夹角交叉： $\omega = 90^\circ$  时  $A = B$ ，等间隙线为圆，相当于球压平面； $\omega = 45^\circ$  时  $B/A = 5.83$ ； $\omega \rightarrow 0$  时  $A \rightarrow 0$ ，退化为平行直线 (线接触)。

2. 两等半径圆柱正交:  $R'_1 = R'_2 = R$ ,  $R''_1 = R''_2 = \infty$ ,  $\omega = 90^\circ$ .  $D_1 = \frac{1}{2R}$ ,  $D_2 = e^{i\pi} \frac{1}{2R} = -\frac{1}{2R}$ , 相加为零, 所以  $A = B = \frac{1}{2R}$ ,  $h = r^2/(2R)$ : 与半径  $R$  的球压在平面上完全相同。测量表面力的实验正是利用这一点, 把两片云母贴在两个轴线互相垂直的圆柱面上, Tabor 与 Winterton 在论文中明确指出“这种接触与球-平面接触相似” [33]。一般夹角时, 由式 (B.10),  $B - A = |\cos \omega|/R$ , 只有  $\omega = 90^\circ$  时才轴对称。
3. 平行圆柱:  $\omega = 0$ ,  $|D| = S$ , 所以  $A = 0$ ,  $B = \frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$ 。间隙与沿轴线的坐标无关, 接触区是一条窄带 (线接触), 二维问题的力-压缩关系与  $F \propto \delta^{3/2}$  不同, 赫兹点接触的结果不适用 [4]。
4. 球在凹球窝中:  $R_2 < 0$ 。由  $\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{|R_2|}$ , 当  $|R_2| > R_1$  时  $R^* > R_1$ : 球窝越贴合,  $R^*$  越大, 同样载荷下接触圆越大、压强越低。 $|R_2| \rightarrow R_1$  时  $R^* \rightarrow \infty$ , 间隙处处为零, “小接触区”假设失效。

## B.6 间隙怎样进入接触条件

第 1 步: 刚性趋近量。在两个物体内部、远离接触区 (距离  $\gg a$ ) 的地方各取一个参考点, 例如两球心。压紧过程中两参考点沿  $z$  轴相互靠近的距离记为  $\delta$ 。若两物体是刚体, 靠近  $\delta$  后,  $(x, y)$  处两表面的竖直间距由  $h$  变为  $h(x, y) - \delta$ ; 在  $h < \delta$  的区域, 这个量为负, 表示两刚体会“互相穿透”。

第 2 步: 加上弹性位移。实际上两物体都会形变。记物体  $i$  表面在  $(x, y)$  处的法向位移为  $u_{zi}$ , 并规定指向物体  $i$  内部为正 (即离开对方)。参考点离接触区很远, 那里的弹性位移已衰减到可以忽略 (由 Boussinesq 解, 位移随距离按  $1/s$  衰减, 第 3.3 节)。所以形变后的实际间距为

$$g(x, y) = h(x, y) - \delta + u_{z1}(x, y) + u_{z2}(x, y). \quad (\text{B.12})$$

第 3 步：接触的两种情形。实际间距不能为负（不能穿透）： $g \geq 0$ 。在接触区内两表面贴合， $g = 0$ ；在接触区外，表面分开， $g > 0$ 。代入式 (B.12)：

$$u_{z1} + u_{z2} = \delta - h \quad (\text{接触区内}), \quad u_{z1} + u_{z2} > \delta - h \quad (\text{接触区外}).$$

另外，接触区内压强  $p \geq 0$ （无粘附），接触区外  $p = 0$ ，两种情形可以合写为  $g \geq 0, p \geq 0, pg = 0$ 。

第 4 步：与正文衔接。对轴对称情形  $h = r^2/(2R^*)$ ，这就是正文式 (4.1) 及其后的不等式。剩下的问题，即什么样的  $p(r)$  使  $u_{z1} + u_{z2}$  恰好等于  $\delta - r^2/(2R^*)$ ，由第 4.3 节与附录 C 解决。

## C 赫兹压强产生的表面位移

本附录证明式 (4.6)。由式 (4.4)，需计算接触区内一点 B（到中心 O 的距离为  $r < a$ ）处的积分

$$I(r) = \iint_{\rho \leq a} \frac{p(\rho) dS}{s}, \quad p(\rho) = \frac{p_0}{a} \sqrt{a^2 - \rho^2}, \quad (\text{C.1})$$

