

电子光学：磁透镜、Scherzer 定理与球差校正

第 43 届决赛短训讲义组

2026 年 10 月

目录

1 导读	3
2 名词与符号	5
3 前置模块	5
3.1 电子的德布罗意波长与相对论修正	5
3.2 洛伦兹力、回旋运动与“磁场不做功”	7
3.3 轴对称磁场的近轴展开	7
3.4 几种典型的轴上场	8
4 Busch 定理与拉莫尔转动	9
4.1 洛伦兹力矩与磁通：Busch 定理	9
4.2 匀强场中的例子：螺旋线与拉莫尔系中的直线	11
5 近轴运动方程：为什么磁透镜总是会聚	12
5.1 子午光线的径向方程	12
5.2 一般光线：复坐标与拉莫尔转动系	12
5.3 以 z 为自变量：近轴光线方程	13
5.4 基本光线、成像与放大率	14
6 薄磁透镜与 Glaser 场	15
6.1 Busch 焦距公式	15
6.2 短线圈透镜	15
6.3 Glaser 钟形场的精确解与强透镜	17
7 球差与 Scherzer 定理	18
7.1 什么是球差	18

目录	2
7.2 三阶子午光线方程	19
7.3 像面上的偏差：常数变易	19
7.4 配方：Scherzer 定理	20
7.5 数值验证与物理含义	21
7.6 最小弥散圆	22
8 分辨率：球差、衍射与色差	23
8.1 几何球差与衍射的平衡	23
8.2 波像差与 Scherzer 欠焦	24
8.3 色差、能量展宽与信息极限	27
9 绕过 Scherzer 定理：像差校正	29
9.1 破坏前提的几条路	29
9.2 多极场	30
9.3 两块六极子的组合：负球差	31
9.4 四极-八极子校正器与校正后的极限	32
10 决赛风格例题	32
11 实验与数据处理：纵向磁场聚焦法测电子比荷	38
12 小结：推导链	42
A 轴对称磁场的完整展开与圆电流环的精确场	45
A.1 任意阶的近轴展开	45
A.2 圆电流环的精确场	46
B 三阶光线方程与球差积分的推导细节	46
B.1 第 2 步的展开	46
B.2 第 4 步的展开	47
B.3 积分形式的等价性	47
B.4 物在场内的情形	47
C Glaser 场精确解的推导	47
D 六极子组合像差的微扰计算	48
D.1 单块六极子	48
D.2 中心对中心、放大率 -1 的转移	48

D.3 第二块六极子中的二阶计算	49
E 最小二乘直线拟合与数值积分	49
F 数值方法说明	50
G 名词解释	51

1 导读

把一束电子射进一个通电的短线圈，电子束会像光线经过凸透镜那样会聚到一点；把两个这样的线圈串起来，就得到一台“显微镜”。200 kV 的电子，德布罗意波长只有 2.5 pm，比可见光短十万倍。按照光学显微镜的经验，分辨率应当接近波长，可是到 20 世纪末，常用的 200 kV 电镜点分辨率只有约 0.2 nm，即使 400 kV 的商用电镜也只有约 0.16 nm[1]，都在波长的五十到一百倍。差距来自磁透镜自身的“像差”。1936 年 Scherzer 证明：凡是轴对称、静态的磁透镜，球差系数一定为正，无法像玻璃透镜那样用“凸凹组合”消掉。直到 1990 年代，人们才用非轴对称的多极场绕开这个定理，把电子显微镜推进到亚埃 (< 0.1 nm) 分辨率。

本讲从洛伦兹力出发，一步一步推出：为什么轴对称磁场总是会聚透镜（第 4-5 节），焦距与像的旋转怎样计算（第 6 节），球差从哪里来、为什么一定为正（第 7 节），球差和衍射怎样共同决定分辨率（第 8 节），以及怎样绕过 Scherzer 定理（第 9 节）。

背景：从阴极射线管到电子显微镜

1922 年，Hans Busch 把阴极射线管（布劳恩管）放进一个长螺线管里，发现发散的电子束可以被纵向磁场重新会聚到荧光屏上的一点，并据此测出电子的比荷 1.768×10^{11} C/kg（以今天的单位表示）[2]。1926–1927 年，他计算了电子在轴对称磁场中的轨道，指出短线圈的磁场对电子束的作用与凸透镜对光的作用相同，焦距可以用线圈电流连续调节 [3, 4]。

