

振动陀螺：从傅科摆到半球谐振陀螺

第 43 届决赛短训讲义组

2026 年 10 月

目录

1 导读	2
1.1 名词与符号表	4
2 前置模块	4
2.1 转动参考系中的牛顿定律	4
2.2 二维各向同性振子：简并与“频率差导致进动”	7
2.3 受迫阻尼振动：品质因数、带宽与慢变包络	8
2.4 拉格朗日方程（最低限度）	10
2.5 涨落与耗散（最低限度）	11
3 傅科摆：振动面“记住”惯性空间	13
4 科里奥利振动陀螺（MEMS）	15
4.1 模型与运动方程	15
4.2 检测振幅：灵敏度	16
4.3 模态匹配的代价：带宽	16
4.4 机械热噪声极限与角随机游走	19
5 环形与酒杯谐振陀螺：Bryan 因子	20
5.1 薄圆环的弯曲振型与不可伸长条件	20
5.2 转动圆环的拉格朗日量	22
5.3 运动方程与 Bryan 因子	24
5.4 从圆环到酒杯与半球	25
6 工作模式与制造缺陷	26
6.1 力平衡模式与全角模式	26

1 导读	2
6.2 两模慢变方程	27
6.3 阻尼不对称：锁定与不均匀进动	28
6.4 频率裂分：椭圆化与锁定	29
7 陀螺噪声的度量：Allan 方差	30
7.1 定义与计算方法	30
7.2 三种噪声的特征斜率	31
8 决赛风格例题	32
9 实验与数据处理：振动陀螺的标定与噪声评估	39
10 小结：推导链	43
A 拉格朗日方程的推导	46
B 圆环的弯曲能与 Hoppe 频率	47
C 一般轴对称壳的 Bryan 因子与半球	47
D 热噪声的频域验证	48
E Allan 方差的频域公式与 0.664	49
F 两个用到的积分	49
G 名词解释	50

1 导读

背景：从“转子”到“酒杯”：陀螺技术的三代演进

机械转子陀螺。1851 年，傅科 (L. Foucault) 先在巴黎天文台、后在先贤祠用一根约 67 m 长的钢丝悬挂约 28 kg 的摆锤，演示了摆动平面相对地面缓慢转动，从而“看见”了地球自转 [1]；1852 年他又用高速旋转的转子做了同类演示，并把这种装置命名为 gyroscope (陀螺仪) [2, 3]。20 世纪初出现了以高速转子为核心的陀螺罗经：Anschütz-Kaempfe 1906 年发明、1908 年试验成功；Sperry 1908 年做出实用系统 (美国专利 1,242,065)，1911 年被美国海军采用 [4]。转子陀螺精度可以很高，但有轴承、有磨损、怕冲击。

光学陀螺。1913 年萨尼亚克 (G. Sagnac) 发现：在转动的闭合光路中沿相反方向传播的两束光有光程差 [5]。1963 年 Macek 与 Davis 做出了环形激光陀螺 [6]，1976 年 Vali 与 Shorthill 提出了光纤陀螺 [7]。光学陀螺没有运动部件，至今仍是飞机、潜艇导航的主力。

振动陀螺。本讲的主角。它的物理原型是傅科摆：一个振动的物体，其振动方向（或振动图样）在转动参考系中会因科里奥利力而“进动”。1890 年，剑桥的布赖恩（G. H. Bryan）发现：敲响一只绕自身轴旋转的酒杯（或圆柱、钟），声音会出现“拍”；他解释为：杯壁振动图样的波节虽跟着杯子转，但角速度低于杯体（相对杯体反向滑动）；酒杯的最低音“每转一圈约 2.4 拍”，由此推断“波节的角速度约为杯体的 $\frac{3}{5}$ ” [8]。1965 年前后，美国通用汽车 Delco 研究中心的 D. Lynch 等人依据 Bryan 的理论开始研制半球谐振陀螺（hemispherical resonator gyro, HRG），1984 年发表了首批试验结果 [9–11]。

- **手机里的 MEMS 陀螺：**1991 年 Draper 实验室做出第一个硅微机械陀螺 [12]。今天手机里的微机电（MEMS）陀螺是一块毫米见方的硅片，内含工作频率在 3–30 kHz 量级的振动质量块 [13]；典型消费级器件的速率噪声密度约 $0.003\text{--}0.01\text{ }(^{\circ}/\text{s})/\sqrt{\text{Hz}}$ （TDK ICM-42688-P 为 $2.8\text{ m}^{\circ}/\text{s}/\sqrt{\text{Hz}}$ ，Bosch BMI270 为 $0.007\text{ }^{\circ}/\text{s}/\sqrt{\text{Hz}}$ ） [14, 15]，这种单位的含义见第 2.5 节。汽车电子中也在使用“振动圆环”式 MEMS 陀螺（如 Silicon Sensing 公司的产品），它让硅环工作在 $\cos 2\theta$ 振型 [16]——这正是本讲第 5 节的模型。
- **航天器里的 HRG：**半球谐振子是一只带柄的熔融石英“小碗”（直径约 30 mm 量级，品质因数可达 10^7 量级，工作频率数 kHz） [17, 18]。1996 年 2 月发射的 NEAR 小行星探测器首次在太空使用 HRG [19, 20]；此后卡西尼号、信使号以及詹姆斯·韦布空间望远镜（JWST）都使用了基于 HRG 的惯性参考单元 [21, 22]。截至 2022 年底，诺斯罗普·格鲁曼公司的 HRG 在太空累计工作超过 6500 万小时而无一次任务失效 [21]。其太空惯性参考单元的指标为：零偏稳定性优于 $0.0015\text{ }^{\circ}/\text{h}$ ，角随机游走优于 $0.00015\text{ }^{\circ}/\sqrt{\text{h}}$ [23]（这些单位的含义见第 7 节）。

表 1 给出业界常用的陀螺性能分级。注意从手机到潜艇，零偏稳定性跨越了 6–7 个数量级；同一条物理原理（科里奥利力 + 振动）覆盖了其中相当大的一段。

表 1 陀螺按零偏稳定性分级（据文献 [3] 表 1 译出，各行照录；末列括号中的 HRG 为本讲补充，依据为上文所引的 SIRU 指标）

等级	零偏稳定性	典型应用	典型技术
消费级	$30\text{--}1000\text{ }^{\circ}/\text{h}$	人机交互、手机	MEMS
工业级/低端战术级	$1\text{--}30\text{ }^{\circ}/\text{h}$	弹药、火箭制导	MEMS
战术级	$0.1\text{--}30\text{ }^{\circ}/\text{h}$	平台稳定	光纤/激光陀螺
高端战术级	$0.1\text{--}1\text{ }^{\circ}/\text{h}$	导弹导航	激光/光纤陀螺
导航级	$0.01\text{--}0.1\text{ }^{\circ}/\text{h}$	航空导航	激光/光纤陀螺
战略级	$0.0001\text{--}0.01\text{ }^{\circ}/\text{h}$	潜艇导航	激光/光纤陀螺（及 HRG）

本讲主线。 三种看似不同的装置——傅科摆、MEMS 陀螺、酒杯/半球陀螺——共享同一个数学结构：一个二维简并振子（两个频率相同的振动模式）放在转动参考系中，科里奥利力把两个模式耦合起来，使两个反向“转圈”的分量频率劈裂，于是振动方向进动。我们按下面的链条展开：

1. 转动参考系中的牛顿定律 $\rightarrow$ 科里奥利力（第 2.1 节）；

2. 二维各向同性振子：简并、反向圆运动分解、“频率差导致进动”引理（第 2.2 节）；
3. 傅科摆：振动面进动率 $\Omega \sin \lambda$ （第 3 节）；
4. MEMS 陀螺：受迫振动 + 科里奥利耦合，灵敏度-带宽折中与热噪声极限（第 4 节）；
5. 振动圆环：振型进动的 Bryan 因子 $K = 2/(n^2 + 1)$ ，推广到半球 $K \approx 0.277$ （第 5 节）；
6. 工作模式与制造缺陷：全角模式、阻尼不对称导致的锁定、频率裂分导致的椭圆化（第 6 节）；
7. 陀螺噪声的度量：Allan 方差（第 7 节）；然后是例题与笔试型实验题。

学习目标。 学完本讲，应能：(1) 从 $d/dt|_{\text{惯性}} = d/dt|_{\text{转动}} + \boldsymbol{\Omega} \times$ 推出科里奥利力，并用复坐标解转动系中的二维振动；(2) 推出傅科摆进动率与 MEMS 陀螺检测振幅，解释模态匹配时“灵敏度 $\propto Q$ 、带宽 $\propto 1/Q$ ”的折中；(3) 用拉格朗日方程推出圆环的 Bryan 因子，并能用数值方法独立检验；(4) 用慢变包络方程分析频率裂分与阻尼不对称；(5) 由 Allan 偏差曲线读出角随机游走与零偏不稳定性。

前置知识与学时。 需要：普通物理力学（牛顿定律、简谐振动、受迫振动）、微积分、矢量叉乘、复数指数。拉格朗日方程、白噪声与能量均分、功率谱、傅里叶级数只需最低限度，均在用到之前（第 2、5.1 节）和附录中补充。建议按 1.5–2 学时授课：第 2–5 节与第 7 节为主线（约 1.5 学时，前置模块可布置预习）；第 6.3–6.4 节、例题三、例题四、附录 C 为**选讲**；例题与实验题供课后练习或另开习题课。

1.1 名词与符号表

本讲用到的主要符号列于表 2 与表 3；术语的中英对照与一句话定义见附录 G。

2 前置模块

2.1 转动参考系中的牛顿定律

定义：惯性系与转动系

惯性系 S ：牛顿第二定律 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ 成立的参考系（对本讲而言，以遥远恒星为参照的参考系足够好）。转动系 S' ：与 S 共原点、相对 S 以角速度 $\boldsymbol{\Omega}(t)$ 绕原点转动的参考系（地面、手机芯片、陀螺壳体）。 S' 中固定的单位基矢记为 $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ ；它们在 S' 中不动，但在 S 中看是随 S' 转动的。

推导：同一矢量在两个参考系中的时间导数

第一步：转动基矢的导数。以 $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{z}$ 为例（ Ω 为常量）， S' 的基矢在 S 中为 $\hat{e}'_1 = (\cos \Omega t, \sin \Omega t, 0)$ 、 $\hat{e}'_2 = (-\sin \Omega t, \cos \Omega t, 0)$ 。直接求导：

$$\frac{d\hat{e}'_1}{dt} = \Omega(-\sin \Omega t, \cos \Omega t, 0) = \Omega \hat{z} \times \hat{e}'_1, \quad \frac{d\hat{e}'_2}{dt} = \Omega \hat{z} \times \hat{e}'_2. \quad (2.1)$$

表 2 主要符号 (一): 转动、振动与陀螺

符号	含义	单位
Ω, Ω	参考系 (地球、芯片、壳体) 相对惯性系的角速度	rad/s
Ω_z	Ω 沿竖直 (或对称轴) 方向的分量	rad/s
Ω_E	地球自转角速度 $2\pi/(\text{恒星日}) = 7.292 \times 10^{-5}$	rad/s
λ	地理纬度	rad 或 $^\circ$
ω_0, ω_n	固有角频率; 圆环第 n 阶弯曲振动的角频率	rad/s
$\omega_d, \omega_x, \omega_y$	MEMS 驱动频率; 驱动、检测模态的固有频率	rad/s
$\Delta\omega, \Delta f$	频率失配 $\omega_y - \omega_d$; $\Delta f = \Delta\omega/2\pi$	rad/s; Hz
Q	品质因数 $Q = m\omega_0/b$	1
b	粘滞阻尼系数 (阻力 $-b\dot{x}$)	kg/s
τ_r	振幅衰荡时间 $\tau_r = 2Q/\omega_0$	s
$\gamma, \gamma_{1,2}$	振幅衰减率 $1/\tau_r$ (两个主轴各自的)	s^{-1}
$\xi = x + iy$	平面位置的复坐标	m
X_0, Y	驱动振幅; 检测振幅	m
$A(t), c_{1,2}(t)$	慢变复包络 (振动 = $\text{Re}[ce^{i\omega t}]$)	m
n	圆环/壳体振型的周向波数 ($\cos n\theta$)	1
θ	圆环上材料点的周向坐标 (随壳体转动)	rad
u, v	环上材料点的径向 (向外为正)、切向位移	m
q_1, q_2	两个简并振型 $\cos n\theta, \sin n\theta$ 的模态坐标	m
R, μ, EI	环半径; 线密度 ρA ; 弯曲刚度	m; kg/m; $\text{N}\cdot\text{m}^2$
M, G, β	模态质量; 陀螺耦合系数; $\beta = G/M = nK\Omega$	kg; kg/s; s^{-1}
K	Bryan 因子 (振型相对壳体以 $-K\Omega$ 转动)	1
ϕ, ψ	振型 (波腹) 相对壳体的方位角; q 平面中的方位角 $\psi = n\phi$	rad
Θ	壳体相对惯性系转过的角度	rad
$\delta, \Delta\gamma$	两主轴频率的半裂分 $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \delta$; 阻尼不对称 $\gamma_1 - \gamma_2$	s^{-1}
p	MEMS 包络方程的复衰减率 $1/\tau_r - i\Delta\omega$	s^{-1}
$\mathcal{S}, \omega_{\text{bw}}$	直流灵敏度 $X_0/ p $; 平坦带宽 (角频率)	$\text{m}\cdot\text{s}$; s^{-1}
$D(t), \alpha_{\text{ref}}$	同相解调输出; 解调参考相位	m; rad
U, V_θ, Z	壳体振型的水平径向、周向、竖直振幅 (例题四)	1
$H(\nu)$	解调输出对角速度变化 (角频率 ν) 的归一化频率响应	1
κ, T, V	模态刚度; 动能 (第 2.4、5 节); 势能	N/m ; J; J
W, T_A	频率裂分解中的 $\sqrt{\beta^2 + \delta^2}$; Adler 方程中振型转过 π 的时间	s^{-1} ; s
η, θ_e	图 1(c) 中两圆分量的频率偏移; 解调相位误差	s^{-1} ; rad
ζ	壳体振型竖直与水平径向运动的均方根之比 (例题四)	1

表 3 主要符号 (二): 噪声与数据处理

符号	含义	单位
k_B, T	玻尔兹曼常数 1.381×10^{-23} ; 热力学温度	J/K; K
T_a, T_m	时间平均的长度 (式 2.18); 相敏解调的平均时间	s
$\mathcal{W}(t), \Xi(t)$	白噪声的积分 (随机游走); 一般的平稳随机信号	—
S, S_1	双边、单边功率谱密度 ($S_1 = 2S$, 第 2.5 节)	量 ² /Hz
r, J, n_c	Allan 方差: 每段采样点数; 总点数; 段数	1
N_d	拟合用的数据点数	1
$f(t), S_F$	随机力; 白噪声强度 $\langle f(t)f(t') \rangle = S_F \delta(t - t')$	N; N ² ·s
N	角随机游走 (ARW) 系数: 角度误差 $\sigma_\theta = N\sqrt{t}$	rad/ $\sqrt{s}$, °/ $\sqrt{h}$
B	零偏不稳定性 (闪烁噪声) 系数	°/h
K_{rw}	速率随机游走系数	°/h/ $\sqrt{s}$
τ	Allan 方差的平均时间 (第 7 节)	s
$\sigma(\tau)$	Allan 偏差 (Allan 方差的平方根)	°/h
$\mathcal{E}, \varepsilon$	全角模式读出量: 总能量指标 $ c_1 ^2 + c_2 ^2$; 椭圆度	m ² ; 1

几何意义: 单位矢量刚性地绕 Ω 转动, 其端点作圆周运动, 速度就是 $\Omega \times \hat{e}'$ 。一般情形 (Ω 方向任意、可随时间变化) 在每一瞬时同样成立: $\dot{\hat{e}}'_i = \Omega \times \hat{e}'_i$ 。

第二步: 任意矢量。把任意矢量写成 $\mathbf{A} = \sum_i A'_i \hat{e}'_i$, 其中 A'_i 是 S' 中的分量。在 S 中求导, 用乘积法则, 再用第一步:

$$\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_S = \underbrace{\sum_i \dot{A}'_i \hat{e}'_i}_{S' \text{ 中看到的变化率}} + \sum_i A'_i \Omega \times \hat{e}'_i = \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{S'} + \Omega \times \mathbf{A}. \quad (2.2)$$

第三步: 速度。取 $\mathbf{A} = \mathbf{r}$ (位矢在两个参考系中是同一个矢量), 记 $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}/dt|_{S'}$:

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}' + \Omega \times \mathbf{r}. \quad (2.3)$$

第四步: 加速度。再对 $\mathbf{v}_S$ 用一次式 (2.2), 并把 $\mathbf{v}_S$ 换成式 (2.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_S &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{S'} (\mathbf{v}' + \Omega \times \mathbf{r}) + \Omega \times (\mathbf{v}' + \Omega \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{a}' + \dot{\Omega} \times \mathbf{r} + \Omega \times \mathbf{v}' + \Omega \times \mathbf{v}' + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{a}' + 2\Omega \times \mathbf{v}' + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

第二行对 $\Omega \times \mathbf{r}$ 在 S' 中求导用了乘积法则, 得 $\dot{\Omega} \times \mathbf{r}$ 与 $\Omega \times \mathbf{v}'$ 两项 (Ω 的分量在两系中相同, 其导数 $\dot{\Omega}$ 也相同)。

把 $m\mathbf{a}_S = \mathbf{F}$ 用式 (2.4) 改写成 S' 中的形式:

$$\boxed{m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - 2m\Omega \times \mathbf{v}' - m\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) - m\dot{\Omega} \times \mathbf{r}} \quad (2.5)$$

右边后三项依次称为科里奥利力、离心力与欧拉力。

要点：科里奥利力的特点

(1) 它们是“惯性力”：不是别的物体施加的，而是在转动系里记账时多出来的项；(2) 科里奥利力 $\propto \mathbf{v}'$ 且垂直于 $\mathbf{v}'$ ，不做功，只改变运动方向；(3) 它与 Ω 成一次方，离心力与 Ω^2 成正比。陀螺里 Ω 远小于振动角频率（手机 MEMS： $\Omega/\omega_d \lesssim 3 \times 10^{-4}$ ，HRG 测地球自转： $\sim 10^{-9}$ ），所以一阶效应只有科里奥利力，离心力属于二阶小量。

检验：一个自洽检验

在 S 中静止的自由质点 ($\mathbf{F} = 0$)，在 S' (Ω 恒定) 中看以 $-\Omega$ 作匀速圆周运动： $\mathbf{v}' = -\Omega \times \mathbf{r}$ ，所需向心加速度 $\mathbf{a}' = -\Omega \times \mathbf{v}' = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$ 。式 (2.5) 右边： $-2\Omega \times (-\Omega \times \mathbf{r}) - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$ ，与左边一致：科里奥利力的一半抵消了离心力，另一半提供向心力。

2.2 二维各向同性振子：简并与“频率差导致进动”

定义：二维各向同性振子与简并

质点在平面内受指向原点、大小正比于距离的回复力 $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ ，方程为 $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$, $\ddot{y} = -\omega_0^2 y$ ， $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 。沿 x 的振动与沿 y 的振动是两个独立的“模式”（又称模态，normal mode：系统各部分以同一频率、固定的振幅比与相位关系一起振动的方式），频率相同——这叫简并。简并的直接后果是：它们的任意线性组合仍是同频率的振动，因此振动方向不由系统本身决定，而由初始条件决定。

一般解 $x = A \cos \omega_0 t$, $y = B \cos(\omega_0 t + \chi)$ 消去 t 后是一个椭圆（图 1(a)）： $\chi = 0$ 时退化为过原点的直线， $\chi = \pm\pi/2$ 且 $A = B$ 时为圆。

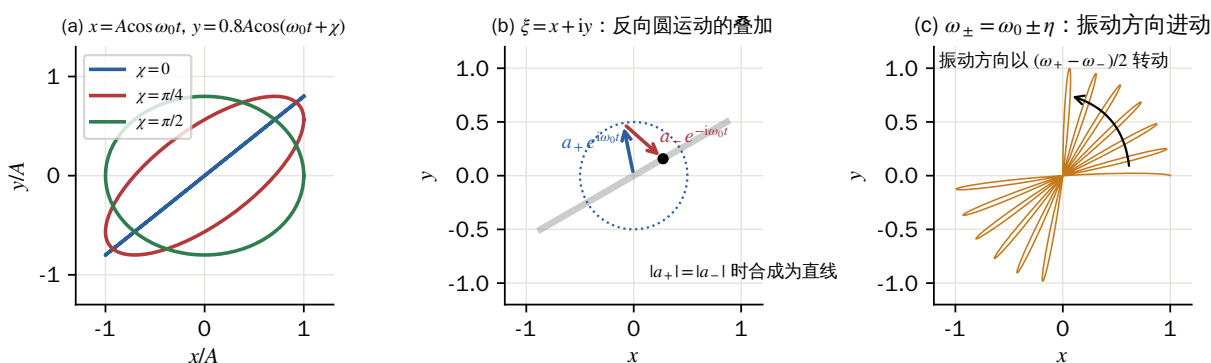


图 1 二维各向同性振子。(a) 不同相位差的轨道：直线、椭圆。(b) 复坐标中，一个直线振动是两个等大、反向转动的圆运动之和。(c) 若两个圆分量频率略有不同 ($\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \eta$)，合成的直线振动方向以 $(\omega_+ - \omega_-)/2 = \eta$ 缓慢转动；脚本数值读出的转速与 η 的相对差 $< 10^{-6}$ 。

推导：复坐标与反向圆运动分解

令 $\xi = x + iy$ ，两个方程合成一个： $\ddot{\xi} = -\omega_0^2 \xi$ 。其通解为

$$\xi(t) = a_+ e^{i\omega_0 t} + a_- e^{-i\omega_0 t}, \quad a_{\pm} \in \mathbb{C}. \quad (2.6)$$

$a_+e^{i\omega_0 t}$ 在复平面上以半径 $|a_+|$ 逆时针匀速转圈, $a_-e^{-i\omega_0 t}$ 以半径 $|a_-|$ 顺时针转圈。写 $a_{\pm} = |a_{\pm}|e^{i\alpha_{\pm}}$ 。若 $|a_+| = |a_-| = a$, 提出公共相位:

$$\begin{aligned}\xi &= a e^{i(\alpha_+ + \alpha_-)/2} \left[e^{i(\omega_0 t + (\alpha_+ - \alpha_-)/2)} + e^{-i(\omega_0 t + (\alpha_+ - \alpha_-)/2)} \right] \\ &= 2a \cos\left(\omega_0 t + \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{2}\right) e^{i\psi}, \quad \psi = \frac{\alpha_+ + \alpha_-}{2}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

即: 两等大反向圆运动之和是沿方向角 ψ 的直线振动; $|a_+| \neq |a_-|$ 时是椭圆。

要点: 引理: 两个圆分量的频率差使振动方向进动

若由于某种原因, 逆时针分量的角频率变为 ω_+ 、顺时针分量变为 ω_- ($\omega_+ \neq \omega_-$), 则把式 (2.7) 中的 $\omega_0 t$ 分别换成 $\omega_+ t$ 与 $\omega_- t$, 重复同样的提取公共相位的步骤, 得方向角

$$\psi(t) = \psi_0 + \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t. \quad (2.8)$$

振动方向以 $(\omega_+ - \omega_-)/2$ 匀速转动 (逆时针为正, 见图 1(c))。本讲三种陀螺都是这个引理的实例: 转动使两个反向“转圈”分量的频率劈裂, 从而使振动方向进动。

前置知识: 读出振动方向的公式

设平面直线振动 $x = A \cos \psi \cos(\omega_0 t + \alpha)$, $y = A \sin \psi \cos(\omega_0 t + \alpha)$ 。直接代入可验证

$$\omega_0^2 xy + \dot{x}\dot{y} = \frac{1}{2} A^2 \omega_0^2 \sin 2\psi, \quad \omega_0^2 (x^2 - y^2) + \dot{x}^2 - \dot{y}^2 = A^2 \omega_0^2 \cos 2\psi, \quad (2.9)$$

两式之比给出 $\tan 2\psi$, 且与振动相位 α 无关。只要测得某一瞬时的 $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ 就能读出方向角——后面数值核验与 HRG 的“全角读出”都用这一思想。

2.3 受迫阻尼振动: 品质因数、带宽与慢变包络

一维阻尼振子在外力 $F(t)$ 作用下:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t), \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad Q \equiv \frac{m\omega_0}{b}. \quad (2.10)$$