其中  $\rho$  是面元到 O 的距离， $s$  是面元到 B 的距离。

**第 1 步：以 B 为极点的极坐标** 以 B 为原点、以  $\overrightarrow{OB}$  方向为极轴建立极坐标  $(s, \varphi)$ 。面元  $dS = s ds d\varphi$ ，于是被积函数中的  $1/s$  被消去：

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{s_1(\varphi)} p ds.$$

这就是选 B 为极点的好处：点力解的  $1/s$  奇点被面元的  $s$  抵消。

**第 2 步：沿射线的压强** 射线上距 B 为  $s$  的点 C，满足  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$ ，所以  $\rho^2 = r^2 + s^2 + 2rs \cos \varphi$ 。记  $\alpha^2 = a^2 - r^2 > 0$ ， $\beta = r \cos \varphi$ ，则

$$a^2 - \rho^2 = \alpha^2 - 2\beta s - s^2 = (\alpha^2 + \beta^2) - (s + \beta)^2.$$

射线在  $a^2 - \rho^2 = 0$  处离开接触圆： $s_1 = -\beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ 。

**第 3 步：沿射线积分** 令  $s + \beta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin \theta$ 。 $s = 0$  对应  $\theta_0 = \arcsin(\beta/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$ ， $s = s_1$  对应  $\theta = \pi/2$ ：

$$J(\varphi) \equiv \int_0^{s_1} \sqrt{\alpha^2 - 2\beta s - s^2} ds = (\alpha^2 + \beta^2) \int_{\theta_0}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) - \frac{\alpha\beta}{2},$$

最后一步用了  $\sin \theta_0 \cos \theta_0 = \alpha\beta/(\alpha^2 + \beta^2)$ 。

**第 4 步：方向配对** 射线  $\varphi$  与反方向射线  $\varphi + \pi$  的  $\beta$  互为相反数，因而  $\theta_0$  也互为相反数。两者相加，含  $\theta_0$  的项和  $\alpha\beta$  项都抵消：

$$J(\varphi) + J(\varphi + \pi) = \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{\pi}{2}(a^2 - r^2 + r^2 \cos^2 \varphi).$$

**第 5 步：对方向积分**

$$\int_0^{2\pi} J d\varphi = \int_0^\pi [J(\varphi) + J(\varphi + \pi)] d\varphi = \frac{\pi}{2} \left[ \pi(a^2 - r^2) + \frac{\pi r^2}{2} \right] = \frac{\pi^2}{4} (2a^2 - r^2).$$

于是  $I = \frac{p_0}{a} \cdot \frac{\pi^2}{4} (2a^2 - r^2)$ , 代入式 (4.4):

$$u_1 + u_2 = \frac{1}{\pi E^*} I = \frac{\pi p_0}{4a E^*} (2a^2 - r^2), \quad r \leq a, \quad (\text{C.2})$$

即式 (4.6)。

**接触区外** 对  $r > a$  的点, 用同样方法 (此时只有一部分方向的射线穿过接触圆) 可得 [4]

$$u_1 + u_2 = \frac{p_0}{2a E^*} \left[ (2a^2 - r^2) \arcsin \frac{a}{r} + a \sqrt{r^2 - a^2} \right], \quad r > a. \quad (\text{C.3})$$

在  $r = a$  处与式 (C.2) 连续, 均为  $\pi p_0 a / (4E^*)$ 。图 1(b) 的圆圈是对式 (C.1) 的直接数值积分 (对方位角的积分可化为第一类完全椭圆积分这一标准特殊函数, 再对径向用自适应数值求积), 与式 (C.2)、(C.3) 在  $0 \leq r \leq 3a$  内的最大相对偏差为  $4 \times 10^{-9}$ 。

**注：静电类比**

式 (C.1) 与面电荷密度  $p$  产生的静电势形式相同。“椭球上的均匀体电荷投影到赤道面”恰好给出  $\sqrt{a^2 - \rho^2}$  型面密度, 而均匀带电椭球内部的电势是坐标的二次函数, 这就是半椭球压强产生二次位移的深层原因。

**D 接触时间积分与 B 函数****定义：Γ 函数与 B 函数**

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$  ( $x > 0$ ), 满足  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 、 $\Gamma(n+1) = n!$ 、 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ 。B 函数  $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ , 可以证明  $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$  (把  $\Gamma(x)\Gamma(y)$  写成二重积分后换元即可, 见任何数学物理方法教材)。

式 (5.3) 中的积分, 令  $t = x^{5/2}$ , 即  $x = t^{2/5}$ ,  $dx = \frac{2}{5} t^{-3/5} dt$ :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{5/2}}} = \frac{2}{5} \int_0^1 t^{-3/5} (1-t)^{-1/2} dt = \frac{2}{5} B\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{\Gamma(\frac{2}{5})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{9}{10})}. \quad (\text{D.1})$$