柏林工业大学的 Max Knoll 与 Ernst Ruska 把这个想法变成了仪器。1931 年 4 月 7 日，Ruska 用两个短线圈、50 kV 电子实现了两级放大成像，两级总放大率只有约 17 倍（Ruska 诺贝尔演讲图 3 的图注给出 17.4 倍），但这台装置今天被看作第一台电子显微镜 [5]。1932 年两人发表《电子显微镜》一文 [6]；他们把 75 kV 电子的波长和 2×10^{-2} rad 的孔径角代入阿贝的衍射极限公式（第 8.1 节），估计分辨极限可达 0.22 nm[5]。1933 年底，Ruska 造出放大 12000 倍、超过光学显微镜能力的仪器 [7]。1986 年，Ruska 因“电子光学的基础性工作和设计第一台电子显微镜”获得一半诺贝尔物理学奖 [8]。

然而实际分辨率长期远不及波长所允许的水平。1936 年 Otto Scherzer 证明了以他命名的定理：轴对称的静态电子透镜，其球差和色差系数恒为正 [9]；1947 年他又列出了绕开这一定理的几条途径 [10, 11]。此后半个世纪的尝试大多失败。1990 年 Harald Rose 提出用两个六极子加一对圆透镜组成的校正器 [12]；Maximilian Haider、Rose、Knut Urban 等人把它装进一台商用 200 kV 场发射电子显微镜（场发射枪用强电场从金属尖端拉出电子，亮度高、能量展宽小），1997 年调试成功，1998 年发表：仪器的分辨极限从 0.24 nm 提高到约 0.13 nm[13, 14]，后续报道的点分辨率（像中能直接对应样品结构的最小间距，第 8.2 节）为 0.14 nm[1]。几乎同

时, Ondrej Krivanek 等人用四极-八极子校正器改造扫描透射电镜(用会聚到样品上的细电子束逐点扫描成像) [15, 16], 2002 年在 120 keV 下得到小于 0.1 nm 的电子探针 [17]。2008 年, 美国 TEAM 项目的透射电镜把信息极限(第 8.3 节)推进到约 50 pm (0.5 Å) [18]; 2009 年, 用扫描透射模式分辨了 47 pm 的原子间距 [19]; 色差校正也随后实现 [20, 21]。Rose、Haider、Urban 与 Krivanek 因“利用电子束实现亚埃分辨成像和化学分析”获得 2020 年 Kavli 纳米科学奖 [22]; 据 CEOS 公司的介绍, 前三人还获得了 2011 年沃尔夫物理学奖 [23]。

学习目标 学完本讲, 你应当能够:

1. 写出相对论修正后的电子波长 $\lambda = h/\sqrt{2meU^*}$, 并说明 U^* 的来源;
2. 由 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 与安培环路定理推出轴对称磁场的近轴展开, 由洛伦兹力矩推出 Busch 定理(正则角动量守恒), 并解释拉莫尔转动;
3. 在拉莫尔转动系中推出近轴方程 $w'' + \frac{eB^2}{8mU^*}w = 0$, 说明为什么轴对称磁场总是会聚透镜;
4. 计算薄磁透镜的焦距与像旋转角, 理解 Glaser 钟形场的精确解与强透镜的特点;
5. 推出三阶球差系数的积分表达式, 并把它写成各项非负的形式, 从而理解 Scherzer 定理及其每一个前提;
6. 由球差与衍射的平衡估计分辨极限, 理解 Scherzer 欠焦与相位衬度传递函数, 估计色差的影响;
7. 用一个简化模型说明两个六极子怎样产生负球差;
8. 处理“纵向磁场聚焦法测电子比荷”的实验数据, 包括有限长螺线管与地磁场的修正。

前置知识: 本讲需要的普通物理与数学

- 电磁学: 洛伦兹力、毕奥-萨伐尔定律(圆电流轴线上的磁场)、磁场的高斯定律与安培环路定理、磁通量;
- 力学: 圆周运动、角动量与力矩、转动参考系中的惯性力(只用来作对照);
- 近代物理: 德布罗意关系 $\lambda = h/p$, 狭义相对论的能量-动量关系;
- 光学: 薄透镜成像公式、圆孔衍射的艾里斑;
- 数学: 泰勒展开、复数的指数形式 $e^{i\theta}$ 、二阶线性常微分方程、分部积分。