定义: 品质因数 Q 与衰荡时间

$F = 0$ 、 $Q \gg 1$ 时, 解为 $x \approx A_0 e^{-t/\tau_r} \cos \omega_0 t$, 其中 $\tau_r = 2m/b = 2Q/\omega_0$ (代入式 (2.10) 检验, 忽略 $\mathcal{O}(1/Q^2)$ 的频率修正)。能量 $\propto$ 振幅², 按 e^{-2t/τ_r} 衰减, 即 $\dot{\mathcal{E}} = -(\omega_0/Q)\mathcal{E}$; 一个周期 $2\pi/\omega_0$ 内损失 $\Delta\mathcal{E} = (2\pi/Q)\mathcal{E}$, 所以

$$Q = 2\pi \times \frac{\text{储存的能量}}{\text{每周期损失的能量}}.$$

Q 大意味着“敲一下能响很久”: 振幅衰减到 $1/e$ 需要 $\omega_0 \tau_r / 2\pi = Q/\pi$ 个周期。

推导：稳态响应、共振与带宽

取 $F = F_0 \cos \omega t$ ，用复数法：设 $x = \text{Re}[X e^{i\omega t}]$ ，代入得

$$X = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\omega_0/Q}, \quad |X| = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\omega_0/Q)^2}}. \quad (2.11)$$

位移落后于力的相位 $\alpha = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\omega_0/Q) \in [0, \pi]$ 。共振 $\omega = \omega_0$ 时 $|X| = QF_0/k$ （静态位移的 Q 倍）， $\alpha = 90^\circ$ ，即速度与力同相。

近共振时令 $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ ，小参量 $|\delta\omega|/\omega_0 \ll 1$ ，保留一阶： $\omega_0^2 - \omega^2 = -(2\omega_0 + \delta\omega)\delta\omega \approx -2\omega_0\delta\omega$ ， $\omega\omega_0/Q \approx \omega_0^2/Q$ （舍去 $\delta\omega/(Q\omega_0)$ 项）。于是

$$|X|^2 \approx \frac{(F_0/m)^2}{4\omega_0^2 [\delta\omega^2 + (\omega_0/2Q)^2]}. \quad (2.12)$$

这是洛伦兹线形。 $|X|^2$ 降到峰值一半处 $\delta\omega = \pm\omega_0/2Q$ ，故**半功率全宽**

$$\Delta\omega_{1/2} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{\tau_r}. \quad (2.13)$$

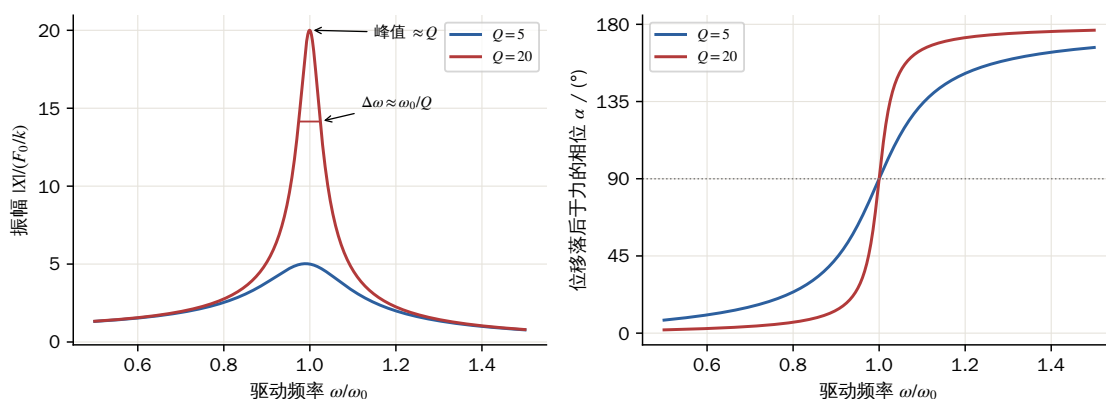


图 2 受迫阻尼振子的振幅与相位。 $Q = 20$ 曲线上标出的半功率全宽经脚本核对与 ω_0/Q 相差 $< 1\%$ ，峰值与 Q 相差 $< 1\%$ 。

陀螺里的振动都是“高频载波 + 缓慢变化的振幅和相位”。下面这个工具在第 4、6 节反复使用。

推导：慢变包络方程

设驱动力 $F(t) = \text{Re}[\tilde{F}(t)e^{i\omega t}]$ ，其复振幅 $\tilde{F}(t)$ 随时间缓慢变化；同样设解为 $x = \text{Re}[A(t)e^{i\omega t}]$ ， $A(t)$ 称为**复包络**。

1. 求导： $\dot{x} = \text{Re}[(\dot{A} + i\omega A)e^{i\omega t}]$ ， $\ddot{x} = \text{Re}[(\ddot{A} + 2i\omega\dot{A} - \omega^2 A)e^{i\omega t}]$ 。
2. 代入式 (2.10)（除以 m ），比较 $e^{i\omega t}$ 的系数：

$$\ddot{A} + 2i\omega\dot{A} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{A} + \left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)A = \frac{\tilde{F}}{m}.$$

3. 近似：包络变化率远小于载波频率（ $|\dot{A}| \ll \omega|A|$ ），故 $\ddot{A}$ 比 $2i\omega\dot{A}$ 小一个因子 $\sim |\dot{A}|/(\omega|A|)$ ，舍去； $(\omega_0/Q)\dot{A}$ 比 $2i\omega\dot{A}$ 小一个因子 $1/(2Q)$ ，舍去。并像式 (2.12) 那样取 $\omega_0^2 - \omega^2 \approx$

$$2\omega(\omega_0 - \omega)。$$

4. 除以 $2i\omega$, 记 $\Delta \equiv \omega_0 - \omega$ (固有频率减驱动频率):

$$\dot{A} = -\left(\frac{1}{\tau_r} - i\Delta\right)A - \frac{i\tilde{F}}{2m\omega} \quad (\tau_r = 2Q/\omega_0). \quad (2.14)$$

适用条件: $Q \gg 1$, $|\Delta| \ll \omega$, $\tilde{F}$ 的变化率 $\ll \omega$ 。

检验: 包络方程的两个推论

(1) 稳态 ($\dot{A} = 0$): $|A| = |\tilde{F}| / (2m\omega\sqrt{1/\tau_r^2 + \Delta^2})$, 与洛伦兹式 (2.12) 一致 ($\Delta = -\delta\omega$)。 (2) 力在 $t = 0$ 突然接通、 $\Delta = 0$: $A(t) = A_\infty(1 - e^{-t/\tau_r})$ ——共振放大 Q 倍, 代价是要等 $\tau_r = 2Q/\omega_0$ 才能建立。若 $\tilde{F} \propto e^{i\nu t}$ 缓慢调制, 代入得 $A \propto 1/(i\nu + 1/\tau_r - i\Delta)$; $\Delta = 0$ 时 $|A|$ 在 $\nu = 1/\tau_r$ 处降为 $1/\sqrt{2}$, 即响应带宽 $f_{bw} = 1/(2\pi\tau_r) = f_0/(2Q)$ 。这些结论在 `scripts/verify_numeric.py` 中用完整二阶方程的数值解核对 (时间常数相对误差 $< 1\%$)。

2.4 拉格朗日方程 (最低限度)

处理连续弹性体 (圆环) 时, 对每个微元写牛顿方程再求和很繁琐。拉格朗日方程让我们只写能量, 然后机械地求导。

定义: 广义坐标与拉格朗日量

广义坐标 $q_1, \dots, q_f$: 能唯一确定系统位形的一组独立数 (例如圆环两个振型的振幅)。每个质点的位置 (在惯性系中) 写成 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$ ——允许显含 t (例如坐标随转动的壳体一起转)。动能 $T = \sum_i \frac{1}{2}m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2$ 于是成为 $q, \dot{q}, t$ 的函数; 势能 $V(q, t)$ 。**拉格朗日量** $L = T - V$ 。

要点: 拉格朗日方程

若约束力 (如保持圆环不伸长的内力) 在约束允许的任意微小位移中不做功 (理想约束), 其余力有势, 则

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, f. \quad (2.15)$$

它与牛顿第二定律等价 (从牛顿定律出发的推导见附录 A)。用法四步: 选广义坐标 $\rightarrow$ 写出各质元在惯性系中的速度 $\rightarrow$ 写 $T, V \rightarrow$ 求导。

例题: 用拉格朗日方程重新得到科里奥利力

平面内质点, 用随 S' 转动的坐标 (x, y) 作广义坐标 ($\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}$ 恒定)。由式 (2.3), 惯性系速度的分量为 $(\dot{x} - \Omega y, \dot{y} + \Omega x)$, 所以

$$T = \frac{m}{2} [(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2] = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \underbrace{m\Omega(x\dot{y} - y\dot{x})}_{\text{对速度一次}} + \frac{m}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2).$$

对 x : $\partial L / \partial \dot{x} = m(\dot{x} - \Omega y)$, 其时间导数 $m(\ddot{x} - \Omega \dot{y})$; $\partial L / \partial x = m\Omega(\dot{y} + \Omega x) - \partial V / \partial x$ 。代入式 (2.15):

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} + 2m\Omega\dot{y} + m\Omega^2 x.$$

这正是式 (2.5) 的 x 分量: $-2m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}')_x = 2m\Omega\dot{y}$ (科里奥利), $m\Omega^2 x$ (离心)。

要点: 陀螺项规则

上例说明: 动能中对速度一次的项产生科里奥利型的力。一般地, 若 L 中含 $G(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1)$ (G 为常数), 对 q_1 : $\partial/\partial\dot{q}_1$ 给出 $-Gq_2$, 其时间导数 $-G\dot{q}_2$; $\partial/\partial q_1$ 给出 $+G\dot{q}_2$ 。两者相减, 在 q_1 方程中贡献 $-2G\dot{q}_2$; 同理在 q_2 方程中贡献 $+2G\dot{q}_1$:

$$L \ni G(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1) \implies \text{方程}_{q_1}: \cdots - 2G\dot{q}_2 = 0, \quad \text{方程}_{q_2}: \cdots + 2G\dot{q}_1 = 0. \quad (2.16)$$

2.5 涨落与耗散 (最低限度)

阻尼来自振子与周围环境 (气体分子、材料内部的微观自由度) 的相互作用。同样的相互作用在平均之外还有涨落: 分子的随机碰撞。热噪声极限的推导需要以下几件事: 白噪声、平均与积分、功率谱、能量均分与涨落-耗散关系。

定义: 白噪声

随机力 $f(t)$ 的平均值为零; 若不同时刻的取值互不相关, 且相关时间 (分子碰撞约 ps) 远短于我们关心的一切时间尺度, 就可理想化为

$$\langle f(t)f(t') \rangle = S_F \delta(t - t'). \quad (2.17)$$

这里 $\langle \cdots \rangle$ 是对大量相同实验 (系综) 取平均; δ 函数满足 $\int g(t')\delta(t - t')dt' = g(t)$; S_F 称为噪声强度 (单位 $\text{N}^2 \cdot \text{s}$)。数值模拟中, 时间步长 Δt 内的力取方差为 $S_F/\Delta t$ 的独立高斯随机数即可实现式 (2.17)。

推导: 平均与积分: 两个基本结果

(a) **时间平均**: 平均时间记为 T_a (与温度 T 区分), $\bar{f} = \frac{1}{T_a} \int_0^{T_a} f dt$. $\langle \bar{f}^2 \rangle = \frac{1}{T_a^2} \int_0^{T_a} \int_0^{T_a} \langle f(t)f(t') \rangle dt dt' = \frac{1}{T_a^2} \int_0^{T_a} S_F dt$, 即

$$\langle \bar{f}^2 \rangle = \frac{S_F}{T_a} \quad (\text{平均时间越长, 涨落越小, 按 } 1/\sqrt{T_a} \text{ 下降}). \quad (2.18)$$

(b) **积分 (随机游走)**: $\mathcal{W}(t) = \int_0^t f dt'$ 。同样的计算给出

$$\langle \mathcal{W}(t)^2 \rangle = S_F t \quad (\text{积分量的离散程度按 } \sqrt{t} \text{ 增长}). \quad (2.19)$$

陀螺输出的是角速度, 导航需要的是角度 (角速度的积分), 所以白噪声角速度造成的角度误差按 $\sqrt{t}$ 增长——这叫**角随机游走**。

功率谱密度。数据手册和文献常用“每根号赫兹”的单位描述噪声。这里先把它说清楚, 后面的热噪声 (第 4.4 节) 和 Allan 方差 (第 7 节) 都要用。

定义：功率谱密度：单边与双边约定

设随机信号 $\Xi(t)$ 是**平稳**的（统计性质不随时间推移而改变，例如均值、方差与 $\langle \Xi(t)\Xi(t+s) \rangle$ 只依赖时间差 s ）。把它看成许多频率不同、相位随机的正弦分量之和。频率在 $[f, f+df]$ ($f > 0$) 内的分量对 Ξ 的方差的贡献记为 $S_1(f)df$ ， S_1 称为**单边功率谱密度**。理论推导与 IEEE 陀螺标准 [24] 常用**双边谱** $S(f) = S_1(f)/2$ （把同一份方差平分给 $\pm f$ ），即贡献 $2S(f)df$ ；许多实验文献（如引力波探测）则多用单边谱。**本讲统一用双边谱 S** 。 $\sqrt{S}$ （或 $\sqrt{S_1}$ ）称为**幅度谱密度**，单位为“量/ $\sqrt{\text{Hz}}$ ”，例如力噪声 $N/\sqrt{\text{Hz}}$ 、速率噪声 $(^\circ/\text{s})/\sqrt{\text{Hz}}$ 。

- **白噪声的谱是常数，且 S 就等于强度**：对式 (2.17)， $S = S_F$ 。检验：频率 f 的正弦分量在 T_a 内平均后，振幅乘以 $\frac{\sin \pi f T_a}{\pi f T_a}$ （直接积分可得），故平均值的方差为 $\int_0^\infty 2S \frac{\sin^2 \pi f T_a}{(\pi f T_a)^2} df = 2S \cdot \frac{1}{2T_a} = \frac{S}{T_a}$ （用了 $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ ），与式 (2.18) 一致。
- **角随机游走与“速率噪声密度”**：若角速度读数含强度为 N^2 的白噪声 ($\langle \Omega_n(t)\Omega_n(t') \rangle = N^2 \delta(t-t')$)，由式 (2.19)，角度误差 $\sigma_\theta = N\sqrt{t}$ 。数据手册的“速率噪声密度”若是双边 $\sqrt{S}$ ，则 $N = \sqrt{S}$ ；若是单边 $\sqrt{S_1} = \sqrt{2}N$ ，则 $N = \sqrt{S_1}/\sqrt{2}$ 。单位换算 $1^\circ/\sqrt{\text{s}} = 60^\circ/\sqrt{\text{h}}$ ($\sqrt{3600} = 60$)。例：BMI270 的 $0.007(^\circ/\text{s})/\sqrt{\text{Hz}}$ 对应 $N = 0.42^\circ/\sqrt{\text{h}}$ （双边解读）或 $0.30^\circ/\sqrt{\text{h}}$ （单边解读）。手册多不注明约定，比较时只宜看量级。

前置知识：能量均分

统计物理的结论：温度为 T 的热平衡中，能量里每一个平方项（如 $\frac{1}{2}mv_x^2$ 、 $\frac{1}{2}kx^2$ ）的平均值为 $\frac{1}{2}k_B T$ 。对理想气体分子，这就是熟悉的 $\langle \frac{1}{2}mv_x^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$ 。

推导：朗之万方程与涨落-耗散关系

一个受阻力 $-bv$ 与随机力 $f(t)$ 的质点： $m\dot{v} = -bv + f(t)$ 。在 dt 内积分： $v(t+dt) = v(t)(1 - \frac{b}{m}dt) + \frac{1}{m}dW$ ，其中 $dW = \int_t^{t+dt} f dt'$ 。平方后取平均：

- $\langle v(t)dW \rangle = 0$ ： dW 由 t 之后的碰撞决定，与此前已确定的 $v(t)$ 无关；
- $\langle dW^2 \rangle = S_F dt$ （式 (2.19)）。

于是 $\langle v^2 \rangle(t+dt) = \langle v^2 \rangle(1 - \frac{2b}{m}dt) + \frac{S_F}{m^2}dt$ （舍去 dt^2 ）。稳态时 $\langle v^2 \rangle = S_F/(2mb)$ ；再由能量均分 $m\langle v^2 \rangle = k_B T$ 得

$$S_F = 2b k_B T \quad (2.20)$$

物理意义：阻尼（耗散）越大，热涨落力也越大，两者由同一批分子碰撞产生——这就是**涨落-耗散关系**的最简单形式。随机力只与“环境 + 阻尼”有关，与质点是否连着弹簧无关，所以式 (2.20) 对振子同样适用。

检验：振子的位移涨落

对振子，按式 (2.20) 取随机力，可以证明位移涨落 $\langle x^2 \rangle = k_B T/k$ ，恰好是能量均分 $\langle \frac{1}{2}kx^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$ 的要求（频域推导见附录 D）；`scripts/verify_numeric.py` 用 4000 个振子的系综模拟得 $\langle x^2 \rangle k/k_B T = 0.996$ 。另注：许多文献把力噪声写成单边功率谱 $S_1 = 4bk_B T$ （与电阻热噪声 $4k_B T R$ 同形），它与本讲的双边 $S_F = 2bk_B T$ 只是约定不同（第 2.5 节），物理内容相同。

3 傅科摆：振动面“记住”惯性空间

假设：傅科摆模型

1. 坐标原点取在摆锤的平衡位置， x 指东、 y 指北、 z 竖直向上；地球系以 $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_E(0, \cos \lambda, \sin \lambda)$ 转动， λ 为纬度。
2. 小振幅：振幅 $A \ll L$ （摆长）。于是摆锤高度变化 $z \approx (x^2 + y^2)/2L$ 是二阶小量， $\dot{z}$ 比 $\dot{x}, \dot{y}$ 小一个因子 A/L ；水平回复力 $\approx -(mg/L)(x, y)$ ， $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ 。
3. 转动慢： $\Omega_E/\omega_0 \sim 10^{-4}$ ，只保留 Ω 的一次项；地球离心力已并入“有效重力” $\mathbf{g}$ （它定义了当地的“竖直”）。
4. 忽略空气阻力（阻力只让振幅衰减，不改变下面的进动率）。

推导：水平运动方程

由式 (2.5)，科里奥利力 $-2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'$ 中 $\mathbf{v}' = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$,

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' = (\Omega_y \dot{z} - \Omega_z \dot{y}, \Omega_z \dot{x} - \Omega_x \dot{z}, \Omega_x \dot{y} - \Omega_y \dot{x}), \quad \Omega_x = 0.$$

水平分量中 $\Omega_y \dot{z}$ 比 $\Omega_z \dot{y}$ 小因子 A/L ，舍去；竖直分量 $2m\Omega_y \dot{x}$ 只使绳中张力有 $\mathcal{O}(\Omega/\omega_0)$ 的相对变化，对水平回复力的影响是 $\Omega \times (A/L)$ 级别的高阶量，舍去。于是

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + 2\Omega_z \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\Omega_z \dot{x}, \quad \Omega_z = \Omega_E \sin \lambda. \quad (3.1)$$

只有 $\boldsymbol{\Omega}$ 的竖直分量进入水平运动。

推导：复坐标求解

令 $\xi = x + iy$ ，把第二式乘 i 加到第一式： $\ddot{\xi} = -\omega_0^2 \xi + 2\Omega_z(\dot{y} - i\dot{x}) = -\omega_0^2 \xi - 2i\Omega_z(\dot{x} + i\dot{y})$ ，即

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_z \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0. \quad (3.2)$$

试探 $\xi \propto e^{st}$ ： $s^2 + 2i\Omega_z s + \omega_0^2 = 0$ ， $s = -i\Omega_z \pm i\omega'$ ， $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_z^2}$ 。通解

$$\xi(t) = e^{-i\Omega_z t} (a_+ e^{i\omega' t} + a_- e^{-i\omega' t}). \quad (3.3)$$

地面系中逆时针圆分量的频率为 $\omega_+ = \omega' - \Omega_z$ ，顺时针分量为 $\omega_- = \omega' + \Omega_z$ 。由引理 (2.8)，振动方向以

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} = -\Omega_z = -\Omega_E \sin \lambda \quad (3.4)$$

转动：北半球 ($\lambda > 0$) 从上往下看顺时针进动，进动一周需时 $T_F = 2\pi/(\Omega_E \sin \lambda)$ 。式 (3.3) 中的因子 $e^{-i\Omega_z t}$ 直观地表明：整个振动图样在以 $-\Omega_z$ 旋转。

要点：“振型记住惯性空间”的确切含义

在北极，地面在摆下以 Ω_E 逆时针转，振动面相对恒星不动，于是相对地面以 $-\Omega_E$ 转。在纬度 λ ，地球自转可分解为绕当地竖直轴的 $\Omega_E \sin \lambda$ 与绕当地水平（南北）轴的 $\Omega_E \cos \lambda$ 。后者只是让“竖直方向”在空间中倾斜，而摆总是跟随当地重力方向，所以它不引起水平面内的进

动。准确地说：振动方向绕当地竖直轴不转动（相对惯性系），所以相对地面以 $-\Omega_z$ 转。这正是“简并 + 转动”的结果——振动方向本来就不受回复力约束，只服从惯性。

检验：数值、极限与独立核对

- 量纲： Ω_z 为 rad/s，与 $\dot{\psi}$ 一致。极限： $\lambda = 90^\circ$ 时 T_F 为一个恒星日（地球相对遥远恒星自转一周的时间，23 h 56 min 4 s = 23.93 h，比以太阳为参照的 24 h 短约 4 分钟）；赤道 $\lambda = 0$ 不进动。
- 巴黎先贤祠 ($\lambda = 48.85^\circ$, $L = 67$ m): $\omega_0 = 0.382 \text{ s}^{-1}$, 周期 16.4 s; $T_F = 31.8$ h。每个摆动周期振动面只转 0.052° , 振幅 3 m 时摆锤端点每周期横移约 2.7 mm——几分钟就能看出来。
- 广州 ($\lambda = 23.13^\circ$ [25]): $\Omega_z = 5.91^\circ/\text{h}$, $T_F = 23.93 \text{ h} / \sin 23.13^\circ = 60.9 \text{ h}$, 约两天半转一圈（北京约 37.3 h）。
- 静止释放 ($\xi(0) = A$, $\dot{\xi}(0) = 0$) 给出 $a_+ - a_- = (\Omega_z/\omega')A$: 轨迹是很扁的椭圆、整体形成“玫瑰线”（图 3(a)，为看清而夸大了 Ω_z/ω_0 ）。先贤祠摆的短/长轴比仅 1.4×10^{-4} 。
- scripts/verify_numeric.py 用三维“硬弦摆”在转动地球系中的完整方程（含 Ω 的水平分量、离心项、竖直运动）积分，在 $\lambda = 90^\circ$ 与 23.13° 得到的进动率与 $-\Omega \sin \lambda$ 相差 $< 0.2\%$ （取夸大的 $\Omega/\omega_0 = 0.01$ ）。

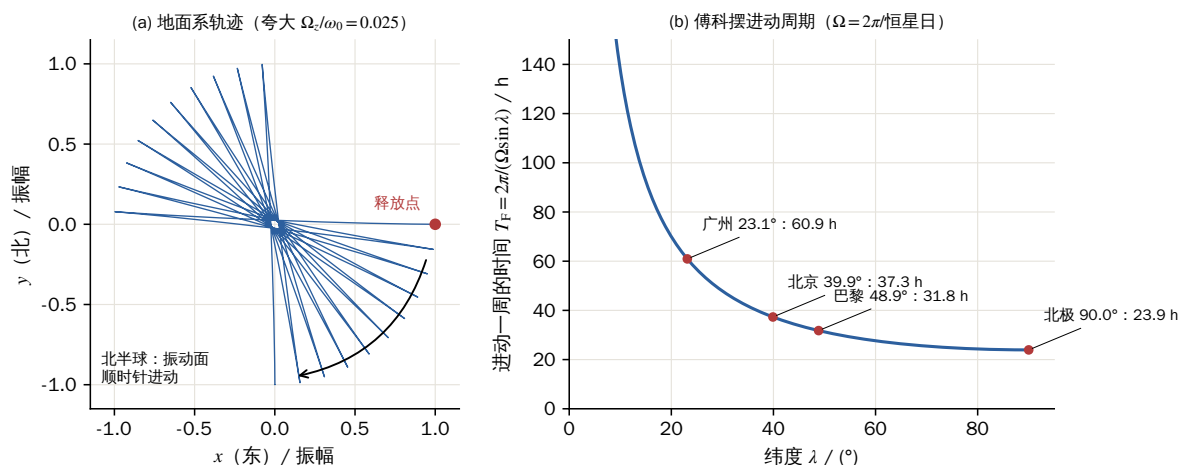


图 3 (a) 由式 (3.1) 数值积分得到的地面系轨迹 (Ω_z/ω_0 被夸大到 0.025, 画出振动面转过 90° 的过程); 脚本核对数值解与解析解 (3.3) 之差 $< 10^{-6}$ 。(b) 进动周期与纬度的关系, 标出广州、北京、巴黎、北极。