数值:  $\Gamma(0.4) = 2.21816$ ,  $\Gamma(0.5) = 1.77245$ ,  $\Gamma(0.9) = 1.06863$ , 积分 = 1.47164, 所以  $t_c = 2 \times 1.47164 \delta_m / v = 2.9433 \delta_m / v$ 。用 30 位精度直接数值积分, 结果一致。

**注：对照：线性弹簧与一般幂律**

若  $F = k\delta$ , 同样方法给出积分  $\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2} dx = \pi/2$ ,  $t_c = \pi \delta_m / v = \pi \sqrt{m^*/k}$ , 即半个周期。一般  $F \propto \delta^\beta$  时积分为  $\frac{1}{\beta+1} B(\frac{1}{\beta+1}, \frac{1}{2})$ 。 $\beta = 3/2$  的系数 1.4716 小于  $\pi/2 = 1.5708$ : 在  $0 < x < 1$  上  $x^{5/2} < x^2$ , 被积函数更小。物理上, 赫兹力在  $\delta$  小时很软, 球在大部分压缩路程上几乎不减速, 只在接近  $\delta_m$  处急剧减速, 所以用时比同样  $\delta_m$ 、 $v$  的线性弹簧短。

## E 长波展开与行波解的细节

(1) **记号** 球  $n$  的平衡位置  $x_n = nd$ , 位移  $u_n(t) = u(x_n, t)$ 。接触  $(n-1, n)$  位于两球之间  $x_n - d/2$  处, 其压缩量

$$\psi(x_n - \frac{d}{2}) = u(x_n - d) - u(x_n).$$

定义连续函数  $\psi(x) = u(x - \frac{d}{2}) - u(x + \frac{d}{2})$  与接触力  $f(x) = A\psi(x)^{3/2}$ 。

(2) **力的差分** 式 (7.2) 为  $m\ddot{u}(x) = f(x - \frac{d}{2}) - f(x + \frac{d}{2})$ 。把两项在  $x$  处泰勒展开, 偶数阶项相消:

$$f(x - \frac{d}{2}) - f(x + \frac{d}{2}) = -2\left[\frac{d}{2}f' + \frac{1}{3!}\left(\frac{d}{2}\right)^3 f''' + \cdots\right] = -d f' - \frac{d^3}{24} f''' + \mathcal{O}(d^5). \quad (\text{E.1})$$

(3) **压缩量的展开** 同理,  $\psi = u(x - \frac{d}{2}) - u(x + \frac{d}{2}) = -d u' - \frac{d^3}{24} u''' + \cdots$ 。用  $w = -u'$  ( $u''' = -w''$ ):

$$\psi = d w + \frac{d^3}{24} w'' + \mathcal{O}(d^5). \quad (\text{E.2})$$

(4) **3/2 次幂的展开** 写  $\psi = dw(1 + \epsilon)$ ,  $\epsilon = \frac{d^2 w''}{24w}$ 。长波近似要求  $|\epsilon| \ll 1$ 。用  $(1 + \epsilon)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ :

$$f = A(dw)^{3/2}\left(1 + \frac{d^2 w''}{16w}\right) = Ad^{3/2}\left[w^{3/2} + \frac{d^2}{16}w^{1/2}w''\right], \quad (\text{E.3})$$

略去的是  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ , 即相对主项  $d^4$  阶的项。

(5) **合并** 把式 (E.3) 代入式 (E.1), 保留到  $d^2$  的相对阶 (第二项中只需用主阶  $f \approx Ad^{3/2}w^{3/2}$ ):

$$m\ddot{u} = -Ad^{5/2}\partial_x\left[w^{3/2} + \frac{d^2}{16}w^{1/2}w'' + \frac{d^2}{24}(w^{3/2})''\right].$$

展开  $(w^{3/2})'' = \frac{3}{2}w^{1/2}w'' + \frac{3}{4}w^{-1/2}w'^2$ , 方括号中的  $d^2$  项为  $\frac{d^2}{8}w^{1/2}w'' + \frac{d^2}{32}w^{-1/2}w'^2$ 。另一方面  $w^{1/4}(w^{5/4})'' = \frac{5}{4}w^{1/2}w'' + \frac{5}{16}w^{-1/2}w'^2$ , 乘以  $d^2/10$  后正好是  $\frac{d^2}{8}w^{1/2}w'' + \frac{d^2}{32}w^{-1/2}w'^2$ 。所以方括号  $= w^{3/2} + \frac{d^2}{10}w^{1/4}(w^{5/4})''$  (sympy 逐项核对)。最后对  $x$  求导并用  $\ddot{w} = -\partial_x \ddot{u}$ , 即得式 (7.6), 其中  $c^2 = Ad^{5/2}/m$ 。代入式 (7.1) 与  $m = \frac{\pi}{6}\rho d^3$  得  $c^2 = 2E/[\pi\rho(1 - \nu^2)]$ 。