本讲新引入的工具(近轴展开、正则角动量、复坐标与转动参考系、基本光线与朗斯基量、常数变易法、波像差与传递函数、多极场)都在首次使用前给出定义与推导。

建议学时 共 2 学时(约 90 分钟): 前置模块与 Busch 定理 20 分钟; 近轴方程与薄透镜 20 分钟; 球差与 Scherzer 定理 25 分钟; 分辨率与像差校正 25 分钟。例题、实验题与附录供课后研读。

推导路线 洛伦兹力 + $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow$ Busch 定理 (拉莫尔转动) $\Rightarrow$ 拉莫尔系中的近轴方程 $w'' + KB^2w = 0 \Rightarrow$ 薄透镜焦距与像旋转 $\Rightarrow$ 三阶展开 + 常数变易 $\Rightarrow$ 球差积分 (配方后各项非负: Scherzer 定理) $\Rightarrow$ 与衍射平衡: 分辨极限 $\Rightarrow$ 破坏前提: 多极子校正器。

2 名词与符号

例题中只在一题内使用的符号 (如 L_{12} 、 L_d 、 L_{in}) 在题内定义。几个易混淆的名称: 光线在本讲指电子的轨迹 (几何光学的说法); 近轴指离轴距离 r 远小于磁场沿轴变化的特征长度、且轨迹斜率很小; 像差指实际光线偏离近轴 (理想) 成像的部分; 物方量是把像面上的偏差除以放大率、折合回物面的量。

3 前置模块

3.1 电子的德布罗意波长与相对论修正

电子从静止经电压 U 加速, 获得动能 $E_k = eU$ 。电子显微镜常用的 U 是 100–300 kV, 而电子静能 $mc^2 = 511.0$ keV, 两者同一量级, 必须用相对论处理。

推导: 相对论动量与修正电压

狭义相对论中, 总能量 $E = \gamma mc^2 = E_k + mc^2$, 动量 $p = \gamma mv$, 两者满足 $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ 。由此

$$\begin{aligned} p^2c^2 &= E^2 - m^2c^4 = (E_k + mc^2)^2 - m^2c^4 \\ &= E_k^2 + 2E_kmc^2. \end{aligned}$$

代入 $E_k = eU$, 提出因子 $2meUc^2$:

$$\begin{aligned} p^2 &= 2meU \left(1 + \frac{eU}{2mc^2} \right) \equiv 2meU^*, \\ U^* &= U \left(1 + \frac{eU}{2mc^2} \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

U^* 叫相对论修正电压: 只要把非相对论公式 $p = \sqrt{2meU}$ 中的 U 换成 U^* , 就得到正确的动量。德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU^*}} = \frac{1.2264 \text{ nm}}{\sqrt{U^*/V}}. \quad (3.2)$$

检验: 数值与极限

$eU \ll mc^2$ 时 $U^* \rightarrow U$, 回到非相对论结果。常数取 CODATA 2018 推荐值 [24]。表 2 给出几个常用电压下的数值: 200 kV 时 $U^* = 239.1$ kV, $\lambda = 2.508$ pm, 非相对论公式会高估 9.3%。此时 $\gamma = 1.391$, $v = 0.695c$ 。

表 1 本讲符号表 (电子电荷记为 $-e$, $e > 0$)