交互演示：傅科摆在地面系中的轨迹：拖动纬度 λ 与“转速放大倍数”，观察振动面进动的方向与快慢；读数给出真实地球上的进动周期 $T_F = 23.93 \text{ h} / \sin \lambda$ 。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 gyro-foucault）。

4 科里奥利振动陀螺 (MEMS)

傅科摆用“自由振动 + 长时间等待”测量地球自转。手机要在毫秒内测出每秒几度到几千度的转动，于是改用受迫振动：持续驱动一个方向的振动，测量科里奥利力在垂直方向激起的振动。

4.1 模型与运动方程

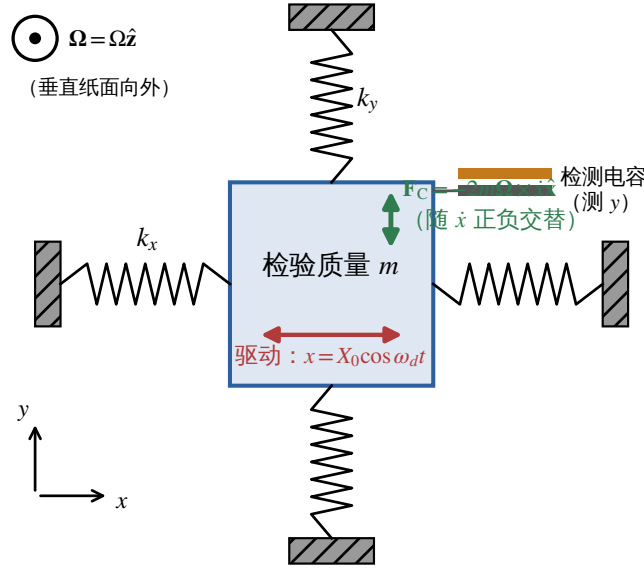


图 4 最简单的 MEMS 振动陀螺示意：质量块 m 由弹簧 k_x, k_y 支在芯片上，被静电力沿 x 驱动；芯片绕 z 轴转动时，科里奥利力沿 y 激起振动，由电容极板检测。

假设：双模振子模型

1. 质量块在芯片平面内运动；芯片（转动系）以 $\Omega = \Omega(t)\hat{z}$ 转动， Ω 的变化远慢于振动。
2. 驱动模态 x ：固有频率 ω_x ，被闭环电路维持在 $x = X_0 \cos \omega_d t$ ， $\omega_d = \omega_x$ 。这里的闭环叫 **自动增益控制**：电路实时测量驱动振幅，偏大就减小驱动力、偏小就加大，使 X_0 恒定。
3. 检测模态 y ：固有频率 ω_y ，品质因数 Q （阻尼系数 $b = m\omega_y/Q$ ）；频率失配 $\Delta\omega \equiv \omega_y - \omega_d$ 满足 $|\Delta\omega| \ll \omega_d$ 。

由式 (2.5)， $\Omega \times \mathbf{v}' = \Omega(-\dot{y}, \dot{x}, 0)$ ， $\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = -\Omega^2(x, y, 0)$ ， $\dot{\Omega} \times \mathbf{r} = \dot{\Omega}(-y, x, 0)$ ，得

$$m\ddot{x} + b_x\dot{x} + k_x x = F_d(t) + 2m\Omega\dot{y} + m\Omega^2 x + m\dot{\Omega}y, \quad (4.1)$$

$$m\ddot{y} + b_y\dot{y} + k_y y = -2m\Omega\dot{x} + m\Omega^2 y - m\dot{\Omega}x. \quad (4.2)$$

量级与取舍：(i) 离心项与弹簧力之比 $(\Omega/\omega)^2$ ，即使 $\Omega = 2000^\circ/\text{s}$ 、 $f_d = 20 \text{ kHz}$ 也只有 8×10^{-8} ，舍去；(ii) 欧拉项与科里奥利项之比 $\sim \dot{\Omega}/(2\Omega\omega_d)$ ，在 Ω 的变化比振动慢得多时可略；(iii) 式 (4.1) 中科里奥利反作用 $2m\Omega\dot{y}$ 因 $Y \ll X_0$ 且驱动振幅被闭环稳住而可略。于是检测方程为

$$\ddot{y} + \frac{\omega_y}{Q}\dot{y} + \omega_y^2 y = -2\Omega\dot{x} = 2\Omega X_0 \omega_d \sin \omega_d t. \quad (4.3)$$

它就是式 (2.10): 一个被“科里奥利力” $F_C = 2m\Omega X_0\omega_d \sin \omega_d t$ 驱动的阻尼振子。注意 F_C 与驱动速度 $\dot{x}$ 同相 (与位移 x 差 90°)。

4.2 检测振幅: 灵敏度

把 $F_0/m = 2\Omega X_0\omega_d$ 代入式 (2.11):

$$Y = \frac{2\Omega X_0\omega_d}{\sqrt{(\omega_y^2 - \omega_d^2)^2 + (\omega_d\omega_y/Q)^2}} \approx \frac{\Omega X_0}{\sqrt{\Delta\omega^2 + (\omega_d/2Q)^2}}, \quad (4.4)$$

近似号用了与式 (2.12) 相同的近共振展开 (小参量 $\Delta\omega/\omega_d$)。两个极限:

$$\text{模态匹配}(\Delta\omega = 0): Y = \frac{2Q}{\omega_d} \Omega X_0; \quad \text{大失配}(|\Delta\omega| \gg \omega_d/2Q): Y = \frac{\Omega X_0}{|\Delta\omega|}. \quad (4.5)$$

数值感受 ($f_d = 20 \text{ kHz}$, $X_0 = 5 \mu\text{m}$, $\Omega = 1^\circ/\text{s}$): 匹配且 $Q = 10^4$ 时 $Y = 13.9 \text{ nm}$; 失配 $\Delta f = 100 \text{ Hz}$ 时 $Y = 0.14 \text{ nm}$ ——只有原子尺度! 图 5(a) 给出 Y 随失配的变化。相位上, 匹配时 y 落后 F_C 90° , 因而与 x 同相 (或反相); 大失配时 y 与 F_C 同相 (或反相), 与 x 差 90° 。读出电路必须按相应的参考相位**解调**——把检测信号乘以与驱动同频、选定相位的参考正弦, 再在许多周期上取平均, 只留下与参考同相的分量 (定量写法见第 4.4 节)。

4.3 模态匹配的代价: 带宽

推导: 检测振动的包络方程

科里奥利力可写成 $F_C/m = 2\Omega(t)X_0\omega_d \sin \omega_d t = \text{Re}[-2i\Omega(t)X_0\omega_d e^{i\omega_d t}]$, 即复振幅 $\tilde{F}/m = -2i\Omega X_0\omega_d$ 。设 $y = \text{Re}[A(t)e^{i\omega_d t}]$, 代入包络方程 (2.14) (其中 $\Delta = \omega_y - \omega_d = \Delta\omega$):

$$\dot{A} = -\left(\frac{1}{\tau_r} - i\Delta\omega\right)A - X_0\Omega(t), \quad \tau_r = \frac{2Q}{\omega_y}. \quad (4.6)$$

推导: 解调输出对变化角速度的频率响应

令 $p \equiv 1/\tau_r - i\Delta\omega$, 式 (4.6) 写成 $\dot{A} = -pA - X_0\Omega(t)$ 。

1. **恒定 Ω** : 稳态 $A = -X_0\Omega/p$, $|A| = X_0\Omega/|p|$ 。定义**直流灵敏度** $\mathcal{S} \equiv |A|/\Omega = X_0/|p|$, 即式 (4.4) 的近共振形式。
2. **解调输出**: 读出电路把 y 与参考正弦 $2\cos(\omega_d t + \alpha_{\text{ref}})$ 相乘, 在若干载波周期 T 上平均:

$$\frac{1}{T} \int \text{Re}[Ae^{i\omega_d t}] \cdot 2\cos(\omega_d t + \alpha_{\text{ref}}) dt = \text{Re}[Ae^{-i\alpha_{\text{ref}}}]$$

(含 $e^{\pm 2i\omega_d t}$ 的项平均为零), 即复包络在参考相位 α_{ref} 上的投影, 记为 $D(t)$ 。取 $e^{-i\alpha_{\text{ref}}} = -p/|p|$, 使恒定 Ω 时 $D = X_0\Omega/|p| > 0$ 最大。注意 D 对 A 是线性的, 而 $|A|$ 不是。

3. **正弦变化的角速度** $\Omega = \Omega_0 \cos \nu t = \frac{\Omega_0}{2}(e^{i\nu t} + e^{-i\nu t})$ 。方程是线性的, 对每个复指数分别求特解: 输入 $e^{\pm i\nu t}$ 时 $A = -X_0 e^{\pm i\nu t}/(p \pm i\nu)$ 。代入 D , 并用 $\text{Re } z = \text{Re } z^*$ 把第二项改

写成 $e^{i\nu t}$ 的形式 (这里讨论的是没有反馈的读出, 称为**开环响应**):

$$\begin{aligned} D(t) &= \frac{X_0 \Omega_0}{|p|} \operatorname{Re}[H(\nu) e^{i\nu t}], \\ H(\nu) &= \frac{1}{2} \left[\frac{p}{p + i\nu} + \frac{p^*}{p^* + i\nu} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

显然 $H(0) = 1$ 。我们把 $|H|$ 保持在 $[1/\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (即 ± 3 dB) 之内的最高频率称为**平坦带宽**。

4. **模态匹配** ($\Delta\omega = 0, p = 1/\tau_r$): $H = 1/(1 + i\nu\tau_r)$, $|H| = 1/\sqrt{1 + \nu^2\tau_r^2}$, 与 RC 电路的输出一样随频率单调下降, 称为**一阶低通**; $|H| = 1/\sqrt{2}$ 处 $\nu = 1/\tau_r$, 带宽 $f_{bw} = 1/(2\pi\tau_r) = f_d/(2Q)$ 。
5. **大失配** ($\Delta\omega\tau_r \gg 1$): 第一项分母 $p + i\nu = 1/\tau_r + i(\nu - \Delta\omega)$ 在 $\nu = \Delta\omega$ 处最小, 谐振峰高 $|H| \approx \frac{1}{2} |p| \tau_r \approx \frac{1}{2} \Delta\omega\tau_r$ 。离峰较远处可令 $1/\tau_r \rightarrow 0$ ($p \rightarrow -i\Delta\omega$):

$$H(\nu) \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega - \nu} + \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega + \nu} \right] = \frac{\Delta\omega^2}{\Delta\omega^2 - \nu^2}. \quad (4.8)$$

增益随 ν 增大而上升, 到 $\nu = \Delta\omega\sqrt{1 - 1/\sqrt{2}} = 0.54\Delta\omega$ 时已达 $\sqrt{2}$ (+3 dB)。所以平坦带宽只有约 $0.54\Delta f$ 。

要点: 灵敏度与带宽此消彼长

直流灵敏度 $\mathcal{S} = X_0/|p|$, 平坦带宽 ω_{bw} 与 $|p| = \sqrt{\tau_r^{-2} + \Delta\omega^2}$ 同量级 (匹配时 $\omega_{bw} = |p|$, 大失配时 $\omega_{bw} \approx 0.54|p|$), 因此有量级关系

$$\mathcal{S} \cdot \omega_{bw} \sim X_0. \quad (4.9)$$

模态匹配把灵敏度提高约 $|\Delta\omega|\tau_r$ 倍, 带宽就窄同样的倍数。 $f_d = 20$ kHz、 $Q = 10^4$ 时 $\tau_r = 0.16$ s, 匹配带宽 $f_d/(2Q) = 1$ Hz, 对手机太慢。失配 $\Delta f = 100$ Hz 时灵敏度降为 $X_0/\Delta\omega$, 平坦带宽约 54 Hz, 但在 100 Hz 处有约 $\Delta\omega\tau_r/2 = 50$ 倍的谐振峰, 必须用低通滤波 (让低频通过、衰减高频的电路) 或闭环反馈把它压下去。注意: 失配并不缩短暂态的衰减时间——自由振动部分总按 τ_r 衰减。

注: 阶跃响应中的“拍”从哪来

阶跃时 $A(t) = -\frac{X_0\Omega}{p}(1 - e^{-pt})$, 其中 $e^{-pt} = e^{-t/\tau_r}e^{i\Delta\omega t}$: 检测模态的自由振动 (频率 ω_y) 与被迫振动 (频率 ω_d) 叠加, 形成频率 Δf 的拍, 自由部分按 τ_r 衰减。投影到参考相位上就是图 5(c) 的 $1 - e^{-t/\tau_r} \cos \Delta\omega t$ 。消费级器件常故意工作在失配状态 (Δf 数十到数百赫兹) 并加低通滤波, 以换取带宽和对温度、气压变化的鲁棒性。高端器件则用模态匹配 + 力反馈闭环 (见第 6.1 节) 兼得灵敏度与带宽: 反馈力实时抵消科里奥利力, 检测振子不需要“攒”振幅, 带宽由反馈回路决定。

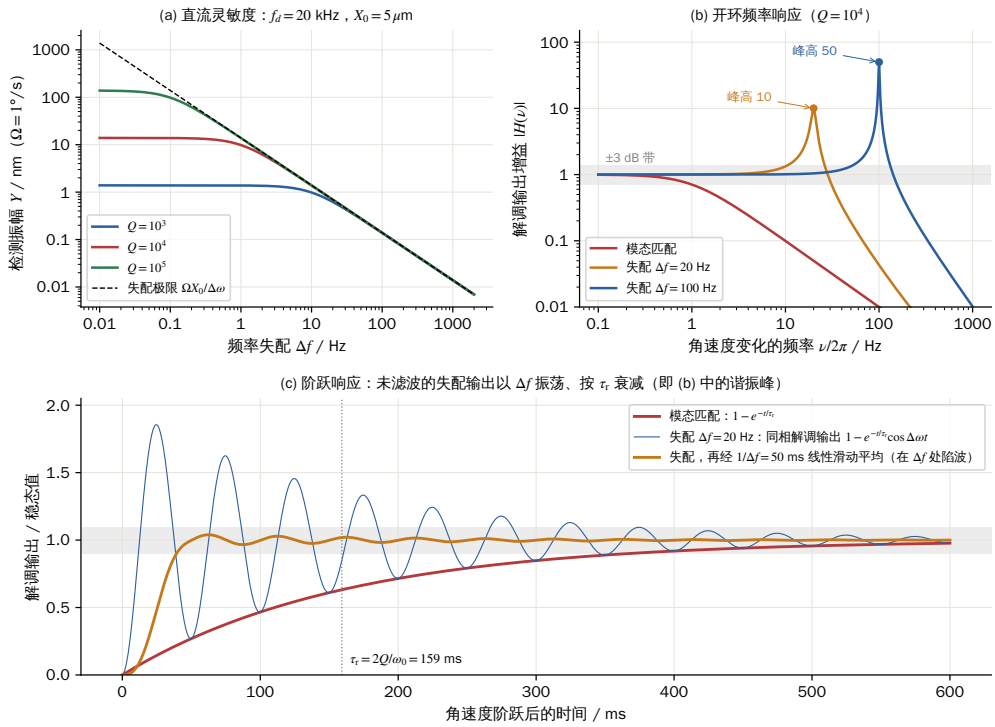


图 5 (a) 式 (4.4) 给出的直流检测振幅随频率失配的变化, 虚线为大失配极限 $\Omega X_0 / \Delta\omega$ 。(b) 式 (4.7) 的开环频率响应。匹配时为一阶低通 (-3 dB 在 $f_d/2Q = 1 \text{ Hz}$); 失配时在 $\nu = \Delta\omega$ 处有高 $\Delta\omega\tau_r/2$ 的峰。脚本核对峰高与 $\Delta\omega\tau_r/2$ 之差 $< 2\%$, $\pm 3 \text{ dB}$ 平坦带宽 $= 0.541\Delta f$ ($\Delta f = 100 \text{ Hz}$)、 $0.544\Delta f$ ($\Delta f = 20 \text{ Hz}$)。(c) $Q = 10^4$ 、 $\Delta f = 20 \text{ Hz}$ 时角速度阶跃后的同相解调输出 $D(t)/D_\infty = 1 - e^{-t/\tau_r} \cos \Delta\omega t$: 以 Δf 振荡、按 τ_r 衰减, 就是 (b) 中的谐振峰。长 $1/\Delta f$ 的线性滑动平均对不衰减的 Δf 余弦恰为零 (陷波), 对按 τ_r 衰减的余弦则留下约 $1/(\Delta\omega\tau_r) \approx \pm 4\%$ 的残余振荡; 滤波后约 39 ms 进入并保持在 $\pm 10\%$ 带内, 最大值 1.04。

交互演示：驱动/检测双模振子：调节角速度 Ω 、频率失配 Δf 与品质因数 Q ，观察直流检测振幅（单位 nm）、开环频率响应 $|H(\nu)|$ 的谐振峰与平坦带宽，以及同相解调输出的阶跃响应。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 gyro-mems）。

注：正交误差：比信号大几百倍的“假信号”

制造误差使弹簧略有倾斜，检测方程多出耦合项 $-(k_{xy}/m)x = -(k_{xy}/m)X_0 \cos \omega_d t$ 。它与 x 同相，而科里奥利力与 $\dot{x}$ 同相，两者相差 90° ——称为正交误差。两者幅度之比为 $\frac{k_{xy}X_0/m}{2\Omega X_0\omega_d} = \frac{k_{xy}}{k} \cdot \frac{\omega_d}{2\Omega}$ ：若 $k_{xy}/k = 10^{-4}$ 、 $f_d = 20 \text{ kHz}$ 、 $\Omega = 1^\circ/\text{s}$ ，比值高达 360。只有按正确相位解调（相敏检测）才能把它们分开；解调参考相位错 1 mrad 就会漏进相当于 $0.36^\circ/\text{s}$ 的假角速度。正交误差在第 6.4 节的频率裂分问题中还会以“椭圆化”的形式出现。

4.4 机械热噪声极限与角随机游走

即使电子学完美，质量块本身的热运动也会被误认为转动。

假设：热噪声模型

检测模态受随机力 $f(t)$ ，按式 (2.20)， $\langle f(t)f(t') \rangle = S_F \delta(t-t')$ ， $S_F = 2bk_B T = 2m\omega_y k_B T/Q$ ；读出用平均时间 T_m 的相敏解调，且 $T_m \gg \tau_r$ 、 $T_m \gg 1/|\Delta\omega|$ （使机械响应在带宽 $1/T_m$ 内近似平坦）。

推导：等效角速度噪声

第一步：解调就是“取一个正交分量并平均”。定义作用在检测模态上的力 $F(t)$ 的正弦分量的解调值

$$\hat{F}_s \equiv \frac{2}{T_m} \int_0^{T_m} F(t) \sin(\omega_d t) dt.$$

对科里奥利力 $F_C = 2m\Omega X_0 \omega_d \sin \omega_d t$ ，由于 $\frac{2}{T_m} \int \sin^2 = 1$ ，得 $\hat{F}_s = 2m\Omega X_0 \omega_d$ ——解调值正比于 Ω 。

第二步：噪声力的解调值的方差。用式 (2.17)：

$$\langle \hat{F}_s^2 \rangle = \frac{4}{T_m^2} \int_0^{T_m} \int_0^{T_m} \sin \omega_d t \sin \omega_d t' S_F \delta(t-t') dt dt' = \frac{4S_F}{T_m^2} \int_0^{T_m} \sin^2 \omega_d t dt = \frac{2S_F}{T_m}.$$

第三步：折算成角速度。信号力和噪声力经历同一个机械响应（假设中的条件保证这一点），所以只需比较力：等效角速度误差 $\Omega_n = \hat{F}_s^{\text{噪声}}/(2mX_0\omega_d)$ ，其方差 $\langle \Omega_n^2 \rangle = \frac{2S_F}{T_m(2mX_0\omega_d)^2}$ 。

第四步：与“白噪声角速度”对照。若角速度读数含强度为 N^2 的白噪声 ($\langle \Omega_n(t)\Omega_n(t') \rangle = N^2 \delta(t-t')$)，由式 (2.18)，平均 T_m 后方差为 N^2/T_m 。对照第三步得 $N^2 = 2S_F/(2mX_0\omega_d)^2$ ；代入 $S_F = 2m\omega k_B T/Q$ （取 $\omega_y \approx \omega_d \equiv \omega$ ）：

$$N = \frac{1}{X_0} \sqrt{\frac{k_B T}{m \omega Q}} \quad (4.10)$$

由式 (2.19)，积分得到的角度误差 $\sigma_\vartheta(t) = N\sqrt{t}$ ，所以 N 叫**角随机游走**（angle random walk, ARW）系数，单位 $\text{rad}/\sqrt{\text{s}}$ ，工程上常用 $^\circ/\sqrt{\text{h}}$ ($1^\circ/\sqrt{\text{s}} = 60^\circ/\sqrt{\text{h}}$)。

要点：热噪声极限的物理含义

(1) N 与频率失配 $\Delta\omega$ 无关：信号和热噪声被同一个机械共振放大，匹配并不改善机械热噪声极限——它改善的是相对于电子学噪声的信噪比。(2) 要降低 N ：加大质量 m 、驱动振幅 X_0 和 Q ——这正是 HRG（大振子、 $Q \sim 10^7$ ）比 MEMS 好几个数量级的原因。(3) 式 (4.10) 与文献 [26, 27] 中的双边谱形式一致；与数据手册“速率噪声密度”的换算（可能差 $\sqrt{2}$ ）见第 2.5 节。

检验：独立数值核对

scripts/verify_numeric.py 对 4000 个独立的检测振子（无量纲 $m = \omega = k_B T = 1$, $Q = 10$ ）加白噪声力积分，按匹配情形做相敏解调（ $T_m = 400 \gg \tau_r = 20$ ），得到的速率估计方差与 N^2/T_m 之比为 0.94（偏差来自有限 T_m/τ_r 与系综统计误差，约 5%）。量纲： $k_B T/(m\omega Q)$ 的单位为 $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}) = \text{m}^2/\text{s}$ ，开方后除以 X_0 得 $\text{s}^{-1/2}$ ，即 $\text{rad}/\sqrt{\text{s}}$ 。

5 环形与酒杯谐振陀螺：Bryan 因子

傅科摆和 MEMS 陀螺里振动的是一个“质点”。Bryan 的酒杯里振动的是一个连续弹性体，振动图样（波腹、波节）是一种“波”，它在转动中会怎样？我们用最简单的模型——薄圆环——严格回答这个问题。

5.1 薄圆环的弯曲振型与不可伸长条件

假设：薄圆环模型

1. 圆环半径 R ，截面积 A ，截面尺寸 $h \ll R$ ；材料密度 ρ ，线密度 $\mu = \rho A$ ，弯曲刚度 EI （ E 为杨氏模量， $I = \int y^2 dA$ 为截面对中性轴的惯性矩， y 是截面上一点到中性轴的距离）。
2. 只考虑环平面内的小振动；用随壳体转动的坐标描述：每个材料点用它静止时的角位置 θ 标记，其位移分解为径向（向外为正）分量 $u(\theta, t)$ 和切向（沿 θ 增大方向）分量 $v(\theta, t)$ 。
3. 壳体（以及环的支撑）以恒定角速度 Ω 绕环的对称轴转动， $\Omega \ll \omega_n$ 。

推导：中线伸长与不可伸长条件

考虑静止时位于 θ 与 $\theta + d\theta$ 之间、长为 $Rd\theta$ 的一小段。位移后其长度在一阶下有两个变化来源：

- 径向外移 u ：该段所在圆的半径变为 $R + u$ ，长度变为 $(R + u)d\theta$ ，伸长 $u d\theta$ ；
- 切向位移不均匀：两端的切向位移分别为 $v(\theta)$ 与 $v(\theta + d\theta)$ ，该段被拉长 $\frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta$ 。

所以中线的相对伸长（应变）为

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right). \quad (5.1)$$

(verify_symbolic.py 由精确弧长展开到一阶核对了此式。)

要点：为什么可以假设“不可伸长”

拉伸中线的刚度 $\sim EA$ ，而弯曲的等效刚度 $\sim EI/R^2$ ；对矩形截面 $I = Ah^2/12$ ，两者之比 $EI/(EAR^2) = h^2/(12R^2) \ll 1$ 。一个变形若要拉伸中线，所需能量比只弯曲大 $(R/h)^2$ 倍，所以低阶（低频）振型几乎不伸长中线。令 $\varepsilon_\theta = 0$ ：

$$u = -\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (\text{不可伸长条件}). \quad (5.2)$$