(6) **以  $\psi$  为变量的另一种近似 (近似 II)** 也可以不经过  $w$ , 直接对式 (7.3) 的二阶差分展开:  $f_{n-1} - 2f_n + f_{n+1} = d^2 f'' + \frac{d^4}{12} f'''' + \cdots$ , 得

$$m\psi_{tt} = Ad^2\left[\psi^{3/2} + \frac{d^2}{12}(\psi^{3/2})_{xx}\right]. \quad (\text{E.4})$$

它与式 (7.6) 在  $(d/L)^2$  阶上同样正确, 区别只在于  $\psi$  与  $dw$  本身相差  $\mathcal{O}(d^3)$  (式 (E.2))。行波解 (例 2 中  $\beta = 3/2$ ) 为  $\psi = \psi_m \cos^4(z/\sqrt{3}d)$ , 宽度  $\sqrt{3}\pi d = 5.44d$ ,  $V_s^2 = \frac{5}{6}(Ad^2/m)\psi_m^{1/2}$ , 即  $C = \sqrt{5/6} = 0.913$ 。两种近似的差别 (约 2%) 反映了被略去的高阶项的大小。

**(7) 积分常数与“紧支撑”** 积分两次时令常数为零,用的是孤立波前方  $w \rightarrow 0$ 。 $\cos^4$  解在  $|\kappa z| = \pi/2$  处与零解光滑衔接 ( $w, w', w'', w'''$  均为零), 所以分段函数是长波方程的合法解。这种“紧支撑” ( $w$  只在有限区间内不为零) 是长波近似的产物。原因可以从展开的有效性条件看出: 第 (4) 段要求  $|\epsilon| = |d^2 w''/(24w)| \ll 1$ 。对  $w = \xi_m \cos^4 \theta$  ( $\theta = \kappa z$ ),  $w''/w = \kappa^2(12 \tan^2 \theta - 4)$ , 于是

$$\epsilon(\theta) = \frac{\kappa^2 d^2}{24}(12 \tan^2 \theta - 4) = \frac{\tan^2 \theta}{5} - \frac{1}{15}.$$

在中心  $\epsilon = -0.067$ ,  $\theta = \pi/4$  处  $\epsilon = 0.13$ , 到  $\theta \approx 1.16$  (约为半宽  $\pi/2$  的 74%) 处  $\epsilon = 1$ , 再往外发散。所以在剖面外侧约四分之一的区域里, 展开已经失效, “恰好降到零”的边界并不可信; 离散链的真实孤立波尾部以双指数方式衰减 [26], 但衰减极快, 在图 4(b) 上与  $\cos^4$  的差别已难以分辨。

## F 数值方法

**积分器** 所有球链模拟使用速度 Verlet 格式:

$$v_n^{k+1/2} = v_n^k + \frac{h}{2} \ddot{u}_n(u^k), \quad u_n^{k+1} = u_n^k + h v_n^{k+1/2}, \quad v_n^{k+1} = v_n^{k+1/2} + \frac{h}{2} \ddot{u}_n(u^{k+1}).$$

它是二阶精度的“辛”格式 (symplectic, 即离散后的演化仍保持相空间体积, 像真实的哈密顿系统一样), 长时间积分中能量误差有界、不会系统漂移。步长取特征时间  $\tau = (m/A)^{2/5} v_0^{-1/5}$  的  $1/300$ – $1/1000$ , 各模拟的总能量相对误差  $< 10^{-5}$  (多数  $< 10^{-7}$ ), 总动量守恒到舍入误差。两球碰撞 (图 2) 用 SciPy 的 RK45 积分, 相对容差  $10^{-11}$ , 并用事件检测确定分离时刻。

**测量方法** 孤立波速度: 记录第  $j_1 = 20$  与  $j_2 = 40$  个接触力达到最大的时刻  $t_1, t_2$ ,  $V_s = (j_2 - j_1)d/(t_2 - t_1)$ 。宽度: 把第 30 个接触的  $\psi(t)$  用  $z = V_s(t - t_{\text{peak}})$  换成空间坐标后取半高全宽。由于标度对称性, 无量纲结果对所有振幅相同, 7 个振幅的计算只用来演示和检验程序。