符号	含义	单位
e, m, c, h	元电荷、电子静质量、光速、普朗克常量	C, kg, m/s, J s
U, U^*	加速电压; 相对论修正电压 $U(1 + eU/2mc^2)$ (式 (3.1))	V
γ, v, p	洛伦兹因子、速率、动量 $p = \gamma mv = \sqrt{2meU^*}$	1, m/s, kg m/s
λ	电子德布罗意波长	m
$(r, \theta, z), (x, y)$	柱坐标 (z 为光轴)、直角坐标	m, rad
$B(z)$	光轴上的磁感应强度 $B_z(0, z)$	T
B_r, B_z	离轴处磁场的径向、轴向分量	T
$\Phi(r, z)$	穿过以轴为中心、半径 r 的圆面的磁通	Wb
ω_c, ω_L	回旋角频率 $eB/\gamma m$ 、拉莫尔角频率 $eB/2\gamma m$	rad/s
$u = x + iy, w$	实验室系、拉莫尔转动系中的复坐标	m
K	透镜常数 $e/(8mU^*)$	T ⁻² m ⁻²
$k^2(z)$	近轴方程中的“劲度” $KB(z)^2$	m ⁻²
k_G^2, ω	Glaser 场的透镜强度 $KB_0^2 a^2$; $\omega = \sqrt{1 + k_G^2}$ (式 (6.4))	1
Θ	像旋转角 (拉莫尔转角)	rad
f, f_o, f_p	焦距; Glaser 场的物镜焦距、投影焦距 (第 6.3 节)	m
s_o, s_i	薄透镜的物距、像距	m
a	线圈半径, 或 Glaser 场的半宽度	m
NI	线圈安匝数	A
$h(z), g(z)$	两条基本光线 (式 (5.6))	m, 1
J	朗斯基量 $gh' - g'h$ (恒等于 1)	1
M	横向放大率	1
α	物方孔径半角 (光线在物点处的斜率)	rad
C_s, C_c	球差系数、色差系数 (折合到物方)	m
δ	像点弥散半径 (折合到物面)	m
Δf	离焦量 (欠焦为负)	m
q	空间频率 (每单位长度的周期数)	m ⁻¹
$W(\alpha), \chi(q)$	波像差 (光程差)、相应的相位 $2\pi W/\lambda$	m, rad
ϕ_0	弱相位光栅的相位振幅	rad
Q, D	约化空间频率 $q(C_s \lambda^3)^{1/4}$ 、约化离焦 $\Delta f/\sqrt{C_s \lambda}$	1
$q_0; q_I, d_I = 1/q_I$	传递函数第一零点; 信息极限对应的频率与周期	m ⁻¹ ; m ⁻¹ , m
k_0	电子波的波数 $2\pi/\lambda$ (第 8.2 节)	m ⁻¹
E_k, σ_E, σ_I	电子动能 eU ; 能量与透镜电流起伏的标准差	eV, eV, A
η, ϵ	$d \ln U^*/d \ln U$; 焦度的相对变化 (第 8.3 节)	1
$\sigma_f, \mathcal{E}_c(q)$	焦距扩展 (离焦起伏的标准差)、色差包络	m, 1
κ, d	六极子强度、六极子长度 (第 9.3 节)	m ⁻³ , m
$b(z), \beta_1, \beta_2$	实验题: 每安培的轴上场; 加权积分 (第 11 节)	T/A, T m/A, T ² m/A ²
B_E, Γ	实验题: 地磁场沿轴分量; $\bar{I}$ 对 $\sqrt{U}$ 的斜率	T, A/V ^{1/2}

表 2 电子波长（相对论与非相对论公式比较）

U/kV	U^*/kV	λ/pm	非相对论 λ/pm
10	10.098	12.205	12.264
30	30.881	6.979	7.081
100	109.785	3.701	3.878
200	239.139	2.508	2.742
300	388.063	1.969	2.239

3.2 洛伦兹力、回旋运动与“磁场不做功”

电子（电荷 $-e$ ）在磁场中受洛伦兹力

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}. \quad (3.3)$$

力始终垂直于速度，不做功，所以速率 v 、 γ 都是常量。于是 $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ：在纯磁场中，相对论电子的运动方程与非相对论方程完全相同，只要把 m 换成 γm 。本讲以后凡写“质量”处都理解为 γm ，并在最终公式里通过 $p^2 = (\gamma m v)^2 = 2meU^*$ 换成 U^* 。

推导：匀强磁场中的回旋运动

设 $\mathbf{B} = B\hat{z}$ ($B > 0$)。垂直于 $\hat{z}$ 的速度分量 $v_\perp$ 使电子做匀速圆周运动，向心力由洛伦兹力提供： $\gamma m v_\perp^2 / \rho = ev_\perp B$ ，得半径与角频率

$$\rho = \frac{p_\perp}{eB}, \quad \omega_c = \frac{v_\perp}{\rho} = \frac{eB}{\gamma m}. \quad (3.4)$$

ω_c 叫回旋角频率，与速度无关。转向：取 $\mathbf{v} = v\hat{x}$ ，则 $-e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -evB\hat{x} \times \hat{z} = +evB\hat{y}$ ，速度由 $+x$ 转向 $+y$ 。所以从 $+z$ 方向往回看（ $\mathbf{B}$ 指向观察者），电子沿逆时针方向回旋，角速度矢量与 $\mathbf{B}$ 同向。

$p/e = B\rho$ 叫磁刚度，表示把动量为 p 的电子弯成半径 ρ 的圆需要多强的场。200 kV 电子的 $p/e = 1.649 \times 10^{-3} \text{ T m}$ ：在 1 T 的场中回旋半径只有 1.6 mm。