物理意义：哪里向外鼓 ($u > 0$)，该处附近的材料就必须沿切向向它“汇拢” ($\partial v / \partial \theta < 0$) 来补足长度，反之亦然。于是径向运动最大处（波腹）切向位移为零，径向运动为零处（波节）切向位移最大——图 6 中的红箭头。**符号约定：**许多文献写作 $u_r = \partial u_\theta / \partial \theta$ ，那是取径向向内为正（或 θ 反向）的结果，与式 (5.2) 等价。

前置知识：傅里叶级数（最低限度）

- **展开：**以 2π 为周期的（足够光滑的）函数 $g(\theta)$ 都可以写成 $g(\theta) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ 。这一“完备性”我们只陈述、不证明；直观上，阶数越高的项描述越细的起伏。
- **正交性：**对正整数 n, m ，直接积分（用积化和差）可得

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta d\theta = \pi \delta_{nm}, \quad \int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin m\theta d\theta = 0,$$
 其中 δ_{nm} 在 $n = m$ 时为 1、否则为 0。
- **求系数：**把展开式乘以 $\cos m\theta$ 再积分一周，由正交性只剩一项： $a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g \cos m\theta d\theta$ （同理求 b_m ， a_0 为平均值）。
- **在本讲的用处：**能量是位移的二次式，积分一周后不同阶 $n \neq m$ 的交叉项全部为零，所以各阶振型的能量互不混合、运动方程互不耦合（第 5.2 节的注）。

推导：振型的傅里叶展开

$u(\theta, t)$ 是 θ 的周期函数，可展开为 $u = \sum_n [q_{1n}(t) \cos n\theta + q_{2n}(t) \sin n\theta]$ 。由式 (5.2) 积分得 $v = -\int u d\theta$ 。逐项看：

- $n = 0$ （均匀胀缩，“呼吸”模式）： $v = -q_{10}\theta$ 不是周期函数，不允许——呼吸模式必须拉伸中线，频率高得多，不在我们关心的低频范围内。
- $n = 1$ ： $u = q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta$ ， $v = -q_1 \sin \theta + q_2 \cos \theta$ 。位移矢量 $u\hat{e}_r + v\hat{e}_\theta = (q_1, q_2)$ 与 θ 无关——整环刚体平移，不变形、频率为零。
- $n \geq 2$ ：真正的弯曲振型。对第 n 阶，

$$u = q_1 \cos n\theta + q_2 \sin n\theta, \quad v = \frac{1}{n} (-q_1 \sin n\theta + q_2 \cos n\theta). \quad (5.3)$$

（积分常数对应整环刚体转动，已并入“壳体转角”，此处取零。）

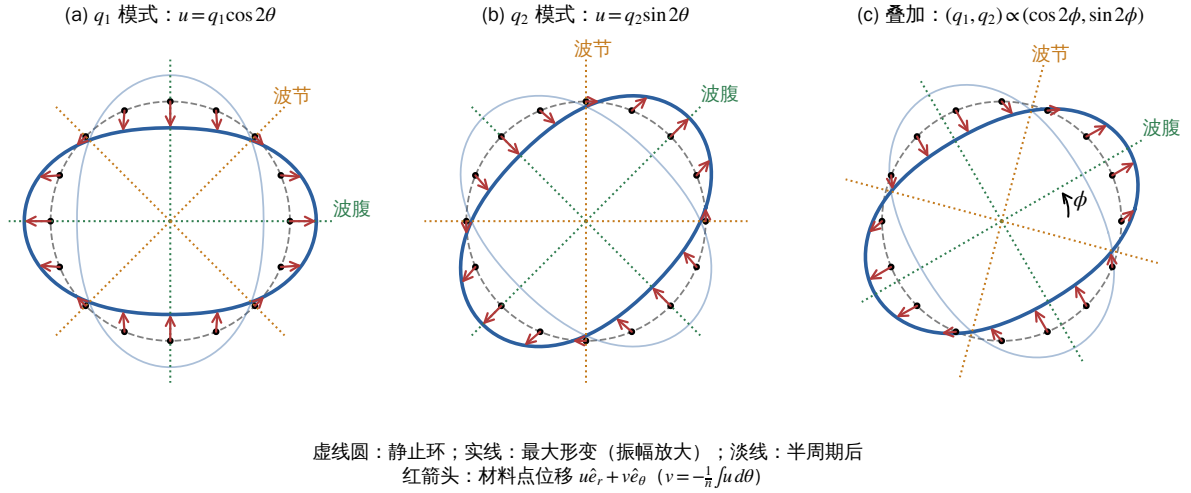


图 6 $n = 2$ 的两个简并振型及其叠加。(c) 的形状与 (a) 完全相同，只是整体转过 ϕ （脚本逐点核对，误差 $< 10^{-12}$ ）。脚本还核对了：按式 (5.3) 变形后的周长变化只是振幅的二阶小量（图中振幅放大到 $0.22R$ 时相对变化 2.7%，而同振幅的呼吸模式会伸长 22%）。

要点：简并与“振型角”

由于圆环轴对称， $\cos n\theta$ 与 $\sin n\theta$ 两个振型只差一个转角 $\pi/2n$ ，必然有相同的频率 ω_n ——又是简并。取 $(q_1, q_2) = a(\cos n\phi, \sin n\phi)$ ，则

$$u = a(\cos n\phi \cos n\theta + \sin n\phi \sin n\theta) = a \cos n(\theta - \phi) :$$

这是把 q_1 振型整体转过 ϕ 得到的振型，波腹位于 $\theta = \phi$ 。注意“ n 倍角”：振型在环上转 ϕ ，对应 (q_1, q_2) 平面中的矢量转 $\psi = n\phi$ 。 (q_1, q_2) 就像一个“二维各向同性振子”的坐标： q 平面里的直线振动 = 环上的驻波， q 平面里的圆运动 = 环上的行波。

5.2 转动圆环的拉格朗日量

推导：惯性系中材料点的速度

在壳体系中，标记为 θ 的材料点位于 $\mathbf{r} = (R + u)\hat{e}_r + v\hat{e}_\theta$ ，其中 $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ 是该材料点处、随壳体转动的单位矢量（在壳体系中不动）。由式 (2.3)，惯性系速度为

$$\mathbf{v}_S = \dot{u}\hat{e}_r + \dot{v}\hat{e}_\theta + \Omega\hat{z} \times [(R + u)\hat{e}_r + v\hat{e}_\theta].$$

用 $\hat{z} \times \hat{e}_r = \hat{e}_\theta$ 、 $\hat{z} \times \hat{e}_\theta = -\hat{e}_r$ ：

$$\mathbf{v}_S = (\dot{u} - \Omega v)\hat{e}_r + [\dot{v} + \Omega(R + u)]\hat{e}_\theta. \quad (5.4)$$

推导: 动能按 Ω 的幂次展开

质元质量 $dm = \mu R d\theta$ (用静止长度: 质量守恒)。

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{\mu R}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ (\dot{u} - \Omega v)^2 + [\dot{v} + \Omega(R + u)]^2 \right\} d\theta \\
 &= T_0 + T_1 + T_2, \\
 T_0 &= \frac{\mu R}{2} \int (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) d\theta \quad (\Omega \text{ 的零次}), \\
 T_1 &= \mu R \Omega \int (u\dot{v} - v\dot{u}) d\theta + \mu R^2 \Omega \int \dot{v} d\theta \quad (\Omega \text{ 的一次}), \\
 T_2 &= \frac{\mu R}{2} \Omega^2 \int [(R + u)^2 + v^2] d\theta \quad (\Omega \text{ 的二次}).
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

代入式 (5.3), 用 $\int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta d\theta = \pi$, $\int_0^{2\pi} \sin n\theta \cos n\theta d\theta = 0$, 逐项计算:

- T_0 : $\int \dot{u}^2 = \pi(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$, $\int \dot{v}^2 = \frac{\pi}{n^2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$, 故

$$T_0 = \frac{M}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \quad M \equiv \pi\mu R \left(1 + \frac{1}{n^2}\right). \tag{5.6}$$

M 是模态质量: 1 来自径向运动, $1/n^2$ 来自切向运动。

- T_1 : $\int \dot{v} d\theta = 0$ ($n \geq 1$ 的正弦、余弦在整周上积分为零)。又

$$u\dot{v} = \frac{1}{n}(q_1 \cos n\theta + q_2 \sin n\theta)(-\dot{q}_1 \sin n\theta + \dot{q}_2 \cos n\theta) \Rightarrow \int u\dot{v} d\theta = \frac{\pi}{n}(q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1),$$

同理 $\int v\dot{u} d\theta = \frac{\pi}{n}(-q_1 \dot{q}_2 + q_2 \dot{q}_1)$ 。相减:

$$T_1 = G(q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1), \quad G \equiv \frac{2\pi\mu R \Omega}{n}. \tag{5.7}$$

- $T_2 = \mathcal{O}(\Omega^2)$: $\int (R + u)^2 = 2\pi R^2 + \pi(q_1^2 + q_2^2)$ (交叉项 $2R \int u = 0$), $\int v^2 = \frac{\pi}{n^2}(q_1^2 + q_2^2)$ 。所以 $T_2 = \text{常数} + \frac{1}{2}M\Omega^2(q_1^2 + q_2^2)$ ——对 q_1, q_2 完全对称, 使两个模式的频率一起移动 ($\omega_n^2 \rightarrow \omega_n^2 - \Omega^2$)。离心力在转动环中产生的环向张力也会改变弯曲刚度, 同样是对两模式对称的 $\mathcal{O}(\Omega^2)$ 修正。这些效应的相对大小 $\sim (\Omega/\omega_n)^2$, 与 T_2 同阶, 下面一并舍去。

注: 不同 n 的振型不会被转动耦合

若 u 中同时含有第 n 阶与第 m 阶 ($m \neq n$), T_0, T_1, T_2 中的交叉项都含 $\int \cos n\theta \cos m\theta$ 或 $\int \cos n\theta \sin m\theta$ 之类的积分, 全为零 (三角函数正交性)。所以在不可伸长、一阶于 Ω 的模型中, 只保留一个 n 并不是额外近似: 各阶的运动方程严格解耦。

势能。 弯曲势能只依赖于环的形状。把振型整体转一个角度 (即把 (q_1, q_2) 在 q 平面中转 n 倍角) 不改变形状, 所以二次型 $V(q_1, q_2)$ 在 q 平面的任意转动下不变, 只能是

$$V = \frac{\kappa}{2}(q_1^2 + q_2^2), \quad \omega_n^2 = \frac{\kappa}{M}. \tag{5.8}$$

对称性已足够推出 Bryan 因子； κ 的具体值（由弯曲能 $\frac{EI}{2} \int \delta \kappa_c^2 ds$ 算出， $\delta \kappa_c$ 为曲率变化）见附录 B，结果是 Hoppe (1871) 的经典公式 [28]

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\mu R^4} \frac{n(n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 + 1}}}. \quad (5.9)$$

5.3 运动方程与 Bryan 因子

推导：两个模式的耦合方程

$L = T_0 + T_1 - V$ 。由陀螺项规则 (2.16)：

$$M\ddot{q}_1 - 2G\dot{q}_2 + \kappa q_1 = 0, \quad M\ddot{q}_2 + 2G\dot{q}_1 + \kappa q_2 = 0. \quad (5.10)$$

除以 M ，并定义

$$\beta \equiv \frac{G}{M} = \frac{2\pi\mu R\Omega/n}{\pi\mu R(1 + 1/n^2)} = \frac{2n}{n^2 + 1} \Omega. \quad (5.11)$$

令 $z = q_1 + iq_2$ ，第二式乘 i 加到第一式： $\ddot{z} + 2\beta(-\dot{q}_2 + i\dot{q}_1) + \omega_n^2 z = 0$ ，而 $-\dot{q}_2 + i\dot{q}_1 = i(\dot{q}_1 + i\dot{q}_2) = i\dot{z}$ ，所以

$$\ddot{z} + 2i\beta\dot{z} + \omega_n^2 z = 0. \quad (5.12)$$

式 (5.12) 与傅科摆方程 (3.2) 形式完全相同，只是 $\Omega_z \rightarrow \beta$ 。照搬第 3 节的结果： $z = e^{-i\beta t}(a_+ e^{i\omega' t} + a_- e^{-i\omega' t})$ ， q 平面中的振动方向以 $\dot{\psi} = -\beta$ 转动。由“ n 倍角”关系 $\psi = n\phi$ ，振型（波腹）相对壳体的转速为

$$\dot{\phi} = -\frac{\beta}{n} = -K\Omega, \quad K = \frac{2}{n^2 + 1} \quad (5.13)$$

相对惯性系，振型的转速为 $\Omega + \dot{\phi} = (1 - K)\Omega$ 。 K 称为 **Bryan 因子**（进动系数）。

要点：结果解读

- $n = 2$ （椭圆振型，酒杯的最低音）： $K = 0.4$ 。壳体转过 Θ ，振型相对壳体反向转过 0.4Θ ，相对惯性系同向转过 0.6Θ ——振型“跟不上”壳体，但也不像傅科摆那样完全留在惯性空间。 $n = 3$ ： $K = 0.2$ 。
- $n = 1$ ： $K = 1$ 。 $n = 1$ 是整环平移，环等价于一个质点，于是退化为傅科摆——振动方向完全“留在”惯性空间。式 (5.13) 包含了傅科摆这一特例。
- 进动角只依赖壳体转过的角度 Θ ，与转得多快无关（只要 $\Omega \ll \omega_n$ ）： $\phi = -K\Theta$ 。所以振动陀螺可以直接测角度——这是第 6.1 节“全角模式”的基础。
- 行波图像： z 的两个分量对应沿 $+\theta$ 、 $-\theta$ 传播的行波 $\cos(n\theta \mp \omega_{\pm} t)$ ，在壳体系中频率分别为 $\omega' - \beta$ 与 $\omega' + \beta$ ：转动使两行波的频率劈裂 $2\beta = 2nK\Omega$ ——Bryan 听到的“拍”就来自这里（例题一）。

注：\$K < 1\$ 的物理原因：波的角动量

对壳体系中的行波 $u = a \cos(n\theta - \omega t)$ ，波形以角速度 $\omega_p = \omega/n$ 绕环传播。计算它（相对壳体）的角动量 $L_w = \mu R \int (u\dot{v} - v\dot{u})d\theta = \frac{2\pi\mu R}{n} a^2 \omega$ 与能量 $\mathcal{E}_w = 2T_0 = M\omega^2 a^2$ （行波的动能与势能时时相等），得

$$\frac{L_w \omega_p}{\mathcal{E}_w} = \frac{2\pi\mu R/n^2}{\pi\mu R(1 + 1/n^2)} = \frac{2}{n^2 + 1} = K.$$

作为对照：一个以同样角速度 ω_p 刚性转动、动能同为 T_0 的物体，角动量 $L_{\text{刚}} = 2T_0/\omega_p = \mathcal{E}_w/\omega_p$ 。所以 $K = L_w/L_{\text{刚}}$ 。而波在传播时，材料点只在原地画小椭圆，波形“跑”得比物质快得多：波携带的角动量只有同样能量的刚体转动的 K 倍。科里奥利效应正比于角动量，所以振型只被“带着”转了 $1 - K$ 。 $n = 1$ 时整环一起运动， $K = 1$ 。（verify_symbolic.py 核对了此比值。）

检验：量纲、极限与两个独立数值实验

- 量纲：\$G\$ 的单位为 $\text{kg/m} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{kg/s}$ ， $\beta = G/M$ 为 s^{-1} ，与 Ω 同量纲；\$K\$ 无量纲。
极限： $n = 1$ 回到傅科摆 $K = 1$ ； $n \rightarrow \infty$ 时 $K \rightarrow 0$ （短波振型几乎完全随壳体转动）。
- 符号： $\dot{\phi}$ 与 Ω 反号，即振型相对壳体反向转动，与傅科摆振动面相对地面反向转动一致。
- 模态方程数值积分（verify_numeric.py）：对式 (5.10)（并保留 Ω^2 修正）积分，用式 (2.9) 的思想读出振型角（在一个振动周期内求 $\langle q_1^2 \rangle, \langle q_2^2 \rangle, \langle q_1 q_2 \rangle$ ， $\tan 2\psi = 2\langle q_1 q_2 \rangle / (\langle q_1^2 \rangle - \langle q_2^2 \rangle)$ ）， $n = 1, 2, 3$ ， $\Omega/\omega_n = 0.01$ 与 0.05 时得 $K = 1.00000, 0.40000/0.39994, 0.20000/0.19996$ 。
- 离散珠-弹簧环的惯性系模拟（verify_ring_sim.py，图 7）：64 个质点由拉伸弹簧（ $EAR^2/EI = 3000$ ）和转角弹簧相连，不假设不可伸长、不做模态展开，直接用牛顿定律在惯性系积分一个自由旋转的环。得 $n = 2$ ： $K = 0.3998$ （三种转速）， $n = 3$ ： $K = 0.1995-0.1997$ ；静止时测得的频率与 Hoppe 公式 (5.9) 相差 0.2%（ $n = 2$ ）和 0.7%（ $n = 3$ ，离散化误差）。

交互演示：转动壳体中 $n = 2$ （或 3）圆环振型的动画：数值积分模态方程 (5.10)，同时画出壳体上的标记、振型的波腹轴；读数给出振型（惯性系）转角与壳体转角之比，应趋于 $1 - K$ 。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 gyro-ring）。

5.4 从圆环到酒杯与半球

Bryan 1890 年处理的是“转动的圆柱或钟”[8]。对一个长圆柱，若振型沿轴向不变（ $u = \cos n\theta$ ），每一个横截面就是一个圆环， K 仍为 $2/(n^2 + 1)$ ；Bryan 的酒杯“每转约 2.4 拍、波节角速度约为杯体的 $\frac{3}{5}$ ”恰与这一圆柱（圆环）极限 $K = 0.4$ 一致（例题一）：杯口附近的杯壁接近竖直圆柱，竖直方向的运动很小。他同时报告两只香槟杯约为 2.6 与 2.2 拍/转，并指出后者“与理论不相容”[8]。下面的一般公式说明了原因（例题四）。

对一般的轴对称壳（酒杯、半球），重复第 5.2 节的推导，只有一处变化： $\Omega \hat{z} \times \mathbf{r}$ 只涉及位移的水平部分（径向水平分量 U_ρ 与周向分量 V_θ ），而模态质量包含全部三个分量（再加上竖直分量

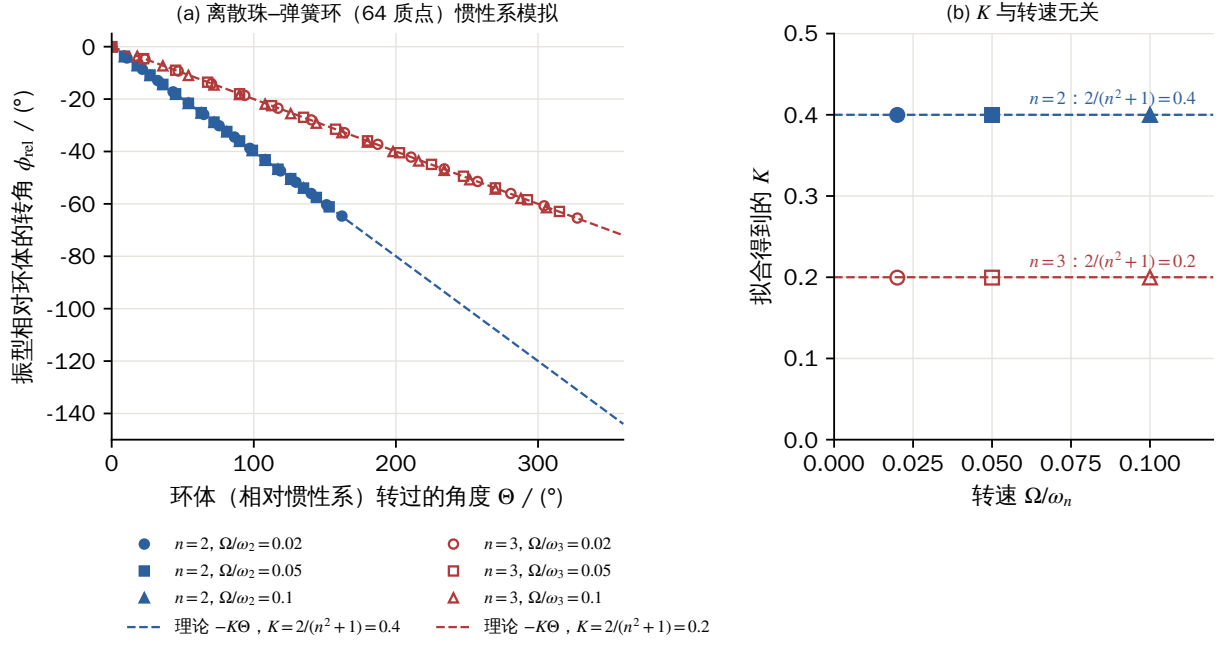


图 7 离散环惯性系模拟。(a) 振型相对环体的转角 ϕ_{rel} 与环体转角 Θ 成正比，斜率为 $-K$ (虚线为理论)；(b) 拟合的 K 与转速无关，分别落在 $2/(n^2+1)=0.4$ 与 0.2 上 (相对偏差 $< 0.3\%$)。

U_z)。设第 n 阶振型为 $(U_\rho \cos n\theta, V_\theta \sin n\theta, U_z \cos n\theta)$ ，其中 U_ρ, V_θ, U_z 是沿母线 (壳面与一个过对称轴的平面的交线，如半球的一条经线) 变化的函数，结果为 (推导见附录 C)

$$K = -\frac{2}{n} \frac{\int U_\rho V_\theta dm}{\int (U_\rho^2 + U_z^2 + V_\theta^2) dm}. \quad (5.14)$$

圆环: $U_\rho = 1, V_\theta = -1/n, U_z = 0$ ，回到 $2/(n^2+1)$ 。对薄半球壳，把瑞利 (Rayleigh) 给出的不可伸长振型 (附录 C，脚本核对其三个中面应变全为零) 代入，数值积分得

$$K_{\text{半球}}(n=2) = 0.2770. \quad (5.15)$$

这与文献中理想半球谐振子的理论值 0.277 一致 [17, 18]；实测某 30 mm 半球谐振子的进动系数为 -0.2755 至 -0.2764 (负号表示相对壳体反向) [17]。半球的 K 比圆环小，是因为半球振动时有相当一部分动能在竖直方向 (U_z) 和靠近碗底处，它们对陀螺耦合没有贡献。

6 工作模式与制造缺陷

6.1 力平衡模式与全角模式

圆环/半球陀螺用分布在壳体周围的电极既激励振动又读出振动。对 $n=2$ 振型，放在 0° 的电极感受 q_1 ($\cos 2\theta$ 在此最大)，放在 45° 的电极感受 q_2 。有两种基本用法 [9, 29]。

力平衡 (速率) 模式。 维持 q_1 振动 $q_1 = a \cos \omega t$ ，并用反馈电极施加力 f_2 使 q_2 始终为零。由式 (5.10) 的第二式， $q_2 \equiv 0$ 要求 $f_2 = M \cdot 2\beta \dot{q}_1$ ，即反馈力的幅度

$$|f_2| = 2M\beta a \omega = 2nKM a \omega \Omega \propto \Omega. \quad (6.1)$$

某一时刻：碗口被挤成椭圆

半周期后：椭圆长、短轴互换

半球壳 $n=2$ 瑞利不可伸长振型（振幅放大）；虚线为静止碗口；底部黑杆为支撑柄

图 8 半球壳 $n=2$ 振型（瑞利不可伸长振型，振幅放大）：碗口在两个正交方向之间交替被挤成椭圆，正是“酒杯振型”。

输出正比于角速度，相当于第 4 节的模态匹配 MEMS 加上力反馈：反馈使检测模态不必“慢慢积累”振幅，带宽由反馈回路决定。缺点是量程受最大反馈力限制，标度因数依赖 M 、 a 、 ω 及电极增益的稳定性。

全角(速率积分)模式。 不施加反馈,让振型自由进动;读出振型方位 ϕ ,壳体转角就是 $\Theta = -\phi/K$ 。标度因数是几何常数 K , 极其稳定; 没有量程上限; 直接给出角度。代价是对壳体的各向同性要求极高(下文)。

推导：全角读出：由两路解调信号求振型角

两路电极经相敏解调得到复包络 c_1, c_2 ($q_j = \text{Re}[c_j e^{i\omega t}]$)。理想驻波 $(q_1, q_2) = a(\cos n\phi, \sin n\phi) \cos(\omega t + \alpha)$ 对应 $c_j = a e^{i\alpha} (\cos n\phi, \sin n\phi)_j$ 。于是