**交互演示** 网页演示用同样的格式 (JavaScript 实现)。hertz-collision 用 RK4 积分 (步长  $t_c/4000$ ), 读数中数值与解析  $t_c$  一致到  $10^{-4}$ ; hertz-soliton 在全钢链中测得的  $V_s$  与式 (7.10) 之比约为 1.012, 与表 3 一致。

## G 最小二乘公式的推导

设  $y_i = \alpha + b x_i + \epsilon_i$ ,  $\epsilon_i$  相互独立、方差都为  $\sigma^2$ 。令  $Q(\alpha, b) = \sum (y_i - \alpha - b x_i)^2$  取极小:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = -2 \sum (y_i - \alpha - b x_i) = 0 \Rightarrow \alpha = \bar{y} - b \bar{x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial b} = -2 \sum x_i (y_i - \alpha - b x_i) = 0.$$

把  $\alpha$  代入第二式, 利用  $\sum x_i (y_i - \bar{y}) = S_{xy}$ 、 $\sum x_i (x_i - \bar{x}) = S_{xx}$ , 得  $b = S_{xy}/S_{xx}$ 。由于  $b = \sum_i \frac{x_i - \bar{x}}{S_{xx}} y_i$  是  $y_i$  的线性组合, 独立变量的方差相加:

$$\sigma_b^2 = \sum_i \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}.$$

同理  $\alpha = \bar{y} - b\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  与  $b$  不相关 (因为  $\sum(x_i - \bar{x}) = 0$ ),  $\sigma_\alpha^2 = \sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}})$ 。  $\sigma$  未知时用残差估计  $s^2 = Q_{\min}/(n-2)$ :  $n$  个数据中两个自由度被  $\alpha$ 、 $b$  用掉, 分母取  $n-2$  才使  $s^2$  的期望等于  $\sigma^2$ 。这就是式 (10.1)。由函数  $g(C_t)$  求不确定度时用一阶泰勒展开:  $u_g = |g'(C_t)| u_{C_t}$ , 如  $E^* \propto C_t^{-5/2}$  给出  $u_{E^*}/E^* = \frac{5}{2} u_{C_t}/C_t$ 。

## H 名词解释

表 6 术语中英对照

| 中文          | 英文                          | 一句话定义                                  |
|-------------|-----------------------------|----------------------------------------|
| 赫兹接触        | Hertzian contact            | 光滑弹性曲面的无摩擦接触, $F \propto \delta^{3/2}$ |
| 等效模量/半径     | effective modulus/radius    | 把两体接触化为单体问题的组合 $E^*$ 、 $R^*$           |
| 弹性半空间       | elastic half-space          | 表面为平面的无限大弹性体                           |
| 准静态         | quasi-static                | 过程足够慢, 每一时刻可视为静力平衡                     |
| 恢复系数        | coefficient of restitution  | 分离速度/接近速度                              |
| 屈服强度        | yield strength              | 开始发生塑性形变的单轴应力                          |
| 约化质量        | reduced mass                | $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$                |
| 色散          | dispersion                  | 不同波长的波速不同, 波包展宽                        |
| 群速度         | group velocity              | 波包包络 (能量) 的传播速度 $d\omega/dq$           |
| 声真空         | sonic vacuum                | 线性声速为零的介质 (无预压的赫兹链)                    |
| 孤立波         | solitary wave               | 形状不变、局域的行波                             |
| 长波近似        | long-wave approximation     | 把离散链看成连续介质, 保留低阶色散项                    |
| 标度对称性       | scaling symmetry            | 方程在变量的幂次缩放下形式不变                        |
| 赫兹锥裂        | Hertzian cone crack         | 球压脆性平面时, 接触圆外萌生、向下扩展的锥形裂纹              |
| Auerbach 定律 | Auerbach's law              | 小球压脆性材料时, 锥裂临界载荷正比于球半径                 |
| Griffith 判据 | Griffith criterion          | 裂纹扩展释放的弹性能足以提供新表面能时裂纹扩展                |
| 断裂韧度        | fracture toughness $K_{Ic}$ | 裂纹扩展的临界值 $\sigma\sqrt{\pi c}$ , 材料常数   |
| 主应力         | principal stress            | 无切应力的三个相互垂直截面上的正应力                     |
| 平面应变        | plane strain                | 一个方向的应变被约束为零的形变状态                      |
| 颗粒晶体        | granular crystal            | 规则排列、靠接触相互作用的弹性颗粒阵列                    |
| 声弹          | sound bullet                | 颗粒透镜聚焦形成的高强度局域声脉冲                      |