3.3 轴对称磁场的近轴展开

磁透镜的磁场关于光轴（ z 轴）旋转对称。用柱坐标 (r, θ, z) ，对称性意味着各分量与 θ 无关。我们还假设没有环向分量 B_θ （由安培环路定理， $B_\theta \neq 0$ 需要有电流沿轴流过，磁透镜中没有这种电流）。于是磁场只有 $B_r(r, z)$ 与 $B_z(r, z)$ 两个分量。线圈设计者能直接控制、也最容易测量的是轴上的场

$$B(z) \equiv B_z(0, z).$$

下面说明：只要知道 $B(z)$ ，近轴区域的全部磁场就确定了。

推导：由高斯定律求 B_r

定义穿过以轴为心、半径 r 的圆面的磁通

$$\Phi(r, z) = \int_0^r B_z(r', z) 2\pi r' dr'. \quad (3.5)$$

取一个以轴为中心、半径 r 、长 dz 的小圆柱面。磁场的高斯定律 ($\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$) 要求：从两端面流出的磁通 $\Phi(r, z + dz) - \Phi(r, z)$ 与从侧面流出的磁通 $2\pi r dz B_r$ 之和为零。因此

$$B_r(r, z) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{精确}). \quad (3.6)$$

在轴附近 $B_z \approx B(z)$, $\Phi \approx \pi r^2 B(z)$, 代入得

$$B_r \approx -\frac{r}{2} B'(z), \quad (3.7)$$

撇号表示对 z 求导。物理图像：轴上场沿 z 增强时 ($B' > 0$)，磁感线向轴收拢， $B_r < 0$ 。

推导：由安培环路定理求 B_z 的离轴修正

在电子经过的区域没有电流。在 r - z 平面内取一个边长为 dr 、 dz 的小矩形回路，安培环路定理 ($\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$) 给出

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r}.$$

把式 (3.7) 代入左边，得 $\partial B_z / \partial r = -\frac{r}{2} B''(z)$ ，从 0 到 r 积分：

$$B_z(r, z) \approx B(z) - \frac{r^2}{4} B''(z). \quad (3.8)$$

再把它代回式 (3.5)：

$$\Phi(r, z) \approx \pi r^2 B(z) - \frac{\pi r^4}{8} B''(z). \quad (3.9)$$

注：展开的适用范围

小参量是 r/a ， a 是 $B(z)$ 沿轴变化的特征长度（线圈半径、极靴间隙）。式 (3.7) 的相对误差是 $\mathcal{O}(r^2/a^2)$ ，式 (3.8) 的误差是 $\mathcal{O}(r^4/a^4)$ 。附录 A 给出任意阶的展开，以及圆电流环离轴磁场的精确表达式（椭圆积分）。图 1(b) 比较了圆电流环的精确 B_r 与一阶近似： $r = 0.2a$ 时两者几乎重合， $r = 0.5a$ 时精确峰值约为一阶近似峰值的 1.26 倍。电子显微镜中电子离轴通常只有微米量级，而 a 是毫米量级。两个要点：(1) B_z 离轴的变化是二阶小量，这对第 7 节的三阶像差很关键；(2) 近轴区域的全部磁场由一个函数 $B(z)$ 决定。

3.4 几种典型的轴上场

- 圆电流环（短线圈）：半径 a 、 N 匝、电流 I ，由毕奥-萨伐尔定律

$$B(z) = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.10)$$

- 有限长螺线管：长 ℓ 、半径 R_s 、单位长度匝数 n ，中心在原点，把式 (3.10) 沿线圈长度积分

得

$$B(z) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\Lambda\left(z + \frac{\ell}{2}\right) - \Lambda\left(z - \frac{\ell}{2}\right) \right],$$

$$\Lambda(\xi) \equiv \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + R_s^2}}. \quad (3.11)$$

- Glaser 钟形场：

$$B(z) = \frac{B_0}{1 + z^2/a^2}, \quad (3.12)$$

a 是半高半宽。实际电镜物镜用铁磁“极靴”把磁场集中在几毫米的间隙里，轴上场接近钟形；Glaser 在 1941 年发现这种场的近轴方程有精确解 [25]，因此它是电子光学标准模型。