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\equiv |c_1|^2 + |c_2|^2 = a^2, & |c_1|^2 - |c_2|^2 &= a^2 \cos 2n\phi, \\ 2 \text{Re}(c_1 c_2^*) &= a^2 \sin 2n\phi, & \varepsilon &\equiv \frac{2 \text{Im}(c_1 c_2^*)}{\mathcal{E}} = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

公共相位 α 在 $c_1 c_2^*$ 中消去, 所以 $\tan 2n\phi = 2 \text{Re}(c_1 c_2^*) / (|c_1|^2 - |c_2|^2)$ 与振动相位无关——这是式 (2.9) 的复包络版本。若 c_1, c_2 的相位不同, q 平面里的运动是椭圆(环上驻波混入了行波), $\varepsilon \neq 0$ 衡量这种“正交分量”: $\varepsilon = \pm 1$ 是纯行波(圆运动)。

6.2 两模慢变方程

假设：有缺陷的谐振子

密度或厚度的微小不均匀使两个振型不再严格简并：沿某一对“主轴”（取为 q_1, q_2 方向），频率分别为 $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \delta$, 振幅衰减率分别为 $\gamma_{1,2} = 1/\tau_{r,1,2}$ 。假设刚度主轴与阻尼主轴重合（一般情形二者可不同，处理方法相同）； $\delta, \gamma_j, \beta \ll \omega_0$ ；电路已补偿平均损耗（维持总能量），只留下差别：写 $\gamma_{1,2} = \bar{\gamma} \pm \Delta\gamma/2$ ($\Delta\gamma \equiv \gamma_1 - \gamma_2$)，平均值 $\bar{\gamma}$ 被电路注入的能量抵消，下面的方程里实际只出现 $\pm\Delta\gamma/2$ 。（能量补充可以用在波腹处施加与速度同相的力，或周期性地调制电极电压——“参数激励”，HRG 常用后者 [17]。）

在式 (5.10) 的基础上加入这些缺陷：

$$\ddot{q}_1 + 2\gamma_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 - 2\beta \dot{q}_2 = 0, \quad \ddot{q}_2 + 2\gamma_2 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + 2\beta \dot{q}_1 = 0. \quad (6.3)$$

推导：慢变包络

设 $q_j = \text{Re}[c_j(t)e^{i\omega_0 t}]$ ，与第 2.3 节相同：代入后比较 $e^{i\omega_0 t}$ 的系数，舍去 $\ddot{c}_j$ 及“小量 $\times \dot{c}_j$ ” ($\gamma \dot{c}$ 、 $\beta \dot{c}$)，并用 $\omega_1^2 - \omega_0^2 = 2\omega_0 \delta + \delta^2 \approx 2\omega_0 \delta$ ：

$$2i\omega_0 \dot{c}_1 + 2\omega_0 \delta c_1 + 2i\omega_0 \gamma_1 c_1 - 2i\omega_0 \beta c_2 = 0.$$

除以 $2i\omega_0$ (注意 $1/i = -i$)，对 c_2 同样处理：

$$\dot{c}_1 = (i\delta - \gamma_1)c_1 + \beta c_2, \quad \dot{c}_2 = (-i\delta - \gamma_2)c_2 - \beta c_1. \quad (6.4)$$

检验： $\delta = \gamma_j = 0$ 时 $c = (\cos \beta t, -\sin \beta t)c_0$ ， q 平面方向角 $\psi = -\beta t$ ，回到式 (5.13)。(verify_symbolic.py 用符号运算核对了此推导。)

6.3 阻尼不对称：锁定与不均匀进动

推导：Adler 方程

令 $\delta = 0$ 。若初始为驻波 (c_1, c_2 同相，取为实数)，式 (6.4) 的系数全是实数， c_j 保持为实数：阻尼不对称不产生椭圆化。写 $c = a(\cos \psi, \sin \psi)$ ，则 $\dot{\psi} = (c_1 \dot{c}_2 - c_2 \dot{c}_1)/a^2$ ；代入：

$$\dot{\psi} = \frac{c_1(-\gamma_2 c_2 - \beta c_1) - c_2(-\gamma_1 c_1 + \beta c_2)}{a^2} = -\beta + (\gamma_1 - \gamma_2) \cos \psi \sin \psi,$$

即

$$\dot{\psi} = -\beta + \frac{\Delta\gamma}{2} \sin 2\psi \quad (\psi = n\phi, \beta = nK\Omega). \quad (6.5)$$

这在电子学中称为 Adler 方程，原本描述**注入锁定**：一个自激振荡器受到频率相近的外来信号作用时，若频差足够小，它会被“拉”到与外来信号同频同步 [30]。

要点：锁定阈值与平均进动率

- **锁定**：若 $|\beta| < |\Delta\gamma|/2$ ，方程 $\dot{\psi} = 0$ 有解 $\sin 2\psi^* = 2\beta/\Delta\gamma$ ；其中满足 $\Delta\gamma \cos 2\psi^* < 0$ 的一个是稳定的 (对 ψ 求导 $\partial\dot{\psi}/\partial\psi = \Delta\gamma \cos 2\psi < 0$)。振型停在那里不再进动——陀螺“看不见”小于阈值 $\Omega_{\text{lock}} = |\Delta\gamma|/(2nK)$ 的转动。 $\beta = 0$ 时稳定点在低损耗轴：振型被拉向损耗小的方向。
- **不均匀进动**：若 $|\beta| > |\Delta\gamma|/2$ ， ψ 持续变化但时快时慢。转过 π 所需时间 $T_A = \int_0^\pi \frac{d\psi}{|\beta - \frac{\Delta\gamma}{2} \sin 2\psi|} = \frac{\pi}{\sqrt{\beta^2 - \Delta\gamma^2/4}}$ (积分见附录 F)，平均进动率

$$\langle \dot{\psi} \rangle = -\text{sgn}(\beta) \sqrt{\beta^2 - \Delta\gamma^2/4}. \quad (6.6)$$

远离锁定区时 $\langle \dot{\psi} \rangle \approx -\beta(1 - \Delta\gamma^2/8\beta^2)$ ，但瞬时漂移 $\frac{\Delta\gamma}{2} \sin 2\psi$ 依赖振型方位，折合输入角速度误差的幅度为 $\Delta\gamma/(2nK)$ 。

6.4 频率裂分：椭圆化与锁定

推导：精确解

令 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ 。式 (6.4) 写成 $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{M}\mathbf{c}$, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} i\delta & \beta \\ -\beta & -i\delta \end{pmatrix}$ 。直接做矩阵乘法：

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} (i\delta)^2 - \beta^2 & i\delta\beta - i\delta\beta \\ -i\delta\beta + i\delta\beta & -\beta^2 + (i\delta)^2 \end{pmatrix} = -W^2 \mathbf{I}, \quad W \equiv \sqrt{\beta^2 + \delta^2},$$

其中 $\mathbf{I}$ 为 2×2 单位矩阵。于是 $\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{M}^2\mathbf{c} = -W^2\mathbf{c}$ ：每个分量都满足简谐方程，通解为 $\mathbf{c} = \cos(Wt)\mathbf{c}(0) + \frac{\sin Wt}{W}\dot{\mathbf{c}}(0)$ ，而 $\dot{\mathbf{c}}(0) = \mathbf{M}\mathbf{c}_0$ ：

$$\mathbf{c}(t) = \cos(Wt)\mathbf{c}_0 + \frac{\sin Wt}{W}\mathbf{M}\mathbf{c}_0. \quad (6.7)$$

从主轴 1 上的驻波出发， $\mathbf{c}_0 = (1, 0)$ ：

$$c_1 = \cos Wt + i\frac{\delta}{W}\sin Wt, \quad c_2 = -\frac{\beta}{W}\sin Wt.$$

要点：频率裂分的后果

1. **椭圆化**： c_1 出现虚部（此处 $\mathcal{E} = 1$ 守恒）， $\varepsilon = 2\text{Im}(c_1 c_2^*) = -\frac{2\beta\delta}{W^2}\sin^2 Wt$ ：驻波中混入了行波（正交分量），它与 MEMS 的正交误差同源。从主轴出发时 $|\varepsilon|_{\max} = 2\beta\delta/W^2$ ，在 $\delta = \beta$ 时最大（= 1）； $\delta \gg \beta$ 时只有 $\approx 2\beta/\delta$ 。
2. **锁定（钉扎）**： $|c_1|^2 - |c_2|^2 = \cos^2 Wt + \frac{\delta^2 - \beta^2}{W^2}\sin^2 Wt$ 。若 $\delta > \beta$ ，它恒为正， 2ψ 永远在 $(-90^\circ, 90^\circ)$ 内——从主轴出发的振型只能在主轴附近摆动，转不过去。 $\delta \gg \beta$ 时 $|c_2| \leq \beta/W \ll 1$ ， $2\psi \approx -\frac{\beta}{W}\sin 2Wt$ ，摆幅只有 $\psi \approx \beta/(2\delta)$ ：振型几乎就是主轴本征模，被钉在主轴上，既不明显椭圆化，也几乎不与另一主轴交换能量。
3. **偏离主轴出发**：若初始驻波与主轴成角 ψ_0 (q 平面角)，先看 $\beta \rightarrow 0$ ： $c_1 = e^{i\delta t}\cos\psi_0$, $c_2 = e^{-i\delta t}\sin\psi_0$, $\varepsilon = \sin 2\psi_0 \sin 2\delta t$ ——两主轴模式以频率差 2δ 拍，振型以周期 $\pi/\delta = 1/\Delta f$ 在驻波与行波之间转换（ $\psi_0 = 45^\circ$ ，即 $n = 2$ 时振型角 $\phi_0 = 22.5^\circ$ ， $|\varepsilon|$ 可达 1）。 $\beta \neq 0$ （仍有 $\delta > \beta$ ）时，把式 (6.7) 用于一般的 $\mathbf{c}_0$ 并逐时刻读出振型角（scripts/verify_offaxis.py 数值核对），结果分两种：若 $|\cos 2\psi_0| < \beta/\delta$ （初始方位落在两主轴正中 q 平面 45° 两侧约 $\pm\beta/(2\delta)$ 的窄带内），振型轴在两主轴之间阶梯状跳变、单调卷绕，平均速率 $W/n \approx \delta/n$ ，方向随 β 的符号，大小却与 β 无关——全角读出会给出一个完全错误的“进动速率”；否则振型绕较近的主轴来回摆动，没有净转动。两种情况都测不出真实转动。
4. **标度误差**： $\delta < \beta$ 时（从主轴出发）振型能转过去，但平均进动快于理想值（ q 平面方向角每 π/W 转过 π ，平均速率 $W > \beta$ ）。

对测地球自转的 HRG， β 只有 10^{-5}s^{-1} 量级，而 $\delta < \beta$ 要求频率裂分 $2\delta/2\pi$ 小于约 $5\mu\text{Hz}$ ——单靠加工做不到。实际做法是：先通过去除质量（修调）把频率裂分降到很小，再用电极施加反馈力把正交分量 ε 持续压到零（“正交控制”），从而把振型保持为驻波；残余的阻尼不对称则通过标定与补偿处理 [9, 29]。

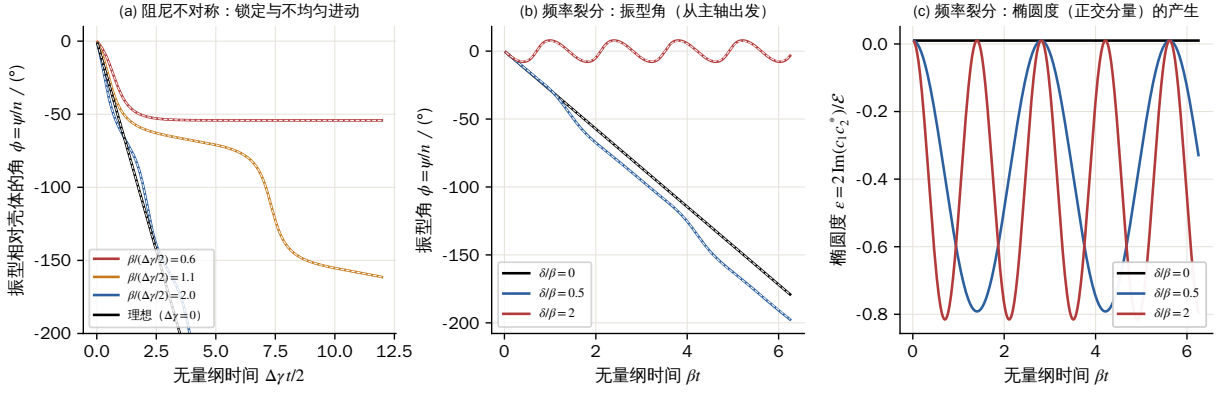


图 9 全角模式中的缺陷效应 ($n = 2$)。实线：完整二阶方程 (6.3) 的数值积分（经一个载波周期滑动平均解调）；白色细虚线：慢变方程的 Adler 方程数值解或解析解 (6.7)。(a) 阻尼不对称： $\beta < \Delta\gamma/2$ 时锁定（脚本核对终态满足 $\sin 2\psi = 2\beta/\Delta\gamma$ 且 $\cos 2\psi < 0$ ）； $\beta > \Delta\gamma/2$ 时阶梯状进动，平均速率核对式 (6.6)（相对误差 $< 10^{-4}$ ）。(b)(c) 频率裂分： $\delta/\beta = 2$ 时振型角被限制在 $\pm 22.5^\circ$ 内且椭圆度大； $\delta/\beta = 0.5$ 时振型转过过去但更快。完整方程与慢变解的振型角之差 < 0.002 rad。

交互演示：两模慢变方程 (6.4) 的实时积分：调节转动 β 、阻尼不对称 $\Delta\gamma$ 、频率半裂分 δ 与初始振型角 ϕ_0 (0° 与 45° 为主轴)，左图为 q 平面中的轨迹（驻波 = 直线，行波 = 圆），右图为振型角随时间的变化。试比较 $\delta > \beta$ 时：从主轴 ($\phi_0 = 0$) 出发振型被钉住 ($\delta \gg \beta$ ，如 $\beta = 0.05$ 、 $\delta = 1$ 时椭圆度才小)；从 $\phi_0 = 22.5^\circ$ 出发振型阶梯状卷绕，平均速率 W/n 而非 β/n ；从 $\phi_0 = 15^\circ$ 出发则来回摆动、无净转动。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 gyro-split）。

7 陀螺噪声的度量：Allan 方差

把一个静止的陀螺放在桌上记录输出：读数在某个“零偏”附近起伏，并缓慢漂移。导航关心的是：积分成角度后误差怎样增长？哪种噪声在什么时间尺度上主导？Allan 方差 (D. W. Allan 1966 年为原子钟提出 [31]，IEEE 将其写入陀螺测试标准 [24]) 回答了这些问题。

7.1 定义与计算方法

定义：Allan 方差

设陀螺输出 $\Omega(t)$ 以间隔 τ_0 采样。取平均时间 $\tau = r\tau_0$ （每段含 r 个采样点），把数据切成相邻的、长为 τ 的段，第 k 段的平均值为 $\bar{\Omega}_k(\tau)$ 。定义

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2} \left\langle (\bar{\Omega}_{k+1}(\tau) - \bar{\Omega}_k(\tau))^2 \right\rangle, \quad \sigma(\tau) \text{ 称为 Allan 偏差.} \quad (7.1)$$

实际计算（非重叠估计）：若共有 n_c 段， $\hat{\sigma}^2(\tau) = \frac{1}{2(n_c-1)} \sum_{k=1}^{n_c-1} (\bar{\Omega}_{k+1} - \bar{\Omega}_k)^2$ 。更有效的“重叠”估计先求累积角 $\vartheta_j = \tau_0 \sum_{i \leq j} \Omega_i$ ，再用 $\bar{\Omega}_k = (\vartheta_{k+r} - \vartheta_k)/\tau$ 让段的起点逐点滑动： $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2\tau^2(J-2r)} \sum_j (\vartheta_{j+2r} - 2\vartheta_{j+r} + \vartheta_j)^2$ ， J 为总采样点数。

注：为什么不用普通方差

(1) 常值零偏在差值中抵消，Allan 方差只反映“不稳定”的部分；(2) 对缓慢漂移类噪声，普通方差随记录长度不断增大、没有确定值，而相邻段之差只对时间尺度 $\sim \tau$ 的起伏敏感，结果收敛；(3) 改变 τ 就是在不同时间尺度上“扫描”噪声。线性漂移 $\Omega = R_d t$ 给出 $\bar{\Omega}_{k+1} - \bar{\Omega}_k = R_d \tau$ ， $\sigma = R_d \tau / \sqrt{2}$ (斜率 +1)。

7.2 三种噪声的特征斜率**推导：白噪声角速度（角随机游走）：斜率 $-1/2$**

设 $\langle \Omega_n(t) \Omega_n(t') \rangle = N^2 \delta(t - t')$ 。由式 (2.18)，每段平均值方差为 N^2/τ ；相邻两段互不相关，差值方差为 $2N^2/\tau$ 。由定义 (7.1)：

$$\sigma^2(\tau) = \frac{N^2}{\tau}, \quad \sigma(\tau = 1 \text{ s}) = N. \quad (7.2)$$

双对数图上斜率 $-1/2$ ，在 $\tau = 1 \text{ s}$ 处读出 N (σ 用 $^\circ/\text{h}$ ，则 N 的单位为 $^\circ/\text{h} \cdot \sqrt{\text{s}}$ ，除以 60 得 $^\circ/\sqrt{\text{h}}$)。

推导：速率随机游走：斜率 $+1/2$

设角速度本身作随机游走： $\Omega_n(t) = \int_0^t w \, dt'$ ， $\langle w(t)w(t') \rangle = K_{\text{rw}}^2 \delta(t - t')$ 。把相邻两段平均之差写成对 w 的加权积分：

$$\bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1 = \frac{1}{\tau} \int_\tau^{2\tau} \Omega_n \, dt - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Omega_n \, dt = \int_0^{2\tau} h(s) w(s) \, ds,$$

其中权函数 $h(s)$ 是时刻 s 的 w 对两段平均之差的贡献： $0 < s < \tau$ 时它进入第二段的全部 τ 和第一段的后 $(\tau - s)$ ， $h = \frac{\tau - (\tau - s)}{\tau} = \frac{s}{\tau}$ ； $\tau < s < 2\tau$ 时只进入第二段的后 $(2\tau - s)$ ， $h = \frac{2\tau - s}{\tau}$ 。由白噪声的性质， $\langle (\bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1)^2 \rangle = K_{\text{rw}}^2 \int_0^{2\tau} h^2 \, ds = K_{\text{rw}}^2 \left(\frac{\tau}{3} + \frac{\tau}{3} \right)$ ，故

$$\sigma^2(\tau) = \frac{K_{\text{rw}}^2 \tau}{3}, \quad \sigma(\tau = 3 \text{ s}) = K_{\text{rw}}. \quad (7.3)$$

定义：闪烁噪声 ($1/f$ 噪声)

用第 2.5 节的双边功率谱密度 $S(f)$ 描述（白噪声 $S = N^2$ ）。**闪烁噪声**指 $S(f) = \frac{B^2}{2\pi f}$ ：每个“倍频程” $[f, 2f]$ 贡献相同的方差 $\int_f^{2f} 2S \, df = \frac{B^2}{\pi} \ln 2$ ，没有特征时间尺度。陀螺中它来自电子器件与材料中大量弛豫时间分布很宽的缺陷过程，表现为零偏在各种时间尺度上的缓慢游荡。速率随机游走对应 $S = K_{\text{rw}}^2 / (2\pi f)^2$ （白噪声积分后，每个频率分量振幅除以 $2\pi f$ ）。

要点：零偏不稳定性：平台 $0.664B$

一般地（附录 E），

$$\sigma^2(\tau) = 4 \int_0^\infty S(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} \, df. \quad (7.4)$$

代入 $S = N^2$ 可复现式 (7.2)。代入闪烁噪声，令 $x = \pi f \tau$ ， τ 完全消去：

$$\sigma^2 = \frac{2B^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^3} dx = \frac{2 \ln 2}{\pi} B^2, \quad \sigma = 0.664 B. \quad (7.5)$$

Allan 偏差曲线出现与 τ 无关的平台，平台值除以 0.664 即零偏不稳定性 B 。（积分 $\int_0^\infty \sin^4 x / x^3 dx = \ln 2$ 的推导见附录 E。）

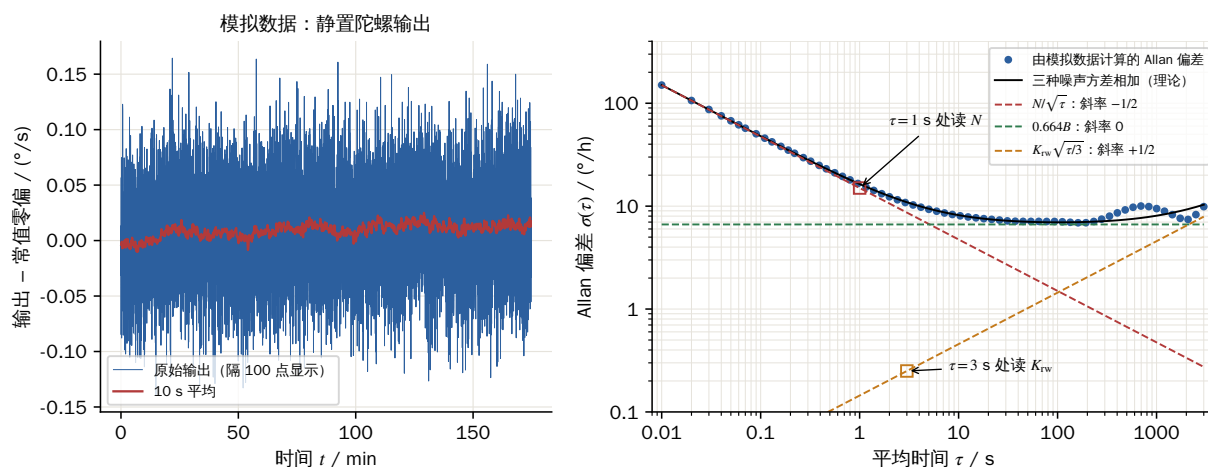


图 10 模拟数据 (scripts/gen_allan_data.py, 随机种子 43): 静置陀螺 100 Hz 采样约 2.9 h 的输出 (左) 及其重叠 Allan 偏差 (右)。真值 $N = 0.25^\circ/\sqrt{\text{h}}$, $B = 10^\circ/\text{h}$, $K_{\text{rw}} = 0.25^\circ/\text{h}/\sqrt{\text{s}}$ 。由 $\tau \leq 0.2 \text{ s}$ 段拟合得斜率 -0.494 、 $N = 0.257^\circ/\sqrt{\text{h}}$ ；最小值 $6.9^\circ/\text{h}$ 给出 $B = 10.4^\circ/\text{h}$ 。长 τ 端点数少、统计起伏大。

要点：读图规则与可信度

双对数 Allan 偏差图上：斜率 -1 为量化噪声（数字输出把累积角取整到最小量化单位所造成的误差）， $-1/2$ 为角随机游走（读 $\tau = 1 \text{ s}$ ）， 0 为零偏不稳定性（读最小值 $/0.664$ ）， $+1/2$ 为速率随机游走（读 $\tau = 3 \text{ s}$ ）， $+1$ 为速率斜坡 [24, 32]。几种噪声同时存在时方差相加，最小值处总会混入相邻噪声，故“最小值 $/0.664$ ”略高估 B 。估计值本身有统计误差：用 n_c 个不重叠段时， σ 的相对不确定度约为 $1/\sqrt{2(n_c - 1)}$ [32]； τ 接近记录长度的 $1/10$ 时，误差已达 25%。

交互演示：在浏览器中生成模拟陀螺数据（白噪声 + 闪烁噪声 + 速率随机游走），实时计算 Allan 偏差并画出双对数曲线；调节 N 、 B 、 K_{rw} ，观察三段斜率的出现与读数。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 gyro-allan）。

8 决赛风格例题

例题一：旋转酒杯的“拍”——重做 Bryan 1890 年的观察

1890 年 Bryan 报告：敲响一只绕自身竖直对称轴转动的酒杯，最低音“每转一圈约 2.4 拍”，并据此推断“波节的角速度约为杯体角速度的 $\frac{3}{5}$ ” [8]。把杯口附近的杯壁看作半径 R 的薄圆环，最低音为 $n = 2$ 振型，频率 $f_0 \approx 660 \text{ Hz}$ ；杯以恒定角速度 Ω ($\Omega \ll 2\pi f_0$) 转动。

1. 在随杯转动的参考系中，由式 (5.12) 写出 $z = q_1 + iq_2$ 的通解。证明杯壁径向位移 $u(\theta, t) =$

$\text{Re}[\bar{z}e^{in\theta}]$ ($\bar{z}$ 为 z 的复共轭), 并由此把 u 写成两个沿相反方向传播的行波之和, 求两行波在杯体系中的角频率。

2. 变换到实验室系 (实验室中的方位角 $\theta_L = \theta + \Omega t$), 求两行波在实验室系中的角频率及其差。
3. 实验室中固定一只紧靠杯壁的传声器, 其信号正比于正对它的杯壁的径向速度。证明信号的响度以频率 $f_{\text{beat}} = 2n(1-K)\Omega/2\pi$ 起伏; 再用“驻波振型在实验室中以 $(1-K)\Omega$ 转动”的图像独立地得到同一结果。
4. 由 Bryan 的“每转 2.4 拍”求 K , 与圆环理论比较, 并说明“波节角速度为杯体的 $\frac{3}{5}$ ”指的是哪个参考系中的角速度。若杯子是理想薄半球 ($K = 0.277$), 每转几拍? 为什么酒杯更接近圆环而不是半球?
5. 若把传声器粘在杯上随杯转动, 每转几拍?
6. 转台转速为 0.5 r/s 时, 实验室中的拍频是多少? 两行波的频率差与 f_0 之比是多少? 为什么这样小的频率差仍容易被听出来?