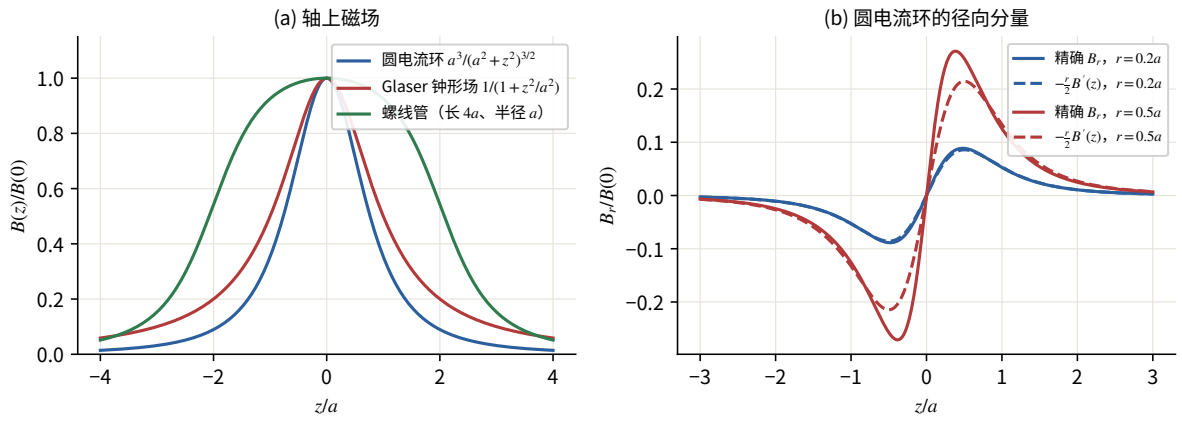


图 1 (a) 三种典型轴上场 (按中心值归一)。(b) 圆电流环磁场的径向分量：实线为椭圆积分给出的精确值，虚线为近轴一阶近似 $-\frac{r}{2}B'(z)$ 。

4 Busch 定理与拉莫尔转动

4.1 洛伦兹力矩与磁通：Busch 定理

轴对称系统中，绕 z 轴的角动量是否守恒？在没有磁场时守恒；有磁场时，洛伦兹力有环向分量，会产生绕轴的力矩。Busch 发现，这个力矩恰好可以写成某个量的时间导数，于是存在一个新的守恒量。

推导：Busch 定理

电子绕轴的（机械）角动量 $L_z = \gamma m r^2 \dot{\theta}$ 。力矩等于 r 乘以力的环向分量。由式 (3.3)，并利用 $B_\theta = 0$,

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_\theta = v_z B_r - v_r B_z,$$

$$\frac{dL_z}{dt} = -e r (v_z B_r - v_r B_z).$$

另一方面，沿电子轨道 $r(t)$ 、 $z(t)$ 求磁通 $\Phi(r, z)$ 的变化率：

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\partial\Phi}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\dot{z} \\ &= 2\pi r B_z v_r - 2\pi r B_r v_z,\end{aligned}$$

第一项由定义 (3.5) 直接求导，第二项用了式 (3.6)。比较两式， $r(v_z B_r - v_r B_z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt}$ ，所以

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{e}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt}.$$

两边对时间积分：

$$\gamma m r^2 \dot{\theta} - \frac{e}{2\pi} \Phi(r, z) = \text{常量}. \quad (4.1)$$

这里没有用任何近轴近似，只用了轴对称 ($\partial/\partial\theta = 0$ 、 $B_\theta = 0$) 与 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。

要点：Busch 定理

在轴对称、静态的磁场中，电子的 $\gamma m r^2 \dot{\theta} - e\Phi/2\pi$ 守恒 (Φ 是穿过电子所在位置、以轴为心的圆面的磁通)。若电子从光轴上出发 ($r = 0$ ， $\Phi = 0$)，或从无场区以零角动量射入，常量为零，于是

$$\dot{\theta} = \frac{e\Phi(r, z)}{2\pi\gamma m r^2} \approx \frac{eB(z)}{2\gamma m} \equiv \omega_L(z), \quad (4.2)$$

约等号用了 $\Phi \approx \pi r^2 B$ (近轴)。 $\omega_L = \omega_c/2$ 叫拉莫尔角频率。电子跟着当地的轴上场转动，离开磁场 ($\Phi \rightarrow 0$) 时转动立即停止。

注：正则角动量

学过矢势的读者可以这样理解：轴对称场的矢势只有环向分量 $A_\theta = \Phi/(2\pi r)$ ，式 (4.1) 的左边就是 $r(\gamma m v_\theta - eA_\theta)$ ，即带电粒子的正则角动量。它守恒是因为拉格朗日量与 θ 无关。本讲不需要这一套语言，上面的力矩推导已经完整。

检验：数值检验

在圆电流环的精确磁场中 ($a = 1 \text{ cm}$ ， $NI = 1000 \text{ A}$ ， $U = 10 \text{ kV}$) 数值积分精确的洛伦兹力方程。电子在 $z = -8a$ 处、离轴 $r = 0.3a$ 射入；那里场仍有中心值的 0.19%，为了模拟“从无场区以零角动量射入”，初始角速度按 Busch 常量为零给定。沿途用椭圆积分计算 Φ (附录 A)： $\gamma m r^2 \dot{\theta} - e\Phi/2\pi$ 的相对变化小于 10^{-10} (脚本 `verify_numeric.py`)。同一轨道到达线圈中心时已被会聚到 $r = 0.238a$ ，此处 $\dot{\theta}/\omega_L = 1.022$ (ω_L 按轴上场 $B(0)$ 计算)。Busch 常量为零时，这个比值正好是 $\Phi/(\pi r^2 B)$ ，椭圆积分给出的精确值为 1.02203。按式 (3.9) 展开， $\Phi/(\pi r^2 B) = 1 - r^2 B''/(8B) + \dots$ ，线圈中心 $B''/B = -3/a^2$ ，首阶为 $1 + 3r^2/(8a^2) = 1.021$ ；再加上 r^4 项 $\frac{15}{64}r^4/a^4 = 0.0008$ (附录 A.1)，得 1.022，与数值一致。若改用当地的 $B_z(r, 0)$ 计算角频率，比值则为 0.978。

机制 平行于轴射入的电子在进入线圈的边缘场时，经过 $B_r \approx -\frac{r}{2}B'$ 的区域。在这里 v_z 与 B_r 给出环向力 $-e(v_z B_r) > 0$ ，使电子开始绕轴旋转，获得环向速度 $v_\theta = r\omega_L$ 。随后环向速度与轴向场 B_z 一起产生径向力 $-ev_\theta B_z < 0$ ，指向轴。把 B 反向，两步的符号同时改变：旋转方向反过来，径

向力仍指向轴。这就是第 5 节“磁透镜总是会聚”的定性原因。

4.2 匀强场中的例子：螺旋线与拉莫尔系中的直线

在长螺线管内部（匀强场 B ），让电子从轴上一点以横向速度 $v_\perp$ 出发。把横向位置写成复数 $u = x + iy$ ：复平面就是垂直于轴的平面，一个复数乘以 $e^{i\psi} = \cos \psi + i \sin \psi$ 就是把对应的矢量逆时针转过 ψ ，乘以 i 就是转 90° 。由式 (3.3)， $\mathbf{B} = B\hat{z}$ 时 $-e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (-eB\dot{y}, eB\dot{x}, 0)$ ，两个分量方程为

$$\gamma m \ddot{x} = -eB\dot{y}, \quad \gamma m \ddot{y} = eB\dot{x}.$$

第二式乘以 i 与第一式相加： $\gamma m(\ddot{x} + i\ddot{y}) = eB(-\dot{y} + i\dot{x}) = ieB(\dot{x} + i\dot{y})$ ，即 $\gamma m\ddot{u} = ieB\dot{u}$ ：加速度总是速度转过 90° 。它的解是 $\dot{u} = v_\perp e^{i\theta_0} e^{i\omega_c t}$ （求导验证： $\frac{d}{dt} e^{i\omega_c t} = i\omega_c e^{i\omega_c t}$ ），横向速度以 ω_c 逆时针旋转。第 5.2 节会把同样的方法用于一般的轴对称场。积分并利用 $e^{i\omega_c t} - 1 = 2i \sin(\omega_L t) e^{i\omega_L t}$ ：

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{v_\perp e^{i\theta_0}}{i\omega_c} (e^{i\omega_c t} - 1) \\ &= \underbrace{\frac{v_\perp}{\omega_L} \sin(\omega_L t) e^{i\theta_0}}_{w(t)} e^{i\omega_L t}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

在实验室系中，横向投影是一个经过轴的圆（图 2(a)）。乘上 $e^{-i\omega_L t}$ ，即换到以 ω_L 同向转动的参考系，电子的横向位置 $w(t)$ 沿一条固定的直线做简谐振动（图 2(b)）。这与 Busch 定理一致：从轴出发的电子绕轴的角速度恒为 ω_L （转动参考系中为零）。