解答

(1) (2 分) 式 (5.12) 的通解 $z = e^{-i\beta t}(a_+e^{i\omega't} + a_-e^{-i\omega't})$, $\omega' = \sqrt{\omega_2^2 + \beta^2}$, $\beta = nK\Omega$ 。由式 (5.3), $u = q_1 \cos n\theta + q_2 \sin n\theta = \text{Re}[(q_1 - iq_2)(\cos n\theta + i \sin n\theta)] = \text{Re}[\bar{z}e^{in\theta}]$ 。代入:

$$u = \text{Re} \left[\bar{a}_+ e^{i[n\theta - (\omega' - \beta)t]} + \bar{a}_- e^{i[n\theta + (\omega' + \beta)t]} \right].$$

第一项的等相位面 $n\theta - (\omega' - \beta)t = \text{常数}$, 沿 $+\theta$ (与杯转动同向) 传播, 角频率 $\omega_{\text{co}} = \omega' - \beta$; 第二项沿 $-\theta$ 传播, $\omega_{\text{counter}} = \omega' + \beta$ 。两者差 $2\beta = 2nK\Omega$ 。

(2) (2 分) 把 $\theta = \theta_L - \Omega t$ 代入: 第一项相位 $n\theta_L - (\omega' - \beta + n\Omega)t$, 第二项 $n\theta_L + (\omega' + \beta - n\Omega)t$ 。实验室角频率 $\omega_{\text{co,L}} = \omega' - \beta + n\Omega$, $\omega_{\text{counter,L}} = \omega' + \beta - n\Omega$, 差

$$\omega_{\text{co,L}} - \omega_{\text{counter,L}} = 2n\Omega - 2\beta = 2n(1-K)\Omega.$$

(转动系 $\rightarrow$ 实验室系相当于“多普勒频移” $\pm n\Omega$, 它与科里奥利劈裂 $\mp \beta$ 部分抵消。)

(3) (3 分) 传声器在固定的 θ_L 处, 接收两个频率 $\omega_{\text{co,L}}$ 、 $\omega_{\text{counter,L}}$ 的振动 (初始为驻波时 $|a_+| = |a_-|$)。两个等幅、频率相近的振动叠加, 合振动的振幅按 $|\cos[(\omega_{\text{co,L}} - \omega_{\text{counter,L}})t/2 + \text{常数}]|$ 起伏, 响度 (振幅平方) 的起伏频率为两频率之差: $f_{\text{beat}} = 2n(1-K)\Omega/2\pi$ 。驻波图像: 由式 (5.13), 振型 (波腹) 在实验室中以 $\dot{\phi}_I = (1-K)\Omega$ 转动; 固定点的振幅 $\propto |\cos n(\theta_L - \phi_I)|$, 响度 $\propto \cos^2 n(\theta_L - \phi_I)$, 后者对 ϕ_I 的周期为 π/n 。 ϕ_I 每增加 2π 响度起伏 $2n$ 次 ($2n$ 个波腹依次扫过传声器), 所以 $f_{\text{beat}} = 2n\dot{\phi}_I/2\pi$, 与上面一致。

(4) (2 分) 杯每转一圈用时 $2\pi/\Omega$, 拍数 $= f_{\text{beat}} \cdot 2\pi/\Omega = 2n(1-K)$ 。令其等于 2.4, $n = 2$: $K = 1 - 2.4/4 = 0.4$, 与圆环 (长圆柱) 极限 $2/(n^2 + 1) = 0.4$ 一致。“波节角速度为杯体的 $\frac{3}{5}$ ”指实验室 (惯性) 系中的振型转速 $(1-K)\Omega = 0.6\Omega$ 。理想半球: $4 \times (1 - 0.277) = 2.89$ 拍/圈。半球的振动中有大量竖直运动 (以及碗底附近的运动), 它们增加模态质量却不参与科里奥利耦合, 于是 K 降低、拍数增多 (例题四定量证明: 任何不可伸长的轴对称壳都有 $K \leq 0.4$, 拍

数 ≥ 2.4)。酒杯的振动集中在近乎竖直、接近圆柱的杯壁上, 竖直运动很小, 所以接近圆环值; Bryan 的另一只香槟杯 2.6 拍/转则说明它的竖直运动不可忽略。

(5) (1 分) 随杯转动的传声器看到振型以 $-K\Omega$ 转 (相对杯体), 拍数 $= 2nK = 1.6$ 拍/圈。也可直接由 (1) 的杯体系频差 $2\beta = 2nK\Omega$ 得到。

(6) (2 分) $\Omega = 2\pi \times 0.5 \text{ s}^{-1}$: $f_{\text{beat}} = 2.4 \times 0.5 = 1.2 \text{ Hz}$; 两行波频差与 f_0 之比 $1.2/660 = 1.8 \times 10^{-3}$ 。0.2% 的音高差接近或低于人耳在此频段的音高辨别阈 (约 0.2%–0.5%), 很难直接听出; 但两个等幅、频差 1.2 Hz 的声音叠加会产生每秒 1.2 次的响度起伏 (拍), 慢速的响度变化非常容易察觉——Bryan 正是“听拍”而非“听音高”。

例题二：手机 MEMS 陀螺的参数估算

某 MEMS 陀螺的检测质量 $m = 2.0 \mu\text{g}$, 驱动模态频率 $f_d = 20.0 \text{ kHz}$, 驱动振幅 (闭环稳定) $X_0 = 5.0 \mu\text{m}$; 检测模态 $Q = 5000$, 比驱动模态高 $\Delta f = 200 \text{ Hz}$ (故意失配); 检测电容为平行板, 静止间隙 $g_0 = 2.0 \mu\text{m}$, 电容 $C_0 = 0.50 \text{ pF}$; 温度 $T = 300 \text{ K}$ 。(参数为示意, 量级参考文献 [13, 33]。)

1. 角速度 $\Omega = 1^\circ/\text{s}$ 时, 科里奥利力的幅度是多少? 与质量块重力相比如何?
2. 求检测振幅 Y 。若改为模态匹配 ($\Delta f = 0$), Y 变为多少?
3. 设角速度按 $\Omega(t) = \Omega_0 \cos \nu t$ 变化。从式 (4.6) 出发, 推导同相解调输出的频率响应 $H(\nu)$ (式 (4.7)), 并对本例求: 匹配时的 -3 dB 带宽; 失配时谐振峰的位置与高度, 以及增益保持在 $\pm 3 \text{ dB}$ 内的平坦带宽。为什么消费级器件常选失配? 失配器件的读出电路必须加什么?
4. 失配情形下检测电容的变化 ΔC 是多少? 若极板间加 1 V 偏压, 对应多少个电子电荷的变化?
5. 求机械热噪声极限下的角随机游走 N (以 $^\circ/\sqrt{\text{h}}$ 表示)。与 Bosch BMI270 数据手册的噪声密度 $0.007 (^\circ/\text{s})/\sqrt{\text{Hz}}$ [15] 比较, 实际器件主要受什么限制?
6. 检验第 4.1 节舍去离心项的合理性: 量程上限 $2000^\circ/\text{s}$ 时 $(\Omega/\omega_d)^2$ 是多少?
7. 若弹簧耦合使 $k_{xy}/k = 1.0 \times 10^{-4}$, 正交误差折合多大的“假角速度”? 要使解调相位误差引起的零偏小于 $0.01^\circ/\text{s}$, 相位误差须小于多少?
8. **电子学噪声与模态匹配。** 电容读出电路把检测位移测成 $y + x_n(t)$, x_n 是强度为 S_x 的白噪声 ($\langle x_n(t)x_n(t') \rangle = S_x \delta(t - t')$, $\sqrt{S_x} = 1.0 \times 10^{-13} \text{ m} \cdot \text{s}^{1/2}$)。仿照第 4.4 节的四步推导, 求它造成的角随机游走 N_e , 并分别对失配与匹配情形求值。由此说明第 4.4 节要点 (1) 的含义: 模态匹配不改变机械热噪声极限, 却能把电子学噪声的贡献压低。

解答

记 $\omega_d = 2\pi f_d = 1.257 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$, $\Omega = 1^\circ/\text{s} = 1.745 \times 10^{-2} \text{ rad/s}$ 。

(1) (1 分)

$$\begin{aligned}
 F_C &= 2m\Omega X_0 \omega_d \\
 &= 2 \times 2.0 \times 10^{-9} \times 1.745 \times 10^{-2} \\
 &\quad \times 5.0 \times 10^{-6} \times 1.257 \times 10^5 \text{ N} \\
 &= 4.4 \times 10^{-11} \text{ N}
 \end{aligned}$$

(44 pN), 约为重力 $mg = 2.0 \times 10^{-8} \text{ N}$ 的 2×10^{-3} 。

(2) (2 分) $\Delta\omega = 2\pi \times 200 = 1257 \text{ s}^{-1}$, $\omega_d/2Q = 12.6 \text{ s}^{-1} \ll \Delta\omega$, 由式 (4.4): $Y \approx \Omega X_0/\Delta\omega = 6.9 \times 10^{-11} \text{ m} = 0.069 \text{ nm}$ (用精确式得 0.0691 nm , 差 0.5%)。匹配: $Y = 2Q\Omega X_0/\omega_d = 6.9 \times 10^{-9} \text{ m} = 6.9 \text{ nm}$, 大 100 倍。

(3) (5 分) 推导要点 (评分点): (i) 把 $\cos \nu t$ 拆成 $e^{\pm i\nu t}$, 对线性方程 $\dot{A} = -pA - X_0\Omega$ 分别求特解 $A = -X_0\Omega_0 e^{\pm i\nu t}/[2(p \pm i\nu)]$; (ii) 解调输出是线性投影 $D = \text{Re}[Ae^{-i\alpha_{\text{ref}}}]$, $e^{-i\alpha_{\text{ref}}} = -p/|p|$; (iii) 用 $\text{Re } z = \text{Re } z^*$ 合并, 得式 (4.7)。数值: $\tau_r = 2Q/\omega_d = 0.080 \text{ s}$ 。匹配: $H = 1/(1 + i\nu\tau_r)$, 带宽 $f_d/2Q = 2 \text{ Hz}$ ——手机需要几十到几百赫兹, 太慢。失配: $\Delta\omega\tau_r = 100 \gg 1$, 谐振峰在 $\nu = \Delta\omega$ (200 Hz), 高 $\Delta\omega\tau_r/2 = 50$; 由式 (4.8), 平坦带宽 $0.54\Delta f \approx 108 \text{ Hz}$ (verify_examples.py 数值求得 108 Hz、峰高 50.0)。所以失配换来约 100 Hz 的可用带宽, 且灵敏度 $\approx X_0/\Delta\omega$ 对随温度、封装气压变化的 Q 不敏感; 代价是直流灵敏度降低 100 倍, 并且读出电路必须加截止频率低于 Δf 的低通滤波器, 压掉 200 Hz 处的谐振峰 (否则 200 Hz 附近的振动会被放大 50 倍)。两种情形 $S\omega_{\text{bw}}$ 分别为 X_0 与 $0.54X_0$, 符合量级关系 (4.9)。

(4) (2 分) 平行板 $C = \varepsilon_0 A_p/g$ (A_p 为极板面积), 小位移 $\Delta C/C_0 = Y/g_0$:

$$\begin{aligned}
 \Delta C &= 0.50 \text{ pF} \times \frac{6.9 \times 10^{-11}}{2.0 \times 10^{-6}} \\
 &= 1.7 \times 10^{-17} \text{ F (17 aF)}.
 \end{aligned}$$

1 V 下电荷变化 $\Delta q = 1.7 \times 10^{-17} \text{ C}$, 约 **110 个电子**。检测电路要在 20 kHz 载波上分辨百个电子量级的电荷——这是 MEMS 陀螺电子学的核心难点。

(5) (3 分) 由式 (4.10):

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{1}{5.0 \times 10^{-6}} \\
 &\quad \times \sqrt{\frac{1.38 \times 10^{-23} \times 300}{2.0 \times 10^{-9} \times 1.257 \times 10^5 \times 5000}} \text{ s}^{-1/2} \\
 &= 1.15 \times 10^{-5} \text{ rad}/\sqrt{\text{s}} \\
 &= 6.6 \times 10^{-4}^\circ/\sqrt{\text{s}} = 0.039^\circ/\sqrt{\text{h}}.
 \end{aligned}$$

BMI270 的 $0.007^\circ/\text{s}/\sqrt{\text{Hz}}$ 按双边约定对应 $0.42^\circ/\sqrt{\text{h}}$ (若按单边约定则为 $0.30^\circ/\sqrt{\text{h}}$, 见第 2.5 节), 比本例的机械热噪声极限大约 10 倍: 实际器件主要受读出电子学噪声 (电荷放大器噪声、寄生电容) 以及更小的质量/驱动振幅限制。注意 N 与 Δf 无关 (第 4.4 节要点)。

(6) (1 分) $2000^\circ/\text{s} = 34.9 \text{ rad/s}$, $(\Omega/\omega_d)^2 = 7.7 \times 10^{-8}$, 可略。

(7) (2 分) 正交力与 $1^\circ/\text{s}$ 科里奥利力之比为 $\frac{k_{xy}}{k} \frac{\omega_d}{2\Omega} = 360$, 即正交误差相当于 $\Omega_q = \frac{k_{xy}}{k} \frac{\omega_d}{2} = 6.3 \text{ rad/s} = 360^\circ/\text{s}$ 的假信号 (但相位差 90°)。解调相位误差 θ_e 使其中 $\sin \theta_e \approx \theta_e$ 的部分混入速率通道: $\theta_e \Omega_q < 0.01^\circ/\text{s}$ 要求 $\theta_e < 2.8 \times 10^{-5} \text{ rad}$ 。实际器件因此还要用静电力主动抵消正交误差。

(8) (4 分) 四步照搬: (i) 解调值

$$\hat{y}_s = \frac{2}{T_m} \int_0^{T_m} (y + x_n) \sin(\omega_d t + \alpha') dt,$$

信号部分等于检测振幅 $Y = S\Omega = X_0\Omega/|p|$; (ii) 噪声部分方差 $\frac{4}{T_m^2} \iint \sin \sin S_x \delta = \frac{2S_x}{T_m}$; (iii) 折算为角速度: $\langle \Omega_n^2 \rangle = \frac{2S_x}{T_m} \frac{|p|^2}{X_0^2}$; (iv) 与 N_e^2/T_m 对照:

$$N_e = \frac{\sqrt{2S_x} |p|}{X_0}.$$

与热噪声不同, $N_e \propto |p|$: 位移噪声不经过机械共振放大, 而信号经过。失配 $|p| \approx \Delta\omega = 1257 \text{ s}^{-1}$:

$$\begin{aligned} N_e &= \frac{1.41 \times 10^{-13} \times 1257}{5.0 \times 10^{-6}} \text{ s}^{-1/2} \\ &= 3.6 \times 10^{-5} \text{ rad}/\sqrt{\text{s}} = 0.12^\circ/\sqrt{\text{h}}, \end{aligned}$$

是热噪声极限 (0.039) 的 3 倍, 器件受电子学限制。匹配 $|p| = 1/\tau_r = 12.6 \text{ s}^{-1}$: $N_e = 0.0012^\circ/\sqrt{\text{h}}$, 降低 100 倍, 总噪声由热噪声主导。这就是高端器件追求模态匹配的原因。

例题三: 半球谐振陀螺的全角模式——在广州“看见”地球自转

一只 $n = 2$ 工作的半球谐振陀螺: $K = 0.277$, $f_0 = 5.0 \text{ kHz}$, $Q = 1.0 \times 10^7$, 敏感轴竖直, 放在广州 ($\lambda = 23.13^\circ$), 工作于全角模式, 电路补偿了平均损耗。

1. 求衰荡时间 τ_r 。若不补偿能量, 敲一下后大约能“自由进动”多久?
2. 地球自转使振型相对壳体以多大角速度转动? 1 小时转过多少度?
3. 设两主轴的衰荡时间为 $\tau_{r,1} = 640 \text{ s}$, $\tau_{r,2} = 630 \text{ s}$ (相差 1.6%)。振型会被锁定吗? 平均进动率是理想值的几分之几? 与振型方位有关的瞬时漂移折合的输入角速度误差幅度多大?
4. 若要求这一误差小于 $0.01^\circ/\text{h}$ (导航级), 两主轴衰荡时间的相对差 $\Delta\tau_r/\tau_r$ 须小于多少?
5. 若两主轴频率相差 $\Delta f = 2\delta/2\pi = 1 \text{ mHz}$, 且没有正交控制, 从主轴出发的振型能否测出地球自转? 为使 $\delta < \beta$, Δf 需小于多少? 由此说明正交控制的必要性。
6. 说明: 全角模式下, 即使壳体的转速时快时慢, 只要不锁定, 振型相对壳体转过的总角度只取决于壳体转过的总角度。

解答

(1) (1 分) $\tau_r = 2Q/\omega_0 = 2 \times 10^7/(2\pi \times 5000) = 637 \text{ s}$, 约 10 分钟; 能量按 e^{-2t/τ_r} 衰减, 自由工作约数十分钟后信号太弱, 故需能量补充。

(2) (2 分)

$$\begin{aligned} \Omega_z &= \Omega_E \sin \lambda = 7.292 \times 10^{-5} \times 0.393 \text{ rad/s} \\ &= 2.86 \times 10^{-5} \text{ rad/s} = 5.91^\circ/\text{h}. \end{aligned}$$

振型相对壳体: $K\Omega_z = 1.64^\circ/\text{h}$ (方向与地球自转相反, 即从上往下看顺时针), 1 小时转 1.64° 。

(3) (4 分)

$$\begin{aligned}
 \beta &= nK\Omega_z = 2 \times 0.277 \times 2.86 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} \\
 &= 1.59 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}, \\
 |\Delta\gamma| &= \left| \frac{1}{640} - \frac{1}{630} \right| \text{ s}^{-1} \\
 &= 2.48 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1},
 \end{aligned}$$

阈值 $|\Delta\gamma|/2 = 1.24 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} < \beta$: 不锁定, 但很接近。由式 (6.6), 平均进动率 $/\beta = \sqrt{1 - (\Delta\gamma/2\beta)^2} = 0.62$ ——测得的地球自转偏小 38%! 瞬时漂移项 $\frac{\Delta\gamma}{2} \sin 2\psi$ 折合振型角速度 $\frac{\Delta\gamma}{2n} \sin 2\psi$, 幅度 $1.28^\circ/\text{h}$, 再除以 K 折合输入角速度误差幅度 $\Delta\gamma/(2nK) = 4.6^\circ/\text{h}$, 与被测信号同量级。

(4) (2 分) 要求 $|\Delta\gamma|/(2nK) < 0.01^\circ/\text{h} = 4.85 \times 10^{-8} \text{ rad/s}$, 得 $|\Delta\gamma| < 5.4 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ 。由 $\Delta\gamma = |1/\tau_1 - 1/\tau_2| \approx \Delta\tau_r/\tau_r^2$, $\Delta\tau_r/\tau_r < 5.4 \times 10^{-8} \times 637 = 3.4 \times 10^{-5}$ 。如此苛刻的阻尼均匀性很难只靠加工保证, 实际 HRG 还要标定这一与振型角有关的漂移并在电路中补偿。

(5) (2 分) $\delta = \pi\Delta f = 3.1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $\delta/\beta \approx 200 \gg 1$: 由第 6.4 节, 从主轴出发的振型被钉在主轴上: q 平面摆幅 $\beta/2\delta \approx 2.5 \times 10^{-3} \text{ rad}$, 即振型角摆幅 $\beta/(2n\delta) \approx 0.07^\circ$, 椭圆度至多 $2\beta\delta/W^2 \approx 2\beta/\delta \approx 1\%$ ——振型静止不动, 完全看不到地球自转 (本应 1 小时转 1.64°)。若恰从两主轴正中 (振型角 22.5° 两侧约 $\pm\beta/(2n\delta) \approx \pm 0.07^\circ$ 的窄带内) 出发, 振型阶梯状单调卷绕, 读出的平均进动 $W/n \approx \delta/n = 1.6 \times 10^{-3} \text{ rad/s} \approx 320^\circ/\text{h}$, 是真实值 $1.64^\circ/\text{h}$ 的 $\delta/\beta \approx 200$ 倍 (方向倒是的); 从其他方位出发则绕较近的主轴来回摆动 (周期约 $1/\Delta f = 1000 \text{ s}$), 没有净转动。总之都测不出地球自转。 $\delta < \beta$ 要求 $\Delta f < 2\beta/2\pi = 5 \mu\text{Hz}$, 即相对裂分 10^{-9} ——不可能单靠加工做到。正交控制持续把 ε 压到零, 等效地消除了 δ 的一阶效应, 使振型保持驻波并自由进动。

(6) (1 分) 不锁定、无缺陷时, $\dot{\phi} = -K\Omega(t)$, 积分得 $\phi(t) - \phi(0) = -K[\Theta(t) - \Theta(0)]$, 与 $\Omega(t)$ 的具体变化无关——全角模式是“速率积分”陀螺, 直接测角度, 标度因数为几何常数 K 。

例题四: Bryan 因子的分步推导——从酒杯到半球

第 5.3 节只算了圆环。本题对一般的薄轴对称壳 (酒杯、钟、半球) 一步步推出 Bryan 因子, 并解释 Bryan 1890 年的香槟杯数据。

壳以恒定角速度 Ω ($\Omega \ll \omega_n$) 绕对称轴 z 转动。在随壳转动的柱坐标 (ρ, θ, z) 中, 中面上的材料点用母线弧长 s 与方位角 θ 标记, 其静止位置为 $\mathbf{r}_0 = \rho_0(s)\mathbf{e}_\rho + z_0(s)\mathbf{z}$, 面质量密度为 σ , 质元 $dm = \sigma\rho_0 ds d\theta$, 记 $d\tilde{m} \equiv \sigma\rho_0 ds$ 。第 n 阶两个简并振型的位移 (依次为水平径向、周向、竖直分量) 为

$$\mathbf{d} = q_1(U \cos n\theta, V_\theta \sin n\theta, Z \cos n\theta) + q_2(U \sin n\theta, -V_\theta \cos n\theta, Z \sin n\theta),$$

U, V_θ, Z 是 s 的函数。

1. **纬线圆不伸长**。高度为 $z_0(s)$ 的一条纬线圆, 静止半径为 ρ_0 。仿照式 (5.1) 的推导, 求变形后这条纬线上一小段弧的相对伸长 ε_θ 。说明为什么竖直位移在一阶下不改变纬线长度, 并由 $\varepsilon_\theta = 0$ 证明 $V_\theta = -U/n$ 。
2. **陀螺耦合只来自水平运动**。写出材料点在惯性系中的速度, 证明动能中对 Ω 一次的部分为 $T_1 = \Omega \int \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{d} \times \dot{\mathbf{d}}) dm + (\text{全导数})$, 并说明竖直分量 Z 不出现在 T_1 中。

3. **模态质量与陀螺系数**。对 θ 积分, 求 $T_0 = \frac{M}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$ 与 $T_1 = G(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1)$ 中的 M 、 G (用 $\int \dots d\tilde{m}$ 表示), 再由式 (2.16)–(5.13) 的同样步骤写出 K 。

4. **竖直运动是“死质量”**。定义 $\zeta^2 \equiv \int Z^2 d\tilde{m} / \int U^2 d\tilde{m}$ 。利用第 1 问证明

$$K = \frac{2}{n^2 + 1 + n^2 \zeta^2} \leq \frac{2}{n^2 + 1},$$

并说明等号成立的条件。由此证明: 不可伸长轴对称壳的 $n = 2$ 振型每转拍数 ≥ 2.4 。

5. **半球**。由附录 C 的瑞利振型 (C.1) 求 U 、 Z (χ 为从碗底极点量起的余纬, $d\tilde{m} \propto \sin \chi d\chi$)。已知 $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^3 \chi \tan^4 \frac{\chi}{2} d\chi = 0.2118$, $I_2 = \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \cos \chi)^2 \sin \chi \tan^4 \frac{\chi}{2} d\chi = 0.4704$, 求 $n = 2$ 时的 ζ 与 K , 并与式 (5.15) 比较。

6. **Bryan 的香槟杯**。两只香槟杯分别测得每转约 2.6 与 2.2 拍。各自推出 K 与 ζ ; 2.2 拍说明什么?

7. **两个极限与一个推广**。(a) Bryan 指出: 绕垂直于板面的轴转动的圆板做横向 (垂直板面) 弯曲振动时, 每转拍数为 $2n$ 。用本题的结论解释。(b) 在壳体上沿圆环 (第 5 节) 外缘固定一圈径向导轨, 每条导轨里有一个小质量块 (总线密度 μ_s), 只能沿径向运动, 由环推动; 块与环之间可无摩擦地切向相对滑动, 所以块不随环材料作切向位移 v , 只有径向位移 u 。求新的 K 。若质量块直接粘在环上 (随环材料一起运动), K 又是多少?

解答

(1) (3 分) 纬线上一小段弧, 静止长 $\rho_0 d\theta$ 。变形后: 水平径向外移 d_ρ 使所在圆的半径变为 $\rho_0 + d_\rho$, 长度增加 $d_\rho d\theta$; 周向位移不均匀使弧被拉长 $\frac{\partial d_\theta}{\partial \theta} d\theta$ 。竖直位移 d_z 只把这段弧整体抬高, 弧长变化是 $(\partial d_z / \partial \theta)^2$ 的二阶量。故

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{\rho_0} \left(d_\rho + \frac{\partial d_\theta}{\partial \theta} \right),$$

与圆环的式 (5.1) 同形。对 q_1 振型, $d_\rho + \partial d_\theta / \partial \theta = q_1(U + nV) \cos n\theta = 0$ 对一切 θ 成立, 故 $V_\theta = -U/n$ (q_2 振型给出同一条件)。

(2) (3 分) 由式 (2.3), 惯性系速度 $\mathbf{v}_S = \dot{\mathbf{d}} + \Omega \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r}_0 + \mathbf{d})$ 。动能中对 Ω 一次的项为

$$\Omega \int \dot{\mathbf{d}} \cdot [\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r}_0 + \mathbf{d})] dm.$$

其中 $\dot{\mathbf{d}} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}_0) = \frac{d}{dt} [\mathbf{d} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}_0)]$ 是全导数, 不影响运动方程 (对 $n \geq 1$ 的振型它对 θ 的积分还恒为零)。剩下 $\dot{\mathbf{d}} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{d}) = \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{d} \times \dot{\mathbf{d}}) = d_\rho \dot{d}_\theta - d_\theta \dot{d}_\rho$ 。 $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = 0$, 所以 Z 不出现。物理上, 竖直速度与 Ω 平行, 科里奥利力 $-2m\Omega \times \mathbf{v}'$ 对它为零。

(3) (4 分) 用 $\int_0^{2\pi} \cos^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 = \pi$ 、交叉项为零:

$$T_0 = \frac{\pi}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \int (U^2 + V_\theta^2 + Z^2) d\tilde{m} \Rightarrow M = \pi \int (U^2 + V_\theta^2 + Z^2) d\tilde{m}.$$

$d_\rho \dot{d}_\theta - d_\theta \dot{d}_\rho$ 对 θ 积分 ($\cos$ 、 $\sin$ 均指 $n\theta$ 的函数):

$$\int_0^{2\pi} (q_1 U \cos + q_2 U \sin)(\dot{q}_1 V_\theta \sin - \dot{q}_2 V_\theta \cos) d\theta = -\pi U V_\theta (q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1),$$

$$\int_0^{2\pi} (q_1 V_\theta \sin - q_2 V_\theta \cos)(\dot{q}_1 U \cos + \dot{q}_2 U \sin) d\theta = +\pi U V_\theta (q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1),$$

两者相减得 $-2\pi U V_\theta (q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1)$, 故 $G = -2\pi \Omega \int U V_\theta d\tilde{m}$ 。方程与式 (5.10) 同形, $\beta = G/M$, 振型相对壳体转速 $-\beta/n \equiv -K\Omega$:

$$K = -\frac{2}{n} \frac{\int U V_\theta d\tilde{m}}{\int (U^2 + V_\theta^2 + Z^2) d\tilde{m}}$$

即正文式 (5.14)。检验: 圆环 $U = 1$, $V_\theta = -1/n$, $Z = 0$ 给出 $2/(n^2 + 1)$ 。

(4) (3 分) 代入 $V_\theta = -U/n$: 分子 $-\frac{2}{n} \cdot (-\frac{1}{n}) \int U^2 = \frac{2}{n^2} \int U^2$; 分母 $(1 + \frac{1}{n^2}) \int U^2 + \int Z^2$ 。分子分母同除以 $\int U^2/n^2$, 即得 $K = 2/(n^2 + 1 + n^2 \zeta^2)$ 。 $\zeta^2 \geq 0$, 故 $K \leq 2/(n^2 + 1)$, 当且仅当处处 $Z = 0$ (只有水平运动, 如长圆柱) 时取等号。 $n = 2$ 时 $K \leq 0.4$, 每转拍数 $2n(1 - K) \geq 2.4$ 。 竖直运动和切向运动一样贡献动能 (惯性), 却不贡献陀螺耦合, 相当于 “死质量”。

(5) (3 分) 由式 (C.1), $U = u_\chi \cos \chi + w \sin \chi = -n \sin \chi \tan^n \frac{\chi}{2}$, 取 z 轴向上 (碗口朝上), $Z = u_\chi \sin \chi - w \cos \chi = (1 + n \cos \chi) \tan^n \frac{\chi}{2}$ (Z 的符号约定不影响结果, 因为只有 Z^2 出现), 并验证 $V_\theta = \sin \chi \tan^n \frac{\chi}{2} = -U/n$ 。 $n = 2$: $\int U^2 d\tilde{m} \propto 4I_1$, $\int Z^2 d\tilde{m} \propto I_2$, 所以 $n^2 \zeta^2 = I_2/I_1 = 2.22$, $\zeta = 0.745$,

$$K = \frac{2}{5 + 2.22} = 0.277,$$

与式 (5.15) 一致: 半球的竖直运动幅度约为水平径向的 $3/4$ 。

(6) (2 分) 每转 $2n(1 - K)$ 拍。2.6 拍: $K = 1 - 2.6/4 = 0.35$, $n^2 \zeta^2 = 2/K - 5 = 0.71$, $\zeta = 0.42$ ——介于圆柱与半球之间, 合理。2.2 拍: $K = 0.45 > 0.4$, 要求 $\zeta^2 < 0$, 不可能: 它不能用不可伸长振型解释。Bryan 本人的结论正是 “与理论不相容”, 并推测杯口附近不满足不可伸长条件 [8]。

(7) (2 分) (a) 圆板横向振动只有竖直位移, $U = V_\theta = 0$, 相当于 $\zeta \rightarrow \infty$, $K = 0$: 振型完全随板转动, 固定点听到的拍数就是 $2n$ 个波腹扫过的次数 $2n$ 。(b) 滑块只有径向速度 $\dot{u}$ 与随环转动的 $\Omega(R + u)$, 其动能中没有对 Ω 一次的耦合项; 它只使模态质量增加 $\pi \mu_s R$, G 不变:

$$K = \frac{G}{nM\Omega} = \frac{2\pi\mu R\Omega/n}{n\Omega[\pi\mu R(1 + 1/n^2) + \pi\mu_s R]} = \frac{2}{n^2 + 1 + n^2\mu_s/\mu},$$

与 (4) 同形 ($\zeta^2 \rightarrow \mu_s/\mu$)。例如 $\mu_s/\mu = 0.5$ 时 $K = 0.286$ 。若质量块粘在环上, 它与环材料有同样的 u 、 v , 只是线密度变为 $\mu + \mu_s$, M 与 G 按同一比例增大, $K = 2/(n^2 + 1)$ 不变。设计振动陀螺时, 凡是不参与 “水平径向-周向” 耦合的运动质量都会降低 K 。

9 实验与数据处理：振动陀螺的标定与噪声评估

本节是一道笔试型实验题, 分两部分, 数据见表 4 与表 5。

表 4 振型相对碗体的转角 φ_{rel} 与碗体转角 Θ (模拟数据)

$\Theta/(^\circ)$	$\varphi_{\text{rel}}/(^\circ)$	$\Theta/(^\circ)$	$\varphi_{\text{rel}}/(^\circ)$
-180	56.1	30	-7.9
-150	46.3	60	-18.9
-120	37.8	90	-27.8
-90	26.6	120	-35.8
-60	18.0	150	-43.5
-30	8.9	180	-53.3
0	-0.1		

表 5 静置陀螺输出的 Allan 偏差 (模拟数据)

τ/s	$\sigma/(^\circ/\text{h})$	τ/s	$\sigma/(^\circ/\text{h})$	τ/s	$\sigma/(^\circ/\text{h})$
0.01	150.2	1	16.31	100	7.09
0.02	106.3	2	12.33	200	6.92
0.05	67.55	5	9.32	500	9.31
0.1	47.95	10	8.10	1000	9.47
0.2	34.18	20	7.48	2000	7.42
0.5	22.21	50	7.10		

练习：笔试型实验题 (约 60 分钟)

说明：下列两组数据均为按物理模型加噪声生成的**模拟数据**（生成代码与随机种子见 `scripts/exp_bowl.py`、`scripts/gen_allan_data.py`）。

第一部分：旋转金属碗的 Bryan 因子。一只不锈钢碗固定在精密转台上（转角读数误差可忽略），碗口 0° 与 45° 处各粘一个压电拾振片。两路信号经锁相解调（即相敏解调，第 4.2 节）每 10 ms 给出一组 c_1, c_2 。由式 (6.2)， $4\varphi_{\text{rel}} = \text{atan2}(2 \text{Re}(c_1 c_2^*), |c_1|^2 - |c_2|^2)$ 。这里 $\text{atan2}(y, x)$ 是按 x, y 两分量的符号确定象限的反正切（即点 (x, y) 的极角）。它的值域只有 $(-180^\circ, 180^\circ]$ ，即 φ_{rel} 只能在 $\pm 45^\circ$ 内唯一确定（ $n = 2$ 振型以 90° 为周期），所以程序在转动过程中连续跟踪并做相位展开：相邻两次读数的 4φ 若跳变超过 180° ，就加减 360° 。每次测量：在 0° 拾振片处敲击（使振型初始方位 ≈ 0 ），在 3 s 内让转台匀速转过 Θ 后停下，读停转时刻展开后的 φ_{rel} 。碗的 $n = 2$ 振型频率约 700 Hz，振幅衰荡时间约 8 s；碗经修调，两个 $n = 2$ 振型的频率差 $\Delta f \approx 0.005$ Hz。（它不能靠“听拍”测：拍周期 $1/\Delta f = 200$ s 远长于衰荡时间 8 s，且每个模式的线宽 $1/(\pi\tau_{\text{T}}) \approx 0.04$ Hz 是裂分的 8 倍。实际做法是静止时在两主轴之间——振型角 22.5° ——处敲击，由第 6.4 节，椭圆度按 $\varepsilon = \sin 2\delta t \approx 2\delta t$ 增长，8 s 内增到约 0.25，由其初始斜率拟合出 δ 。）结果见表 4。

- **A1** 说明为什么转动必须在几秒内完成，以及为什么碗转得快慢不影响 φ_{rel} （只要不太慢）。

- **A2** 用第 6.4 节的结论估算：(a) 为使本实验中转得最慢的那次测量不被频率裂分“钉住”，碗的两振型频率差 Δf 至少要小于多少（必要条件，数量级）？（ K 可先取 0.3。）(b) 要使裂分引起的读数偏差远小于读数本身，条件应收紧到什么程度？本实验的碗是否满足？(c) 停转后应在多长时间内读数？
- **A3** 以 $\varphi_{\text{rel}} = a + b\Theta$ 作最小二乘拟合，写出 a 、 b 及其标准不确定度的计算公式并求值，给出 $K \pm \sigma_K$ 。
- **A4** 将结果与圆环（0.4）、理想半球（0.277）比较，从碗的形状加以解释。
- **A5** 列举至少三项可能的系统误差及改进办法。

第二部分：静置陀螺的 Allan 偏差。 某手机陀螺静置于恒温台上，以 100 Hz 采样记录约 2.9 h，常值零偏约 $0.80^\circ/\text{s}$ 。

- **B1** 说明常值零偏为何不影响 Allan 方差。
- **B2** 前 9 个 1 s 平均值（单位 $^\circ/\text{s}$ ）为：0.7938, 0.7929, 0.8010, 0.7995, 0.7949, 0.7909, 0.7974, 0.8002, 0.7963。用非重叠公式手算 $\sigma(1\text{s})$ （8 个差值）和 $\sigma(2\text{s})$ （把前 8 个值两两平均，3 个差值），以 $^\circ/\text{h}$ 表示，并与表 5 中由全部数据算得的值比较，解释差异。
- **B3** 表 5 是由全部数据计算的重叠 Allan 偏差。在双对数坐标中作图，划分各噪声区；对 $\tau \leq 0.2\text{s}$ 的 5 个点用最小二乘拟合 $\lg \sigma = a_0 + b \lg \tau$ ，求斜率 b 并读出角随机游走 N ($^\circ/\sqrt{\text{h}}$)；由最小值求零偏不稳定性 B ；试由长 τ 端估计速率随机游走 K_{rw} ，并评价其可靠性。
- **B4** 与表 1 及例题二的热噪声极限比较，评价该陀螺。

解答：实验题

A1（2 分）振幅以 $\tau_r \approx 8\text{s}$ 衰减，几秒后信号仍足够强；转动过程中振型按 $\dot{\varphi}_{\text{rel}} = -K\Omega(t)$ 进动，积分只与总转角有关（例题三 (6)），所以快慢无关。但转得太慢时，碗的频率裂分/阻尼不对称引起的钉扎与漂移（第 6.3、6.4 节）会使结果偏离（见 A2）。

A2（4 分）(a) 由第 6.4 节，不被钉住需要半裂分 $\delta = \pi\Delta f$ 小于转动耦合 $\beta = nK\Omega$ 。最慢的一次是 $|\Theta| = 30^\circ$ 在 3 s 内转完： $\Omega = 0.175\text{rad/s}$ ， $\beta = 2 \times 0.3 \times 0.175 = 0.105\text{s}^{-1}$ ，故

$$\Delta f < \frac{nK\Omega}{\pi} \approx 0.033\text{Hz},$$

即相对裂分 $\lesssim 5 \times 10^{-5}$ ——普通不锈钢碗（裂分常在 0.1 Hz 至数 Hz）必须先修调。这只是“不被钉住”的边界：恰在边界 $\delta = \beta$ 上，椭圆度最大可达 1（第 6.4 节要点 1），读数会被严重扭曲。(b) 由要点 1，椭圆度约 $2\delta/\beta$ ，读数偏差也随 δ/β 迅速增大。按慢变方程对 3 s、 $\Theta = 30^\circ$ 的测量做数值模拟（遍历主轴方位，`exp_bowl.py`）： $\Delta f = 0.033\text{Hz}$ ($\delta = \beta$) 时偏差可达 1.8° ，即读数 9° 的 20%，椭圆度 0.58； $\Delta f = 0.05\text{Hz}$ 时依主轴方位为 0.2° – 4.3° 。要把偏差压到读数的约 2%，需 $\delta \lesssim 0.3\beta$ ，即 $\Delta f \lesssim 0.01\text{Hz}$ 。本实验 $\Delta f = 0.005\text{Hz}$ ， $\delta/\beta \approx 0.15$ ，偏差 $< 0.04^\circ$ ，远小于约 1° 的读数噪声，满足。(c) 停转后 $\beta = 0$ ，裂分使振型缓慢向行波转化、方位漂移：

模拟得停转后 5 s 漂移 $< 0.1^\circ$, 10 s 约 0.4° 。所以应在停转后约 5 s 内读数（这也与 8 s 的衰荡时间相适应）。

A3 (5 分) 最小二乘公式 (N_d 个数据点):

$$b = \frac{\sum(\Theta_i - \bar{\Theta})(\varphi_i - \bar{\varphi})}{\sum(\Theta_i - \bar{\Theta})^2}, \quad a = \bar{\varphi} - b\bar{\Theta}, \quad s^2 = \frac{\sum(\varphi_i - a - b\Theta_i)^2}{N_d - 2},$$

$$\sigma_b = \frac{s}{\sqrt{\sum(\Theta_i - \bar{\Theta})^2}}, \quad \sigma_a = s\sqrt{\frac{1}{N_d} + \frac{\bar{\Theta}^2}{\sum(\Theta_i - \bar{\Theta})^2}}.$$

代入: $N_d = 13$, $\bar{\Theta} = 0$, $\sum \Theta_i^2 = 1.638 \times 10^5 (^\circ)^2$, $\sum \Theta_i \varphi_i = -4.961 \times 10^4 (^\circ)^2$, $\bar{\varphi} = 0.49^\circ$ 。得 $b = -0.3029$, $a = 0.49^\circ$, $s = 0.98^\circ$, $\sigma_b = 0.0024$, $\sigma_a = 0.27^\circ$ 。故

$$K = -b = 0.303 \pm 0.002.$$

(a 与零相差约 $1.8\sigma_a$, 可能来自拾振片安装角度误差, 见 A5。)

A4 (2 分) K 介于圆环 0.4 与理想半球 0.277 之间、更接近半球。碗比半球浅、口沿较厚（相当于一圈“环”），也有底座：振动集中在口沿附近，竖直运动占比 ζ 比半球小，由例题四的 $K = 2/(n^2 + 1 + n^2\zeta^2)$, K 向圆环值偏移。由 $K = 0.303$ 反推 $n^2\zeta^2 = 2/K - 5 = 1.6$, $\zeta \approx 0.63$ (半球为 0.745)。

A5 (3 分, 答出三项即可) (0) **首要**：频率裂分（及阻尼不对称）导致的钉扎、椭圆化与随方位变化的漂移 (A2)：修调碗、加快转速、停转后立即读数，或做正交控制；(i) 拾振片安装方位误差 $\rightarrow$ 零位 $a \neq 0$ 与读出非线性：用转台标定拾振片方位，或用多对电极；(ii) 拾振片与胶的附加质量破坏轴对称，加大频率裂分、使振型“偏爱”某些方位（锁定、 φ 的 $\sin 4\varphi$ 型周期误差）：用更轻的非接触传感（激光测振、电容）、对称布置；(iii) 衰荡中振幅变小，读出噪声增大：多次重复取平均；(iv) 敲击位置/力度不一致使初始振型不在 0° 并混入行波：用电磁激励代替敲击；(v) 转台转动引起的碗的晃动、空气流动。

B1 (1 分) 常值零偏使每段平均值都加上同一常数，在相邻两段之差中抵消。

B2 (3 分) 8 个差值 ($10^{-4}^\circ/\text{s}$): -9, 81, -15, -46, -40, 65, 28, -39, 平方和 1.711×10^{-4} , $\sigma^2(1\text{s}) = \frac{1.711 \times 10^{-4}}{2 \times 8} = 1.07 \times 10^{-5}$, $\sigma(1\text{s}) = 3.27 \times 10^{-3}^\circ/\text{s} = 11.8^\circ/\text{h}$ 。2 s 平均: 0.79335, 0.80025, 0.79290, 0.79880; 差值 0.00690, -0.00735, 0.00590, $\sigma(2\text{s}) = \sqrt{\frac{1.364 \times 10^{-4}}{2 \times 3}} = 4.77 \times 10^{-3}^\circ/\text{s} = 17.2^\circ/\text{h}$ 。全数据值为 16.3 与 $12.3^\circ/\text{h}$: 手算值的偏差在统计误差之内——只有 8 个与 3 个差值 ($n_c = 9$ 与 4) 时, 相对不确定度约 $1/\sqrt{2(n_c - 1)} = 1/\sqrt{16} = 25\%$ 与 $1/\sqrt{6} \approx 41\%$ (第 7.2 节)。这说明 Allan 方差必须用长记录（以及重叠估计）。

B3 (6 分) 作图得: $\tau \lesssim 2\text{s}$ 斜率约 $-1/2$ (角随机游走主导); 20–200 s 近似平台 (零偏不稳定性); $\tau \gtrsim 500\text{s}$ 有上升趋势但点很少。拟合 $\tau = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2\text{s}$: $x = \lg \tau = -2, -1.699, -1.301, -1, -0.699$, $y = \lg \sigma = 2.177, 2.027, 1.830, 1.681, 1.534$ 。用 A3 的公式得 $b = -0.494$, 按残差算得 $\sigma_b \approx 0.001$, $a_0 = 1.187$ 。斜率接近 $-1/2$; 它与 $-1/2$ 之差 0.006 超出 σ_b , 原因是 $\tau = 0.1\text{--}0.2\text{s}$ 处方差中已混入约 2–4% 的零偏不稳定性贡献, 使曲线略为变缓 (各点的统计误差也并不独立, σ_b 只是粗略估计)。把直线外推到 $\tau = 1\text{s}$: $N = 10^{a_0} = 15.4^\circ/\text{h} \cdot \sqrt{\text{s}}$, 即 $N = 15.4/60 = 0.26^\circ/\sqrt{\text{h}}$ ($= 0.0043 (^\circ/\text{s})/\sqrt{\text{Hz}}$)。注意不宜直接读表中 $\tau = 1\text{s}$ 的 16.3: 方差相加, $\tau = 1\text{s}$ 处已混入零偏不稳定性的贡献 ($16.3^2 - 15.4^2 \approx 5^2$, 与平台值 6.9 在统计误差内相当), 会使 N 偏大约 6%。最小值 $\sigma_{\min} \approx 6.9^\circ/\text{h}$ ($\tau \approx 200\text{s}$), $B = 6.9/0.664 = 10.4^\circ/\text{h}$;

因最小值处仍混有白噪声与随机游走的贡献，此值略偏高（几个百分点）。长 τ 端：扣除平台 $(0.664B)^2$ 后，按 $\sigma^2 - (0.664B)^2 = K_{\text{rw}}^2\tau/3$ ， $\tau = 1000\text{ s}$ 给出 $K_{\text{rw}} \approx 0.36$ ， $\tau = 2000\text{ s}$ 给出 $0.11^\circ/\text{h}/\sqrt{\text{s}}$ ，两者相差 3 倍。原因： $\tau = 1000\text{ s}$ 时只有约 10 个不重叠段，相对误差约 24%，2000 s 时更大，且平台扣除放大了误差。结论：本记录只能给出 $K_{\text{rw}} \sim 0.1\text{--}0.4^\circ/\text{h}/\sqrt{\text{s}}$ 的量级（模拟真值 0.25），要可靠测定需要数十小时的记录。

B4 (2 分) $B \approx 10^\circ/\text{h}$ 属表 1 的工业级/消费级边界； $N \approx 0.26^\circ/\sqrt{\text{h}}$ 与 ICM-42688-P ($0.0028^\circ/\text{s}/\sqrt{\text{Hz}} \rightarrow 0.17^\circ/\sqrt{\text{h}}$)、BMI270 ($0.42^\circ/\sqrt{\text{h}}$) 同量级，比例题二的机械热噪声极限 ($0.04^\circ/\sqrt{\text{h}}$) 大数倍，说明主要受电子学噪声限制。纯积分 1 小时，角随机游走带来 $\approx 0.26^\circ$ 的误差，而 $10^\circ/\text{h}$ 的零偏不稳定性带来可达数度的误差——手机必须用加速度计、磁力计不断校正姿态。

10 小结：推导链

要点：本讲的逻辑依赖

1. $d\mathbf{A}/dt|_S = d\mathbf{A}/dt|_{S'} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$ (式 (2.2)) $\Rightarrow$ 科里奥利力 $-2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'$ (式 (2.5))；拉格朗日形式中对应动能里对速度一次的项（陀螺项规则 (2.16)）。
2. 二维简并振子 = 两个反向圆运动之和；两者频率差 $\Rightarrow$ 振动方向以 $(\omega_+ - \omega_-)/2$ 进动（引理 (2.8)）。
3. 傅科摆： $\ddot{\xi} + 2i\Omega_z\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0 \Rightarrow$ 进动率 $-\Omega \sin \lambda$ (式 (3.4))。
4. MEMS：受迫振动 + 科里奥利驱动 $\Rightarrow Y = \Omega X_0 / \sqrt{\Delta\omega^2 + (\omega/2Q)^2}$ (式 (4.4))；包络方程 + 线性解调 $\Rightarrow$ 频率响应 (4.7)：匹配时一阶低通，失配时 Δf 处有谐振峰、平坦带宽约 $0.54\Delta f$ ，灵敏度 $\times$ 带宽 $\sim X_0$ (式 (4.9))；涨落-耗散 $S_F = 2bk_B T$ + 相敏解调 $\Rightarrow N = X_0^{-1} \sqrt{k_B T / (m\omega Q)}$ (式 (4.10))。
5. 圆环：不可伸长 $u = -\partial v / \partial \theta \Rightarrow$ 振型 (5.3)；惯性系动能的 Ω 一次项 $T_1 = G(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1) \Rightarrow$ 与傅科摆同形的方程 (5.12)， $\beta = 2n\Omega/(n^2 + 1) \Rightarrow q$ 平面进动 $-\beta \Rightarrow (n \text{ 倍角})$ 振型进动 $-K\Omega$ ， $K = 2/(n^2 + 1)$ (式 (5.13))；推广到壳体 $\Rightarrow$ 半球 $K = 0.277$ (式 (5.15))。
6. 缺陷：两模慢变方程 (6.4) $\Rightarrow$ 阻尼不对称给出 Adler 方程 (6.5)（锁定、不均匀进动）；频率裂分给出精确解 (6.7)（椭圆化、锁定） $\Rightarrow$ 修调与正交控制。
7. 噪声度量：白噪声平均方差 S/T_a (式 (2.18)) $\Rightarrow$ Allan 斜率 $-1/2$ ；随机游走 $\Rightarrow +1/2$ ；频域公式 (7.4) $\Rightarrow$ 闪烁噪声平台 $0.664B$ 。

参考文献

- [1] L. Foucault. Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 32:135–138, 1851. URL https://www.numdam.org/item/CRAS_1851_32_135_0

[//fr.wikisource.org/wiki/D%C3%A9monstration_physique_du_mouvement_de_rotation_de_la_Terre_au_moyen_du_pendule](https://fr.wikisource.org/wiki/D%C3%A9monstration_physique_du_mouvement_de_rotation_de_la_Terre_au_moyen_du_pendule).

- [2] L. Foucault. Sur une nouvelle démonstration expérimentale du mouvement de la terre, fondée sur la fixité du plan de rotation. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 35:421–424, 1852.
- [3] V. M. N. Passaro, A. Cuccovillo, L. Vaiani, M. De Carlo, and C. E. Campanella. Gyroscope Technology and Applications: A Review in the Industrial Perspective. *Sensors*, 17(10):2284, 2017. doi: 10.3390/s17102284.
- [4] Gyrocompass. Wikipedia (Anschütz-Kaempfe 1906 年发明、1908 年试验成功; Sperry 1908 年实用系统, U.S. patent 1,242,065, 1911 年美国海军采用), . URL <https://en.wikipedia.org/wiki/Gyrocompass>. 访问于 2026-10.
- [5] G. Sagnac. L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 157:708–710, 1913.
- [6] W. M. Macek and D. T. M. Davis. Rotation rate sensing with traveling-wave ring lasers. *Applied Physics Letters*, 2(3):67–68, 1963. doi: 10.1063/1.1753778.
- [7] V. Vali and R. W. Shorthill. Fiber ring interferometer. *Applied Optics*, 15(5):1099, 1976. doi: 10.1364/AO.15.001099.
- [8] G. H. Bryan. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 7:101–111, 1890. URL <https://archive.org/details/proceedingsofcam7188992camb>. p. 102: 约 2.4 拍/转; p. 110: 两只香槟杯约 2.6 与 2.2 拍/转.
- [9] D. M. Rozelle. The hemispherical resonator gyro: From wineglass to the planets. *Advances in the Astronautical Sciences*, 134:1157–1178, 2009. AAS 09-176.
- [10] C. Liu, Q. Lou, D. Li, H. Li, T. Lan, Y. Wu, H. Meng, and J. Li. An Angle-Dependent Bias Compensation Method for Hemispherical Resonator Gyro Inertial Navigation Systems. *Sensors*, 25:6639, 2025. doi: 10.3390/s25216639. 引言中回顾: 1965 年 Delco 研究中心 D. Lynch 据 Bryan 理论建立 HRG 模型.
- [11] E. J. Loper and D. D. Lynch. Hemispherical Resonator Gyro: Status Report and Test Results. In *Proceedings of the ION National Technical Meeting*, pages 105–107, San Diego, 1984. URL <https://www.ion.org/publications/abstract.cfm?articleID=12138>.
- [12] P. Greiff, B. Boxenhorn, T. King, and L. Niles. Silicon monolithic micromechanical gyroscope. In *TRANSDUCERS '91: International Conference on Solid-State Sensors and Actuators*, pages 966–968, 1991. doi: 10.1109/SENSOR.1991.149051.
- [13] D. Xia, C. Yu, and L. Kong. The Development of Micromachined Gyroscope Structure and Circuitry Technology. *Sensors*, 14:1394–1473, 2014. doi: 10.3390/s140101394.

- [14] TDK InvenSense. ICM-42688-P High Precision 6-Axis MEMS MotionTracking Device (产品页与数据手册 DS-000347) . URL <https://invensense.tdk.com/products/motion-tracking/6-axis/icm-42688-p/>. 陀螺噪声 $2.8 \text{ mdps}/\sqrt{\text{Hz}}$.
- [15] Bosch Sensortec. BMI270 Data sheet, BST-BMI270-DS000-08. URL <https://www.bosch-sensortec.com/products/motion-sensors/imus/bmi270/>. 陀螺输出噪声 $0.007 \text{ dps}/\sqrt{\text{Hz}}$ (性能模式) .
- [16] Silicon Sensing Systems. How MEMS gyros work: the vibrating ring (VSG) driven in its $\text{Cos}2\theta$ mode. URL <https://www.siliconsensing.com/technology/mems-gyroscopes/>. 网页存档 2024-02 (Wayback Machine) .
- [17] W. Zhao, H. Yang, F. Liu, Y. Su, and L. Song. The Energy Compensation of the HRG Based on the Double-Frequency Parametric Excitation of the Discrete Electrode. *Sensors*, 20(12): 3549, 2020. doi: 10.3390/s20123549.
- [18] Z. Wei, G. Yi, Y. Huo, Z. Qi, and Z. Xu. The Synthesis Model of Flat-Electrode Hemispherical Resonator Gyro. *Sensors*, 19:1690, 2019. doi: 10.3390/s19071690.
- [19] T. E. Strikwerda, J. C. Ray, and D. R. Haley. The NEAR Guidance and Control System. *Johns Hopkins APL Technical Digest*, 19(2):205–212, 1998.
- [20] SpaceNews. Northrop Grumman’s Hemispherical Resonator Gyro Marks 30 Million Operating Hours in Space. URL <https://spacenews.com/northrop-grummans-hemispherical-resonator-gyro-marks-30-million-operating-hours-in-space/>. 2015-02-17; HRG 自 1996 年 2 月起在 SIRU 中工作.
- [21] SatNews. Northrop Grumman Space Navigation Systems achieves 65 million hours and keeps on going. URL <https://satnews.com/2022/12/22/northrop-grumman-space-navigation-systems-achieves-65-million-hours-and-keeps-on-going/>. 2022-12-22; JWST 双 SSIRU、卡西尼号、信使号.
- [22] NASA. Webb FAQs: Webb uses Hemispherical Resonator Gyros (HRGs). URL <https://science.nasa.gov/mission/webb/faqs-full/>.
- [23] Northrop Grumman. Scalable Space Inertial Reference Unit (Scalable SIRU) datasheet. URL https://satcatalog.s3.amazonaws.com/components/399/SatCatalog_-_Northrop_Grumman_-_Scalable_SIRU_-_Datasheet.pdf. 零偏稳定性 $< 0.0015^\circ/\text{h}$ (1σ) , 角随机游走 $< 0.00015^\circ/\sqrt{\text{h}}$.
- [24] IEEE. IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros, IEEE Std 952-1997, Annex C (Allan variance), 1998.
- [25] Guangzhou. Wikipedia (坐标 $23^\circ 07' 48''\text{N}$, $113^\circ 15' 36''\text{E}$) , . URL <https://en.wikipedia.org/wiki/Guangzhou>.

- [26] R. P. Leland. Mechanical-thermal noise in MEMS gyroscopes. *IEEE Sensors Journal*, 5(3): 493–500, 2005. doi: 10.1109/JSEN.2005.844538.
- [27] X. Ding, J. Jia, Y. Gao, and H. Li. Mechanical and Electrical Noise in Sense Channel of MEMS Vibratory Gyroscopes. *Sensors*, 17:2306, 2017. doi: 10.3390/s17102306.
- [28] R. Hoppe. Vibrationen eines Ringes in seiner Ebene. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 73:158–170, 1871. doi: 10.1515/crll.1871.73.158.
- [29] D. D. Lynch. Vibratory gyro analysis by the method of averaging. In *Proceedings of the 2nd St. Petersburg International Conference on Gyroscopic Technology and Navigation*, pages 26–34, 1995.
- [30] R. Adler. A study of locking phenomena in oscillators. *Proceedings of the IRE*, 34(6):351–357, 1946. doi: 10.1109/JRPROC.1946.229930.
- [31] D. W. Allan. Statistics of atomic frequency standards. *Proceedings of the IEEE*, 54(2):221–230, 1966. doi: 10.1109/PROC.1966.4634.
- [32] N. El-Sheimy, H. Hou, and X. Niu. Analysis and Modeling of Inertial Sensors Using Allan Variance. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 57(1):140–149, 2008. doi: 10.1109/TIM.2007.908635.
- [33] H. Zhang, C. Zhang, J. Chen, A. Li, X. Zou, and C. Li. A Review of Symmetric Silicon MEMS Gyroscope Mode-Matching Technologies. *Micromachines*, 13:1255, 2022. doi: 10.3390/mi13081255.
- [34] J. W. S. Rayleigh. *The Theory of Sound, Vol. 1*. Macmillan, London, 2nd edition, 1894. Ch. XA: Curved plates or shells (球壳不可伸长振型) .

A 拉格朗日方程的推导

设 N_p 个质点的位置 $\mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$ 。

1. **两个恒等式。**速度 $\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$ 对 $\dot{q}_j$ 是线性的，系数只依赖 q, t ，故

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (\text{A.1})$$

又 $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}$ (求导次序可交换)。

2. **把 $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ 投影到 $\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j$ 上。**由乘积法则与上面两式：

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

3. 用牛顿定律。 $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i$ ($\mathbf{N}_i$ 为约束力)。 $\delta \mathbf{r}_i = \sum_j (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) \delta q_j$ 是约束允许的虚位移；理想约束意味着 $\sum_i \mathbf{N}_i \cdot \partial \mathbf{r}_i / \partial q_j = 0$ 。若 $\mathbf{F}_i = -\nabla_i V$ ，则 $\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \partial \mathbf{r}_i / \partial q_j = -\partial V / \partial q_j$ 。合起来： $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ ； V 不含 $\dot{q}$ ，即得式 (2.15)。

连续体（圆环）可看作极多个质元，求和变为积分；“不可伸长”是理想约束的极限（保持中线长度的内力在不伸长的位移中不做功）。

B 圆环的弯曲能与 Hoppe 频率

推导：梁的弯曲能

梁弯曲时，距中性层 y 的纤维应变 $\epsilon = -y \delta \kappa_c$ ($\delta \kappa_c$ 为曲率的变化)，弹性能密度 $\frac{1}{2} E \epsilon^2$ 。对截面积分：单位长度弯曲能 $\frac{1}{2} E \delta \kappa_c^2 \int y^2 dA = \frac{1}{2} EI \delta \kappa_c^2$ 。

推导：曲率的一阶变化

把变形后的中线写成 $\mathbf{P}(\theta) = (R + u)\hat{\mathbf{e}}_r + v\hat{\mathbf{e}}_\theta$ 。用 $d\hat{\mathbf{e}}_r/d\theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta$ 、 $d\hat{\mathbf{e}}_\theta/d\theta = -\hat{\mathbf{e}}_r$ 及不可伸长条件 $v' = -u$ （撇号表示 $\partial/\partial\theta$ ）：

$$\mathbf{P}' = (u' - v)\hat{\mathbf{e}}_r + (R + u + v')\hat{\mathbf{e}}_\theta = (u' - v)\hat{\mathbf{e}}_r + R\hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad \mathbf{P}'' = (u'' + u - R)\hat{\mathbf{e}}_r + (u' - v)\hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

平面曲线曲率 $\kappa_c = (\mathbf{P}' \times \mathbf{P}'')_z / |\mathbf{P}'|^3$ 。保留一阶： $(\mathbf{P}' \times \mathbf{P}'')_z = (u' - v)^2 - R(u'' + u - R) \approx R^2 - R(u + u'')$ ， $|\mathbf{P}'| \approx R$ ，故

$$\kappa_c \approx \frac{1}{R} - \frac{u + u''}{R^2}, \quad \delta \kappa_c = -\frac{u + u''}{R^2}. \quad (\text{B.1})$$

(verify_symbolic.py 由精确曲率公式展开核对。)

对第 n 阶振型 $u + u'' = (1 - n^2)u$ ，

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^{2\pi} \delta \kappa_c^2 R d\theta = \frac{EI}{2R^3} (n^2 - 1)^2 \int_0^{2\pi} u^2 d\theta = \frac{\pi EI (n^2 - 1)^2}{2R^3} (q_1^2 + q_2^2),$$

即 $\kappa = \pi EI (n^2 - 1)^2 / R^3$ 。与 $M = \pi \mu R (1 + 1/n^2)$ 相除得 Hoppe 公式 (5.9)。 $n = 1$ 时 $\omega_1 = 0$ （刚体平移）， $\omega_3/\omega_2 = 2.83$ 。

C 一般轴对称壳的 Bryan 因子与半球

推导： K 的一般公式

壳上材料点的静止位置 $\mathbf{r}_0$ ，位移 $\mathbf{d}$ ，惯性系速度 $\dot{\mathbf{d}} + \Omega \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r}_0 + \mathbf{d})$ 。动能中 Ω 的一次项为 $\Omega \int \dot{\mathbf{d}} \cdot [\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r}_0 + \mathbf{d})] dm$ 。其中 $\dot{\mathbf{d}} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}_0) = \frac{d}{dt} [\mathbf{d} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}_0)]$ 是全导数（且对 $n \geq 1$ 的振型在周向积分为零），不影响运动方程；剩下 $\dot{\mathbf{d}} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{d}) = \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{d} \times \dot{\mathbf{d}}) = d_\rho \dot{d}_\theta - d_\theta \dot{d}_\rho$ ，只含水平分量（ d_ρ 为水平径向分量， d_θ 为周向分量）。取两个简并振型： $\mathbf{d} = q_1 (U_\rho \cos n\theta, V_\theta \sin n\theta, U_z \cos n\theta) + q_2 (U_\rho \sin n\theta, -V_\theta \cos n\theta, U_z \sin n\theta)$ （分量依次为水平径向、周向、竖直；第二个振型是第一个

转过 $\pi/2n$)。对 θ 积分 ($\int \cos^2 = \int \sin^2 = \pi$):

$$T_0 = \frac{\pi}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \int (U_\rho^2 + U_z^2 + V_\theta^2) d\tilde{m}, \quad T_1 = -2\pi\Omega \left(\int U_\rho V_\theta d\tilde{m} \right) (q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1),$$

其中 $d\tilde{m}$ 为沿母线、单位周向角的质量元。于是 $M = \pi \int |U|^2 d\tilde{m}$, $G = -2\pi\Omega \int U_\rho V_\theta d\tilde{m}$, $\beta = G/M$, 振型相对壳体转速 $-\beta/n \equiv -K\Omega$, 得式 (5.14)。圆环: $U_\rho = 1$, $V_\theta = -1/n$ (式 (5.3)), $U_z = 0$, 回到 $2/(n^2 + 1)$ 。

推导：半球的瑞利不可伸长振型

半径 a 的球面，用从碗底极点量起的余纬 $\chi \in [0, \pi/2]$ 与方位角 θ 。中面位移的经向、周向、法向（向外）分量 u_χ, u_θ, w 产生的三个中面应变为 [34]

$$\varepsilon_\chi = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial u_\chi}{\partial \chi} + w \right), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{a} \left(u_\chi \cot \chi + \frac{1}{\sin \chi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + w \right), \quad \gamma_{\chi\theta} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sin \chi} \frac{\partial u_\chi}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \chi} - u_\theta \cot \chi \right).$$

(ε_θ 的来源与圆环的式 (5.1) 相同：纬线圆半径 $a \sin \chi$ 的变化 $u_\chi \cos \chi + w \sin \chi$ 加上周向位移的不均匀。) 瑞利的不可伸长振型为

$$u_\chi = \sin \chi \tan^n \frac{\chi}{2} \cos n\theta, \quad u_\theta = \sin \chi \tan^n \frac{\chi}{2} \sin n\theta, \quad w = -(n + \cos \chi) \tan^n \frac{\chi}{2} \cos n\theta, \quad (\text{C.1})$$

`verify_symbolic.py` 核对了它使三个应变恒为零。碗底附近 ($\chi \rightarrow 0$) 位移 $\propto \chi^n$ 很小，所以这一振型与碗底支撑柄相容。水平径向分量 $U_\rho = u_\chi \cos \chi + w \sin \chi$ 的振幅函数, $d\tilde{m} \propto \sin \chi d\chi$ (等厚壳)。代入式 (5.14) 数值积分: $n = 2$ 得 $K = 0.2770$, $n = 3$ 得 $K = 0.1622$ 。

D 热噪声的频域验证

推导：振子位移涨落等于能量均分的要求

把白噪声力看成许多独立的、随机相位的正弦分量之和；频率在 $[f, f + df]$ 的分量贡献力的方差 $2S_F df$ (双边约定，见第 2.5 节的定义)。每个分量驱动振子，位移振幅乘以 $|H| = 1/|k - m\omega^2 + ib\omega|$ (式 (2.11))；独立分量的方差相加：

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^\infty 2S_F |H|^2 df = \frac{S_F}{\pi m^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma_b^2 \omega^2}, \quad \gamma_b = b/m.$$

记积分为 I 。作代换 $\omega \rightarrow \omega_0^2/\omega$ ：被积函数变为 $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma_b^2 \omega^2}$ (积分限不变)，故

$$2I = \int_0^\infty \frac{(1 + \omega_0^2/\omega^2) d\omega}{(\omega - \omega_0^2/\omega)^2 + \gamma_b^2} \cdot \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{ds}{s^2 + \gamma_b^2} = \frac{\pi}{\gamma_b \omega_0^2},$$

这里用了恒等式 $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma_b^2 \omega^2 = \omega^2[(\omega - \omega_0^2/\omega)^2 + \gamma_b^2]$ 与代换 $s = \omega - \omega_0^2/\omega$ ($ds = (1 + \omega_0^2/\omega^2)d\omega$, s 从 $-\infty$ 增到 ∞)。于是 $I = \pi/(2\gamma_b \omega_0^2)$,

$$\langle x^2 \rangle = \frac{S_F}{2m^2 \gamma_b \omega_0^2} = \frac{S_F}{2bk} = \frac{k_B T}{k} \quad (\text{用 } S_F = 2bk_B T).$$

E Allan 方差的频域公式与 0.664

推导：Allan 方差的频域公式

先看单个正弦分量 $\Omega(t) = A_s \cos(2\pi ft + \varphi_0)$, φ_0 随机均匀分布。长 τ 的窗口平均为 $\bar{\Omega} = A_s \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \cos \Phi$ (Φ 为窗口中心的相位); 下一窗口中心相位多 $2\pi f \tau$, 差值

$$\bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1 = A_s \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} [\cos(\Phi + 2\pi f \tau) - \cos \Phi] = -2A_s \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \sin(\pi f \tau) \sin(\Phi + \pi f \tau).$$

对随机相位平均 $\langle \sin^2 \rangle = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} \langle (\bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1)^2 \rangle = A_s^2 \frac{\sin^4 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2} = 2 \cdot \frac{A_s^2}{2} \cdot \frac{\sin^4 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2}$, 其中 $A_s^2/2$ 是该分量的方差。随机信号在 $[f, f + df]$ 内的方差为 $2S(f)df$, 各分量独立相加, 即得 $\sigma^2(\tau) = 4 \int_0^\infty S(f) \sin^4(\pi f \tau) / (\pi f \tau)^2 df$ 。

推导：两个积分

记 $g(x) = \sin^4 x = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)$, 则 $g(x) = \mathcal{O}(x^4)$, $g'(x) = \frac{1}{8}(8\sin 2x - 4\sin 4x) = \mathcal{O}(x^3)$, $g'' = 2\cos 2x - 2\cos 4x$ 。

- 白噪声: 分部积分一次, 边界项为零, $\int_0^\infty \frac{g}{x^2} dx = \int_0^\infty \frac{g'}{x} dx = \frac{1}{8} (8 \cdot \frac{\pi}{2} - 4 \cdot \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$, 用了 $\int_0^\infty \frac{\sin kx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ ($k > 0$)。代入式 (7.4): $\sigma^2 = \frac{4N^2}{\pi\tau} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{N^2}{\tau}$, 与式 (7.2) 一致。
- 闪烁噪声: 分部积分两次, 边界项为零, $\int_0^\infty \frac{g}{x^3} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{g''}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x} dx = \ln \frac{4}{2} = \ln 2$ 。最后一步是 Frullani 积分 $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$: 因 $\frac{\cos ax - \cos bx}{x} = \int_a^b \sin(kx) dk$, 乘收敛因子 $e^{-\epsilon x}$ 后交换积分次序, $\int_0^\infty e^{-\epsilon x} \sin kx dx = \frac{k}{k^2 + \epsilon^2} \rightarrow \frac{1}{k}$, 再对 k 积分得 $\ln(b/a)$ 。

(`verify_symbolic.py` 数值核对两积分; `gen_allan_data.py` 用模拟数据核对平台值。)

F 两个用到的积分

推导：一个三角函数积分

要证明: 当 $a > |b|$ 时

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a - b \sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

展开为几何级数 $\frac{1}{a - b \sin x} = \frac{1}{a} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{b}{a}\right)^k \sin^k x$ (因 $|b \sin x/a| < 1$)。奇次项在一周上平均为零; $\sin^{2j} x$ 的一周平均为 $\binom{2j}{j}/4^j$ 。由二项式级数 $(1 - 4z)^{-1/2} = \sum_j \binom{2j}{j} z^j$, 取 $z = b^2/4a^2$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a - b \sin x} = \frac{2\pi}{a} \sum_j \binom{2j}{j} \left(\frac{b^2}{4a^2}\right)^j = \frac{2\pi}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - b^2/a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

用于 Adler 周期: 令 $x = 2\psi$, $T_A = \int_0^\pi \frac{d\psi}{|\beta - \frac{\Delta\gamma}{2} \sin 2\psi|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - \Delta\gamma^2/4}}^\circ$

G 名词解释

本讲术语的中英对照与一句话定义见表 6。

表 6 名词解释（中英对照）

名词	一句话定义
科里奥利力 (Coriolis force)	转动系中的惯性力 $-2m\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}'$ ，垂直于相对速度、不做功
简并 (degeneracy)	两个（或多个）独立振动模式频率相同，其任意组合仍是同频率振动
品质因数 (quality factor)	$Q = 2\pi \times$ 储能/每周期损耗；共振峰相对宽度的倒数
慢变包络 (slowly varying envelope)	把 $x = \text{Re}[Ae^{i\omega t}]$ 中缓慢变化的复振幅 A 作为未知量的近似方法
模态匹配 (mode matching)	使 MEMS 陀螺检测模态与驱动模态频率相同，以获得 Q 倍灵敏度
正交误差 (quadrature error)	与驱动位移同相（与科里奥利力差 90° ）的寄生耦合信号
不可伸长条件 (inextensional)	薄环/壳低阶振动中中面不伸长： $u = -\partial v / \partial \theta$
Bryan 因子 (Bryan factor)	振型相对壳体以 $-K\Omega$ 进动的系数；圆环 $2/(n^2 + 1)$ ，半球约 0.277
力平衡模式 (force-to-rebalance)	用反馈力把振型钉住，反馈力正比于角速度（速率陀螺）
全角模式 (whole-angle)	振型自由进动，读出振型角得到转角（速率积分陀螺）
锁定 (lock-in)	缺陷产生的“恢复力矩”使振型停在某方位，小于阈值的转动测不出
涨落-耗散关系	热平衡中随机力强度与阻尼成正比： $S_F = 2bk_B T$
角随机游走 (ARW)	白噪声角速度积分成角度后误差按 $N\sqrt{t}$ 增长
零偏不稳定性 (bias instability)	闪烁噪声造成的零偏缓慢游荡，Allan 偏差平台 $0.664B$
Allan 方差	相邻两段平均值之差的均方的一半，随平均时间 τ 变化