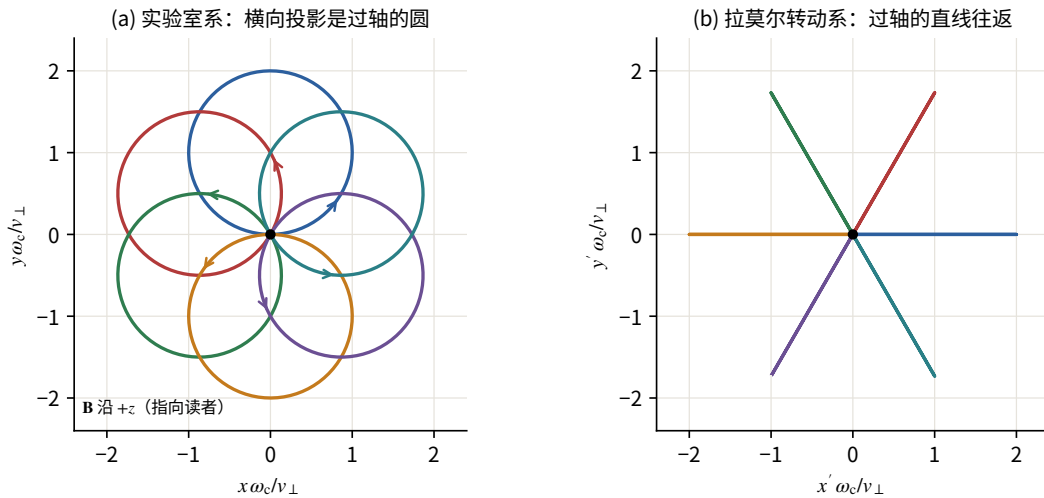


图 2 匀强磁场中从轴上同一点出发、横向速度方向不同的六个电子。(a) 实验室系：横向投影是经过轴的圆，半径 $v_\perp/\omega_c$ ；(b) 以拉莫尔角速度 $\omega_L = \omega_c/2$ 转动的参考系：每个电子沿一条过轴的直线做简谐振动。两图由式 (4.3) 计算，脚本核对了两者的一致性。

经过时间 $t = \pi/\omega_L = 2\pi/\omega_c$ ，所有电子同时回到轴上，与 $v_\perp$ 的大小和方向无关：这是一次“点对点成像”。在此期间电子沿轴前进

$$L = v_z \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi p_z}{eB} \approx \frac{2\pi p}{eB}. \quad (4.4)$$

小角度时 $p_z \approx p$ ，相对误差为 $\mathcal{O}(\alpha^2)$ ($\alpha = v_\perp/v_z$)。对非相对论电子 $p = \sqrt{2meU}$ ，于是 $e/m = 8\pi^2 U/(B^2 L^2)$ ，这就是 Busch 1922 年测比荷的原理（第 11 节的实验题）。对离轴物点，拉莫尔系

中 $w(t) = w_0 \cos(\omega_L t) + \frac{w_0}{\omega_L} \sin(\omega_L t)$, 在 $t = \pi/\omega_L$ 时为 $-w_0$ (倒像); 而参考系本身转过了 π , 两者合起来, 实验室中的像与物重合且正立, 放大率为 $+1$ 。

交互演示：匀强磁场（长螺线管）中从轴上出发的电子：左图为实验室系的横向投影（过轴的圆），右图为拉莫尔转动系（过轴的直线）。读数显示 Busch 守恒量 $\gamma m r^2 \dot{\theta} - e\Phi/2\pi$ 始终为零，以及回到轴上的距离 $L = 2\pi p/eB$ 。可调磁场与加速电压。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 eoptics-larmor）。

5 近轴运动方程：为什么磁透镜总是会聚

5.1 子午光线的径向方程

从轴上物点出发的电子，Busch 常量为零，它们的轨道始终位于一个绕轴转动（角速度 ω_L ）的平面内，这种光线叫子午光线。先求它的径向运动。

推导：径向方程

柱坐标中径向加速度是 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ （第二项是向心加速度）。径向的洛伦兹力为 $-e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_r = -e(v_\theta B_z - v_z B_\theta) = -er\dot{\theta}B_z$ 。于是（精确）

$$\gamma m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -er\dot{\theta}B_z. \quad (5.1)$$

近轴时 $B_z \approx B$ ，再代入 Busch 定理 $\dot{\theta} = \omega_L = eB/2\gamma m$ ：

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\omega_L^2 - \frac{eB}{\gamma m}r\omega_L \\ &= r\omega_L^2 - 2r\omega_L^2 = -\omega_L^2 r. \end{aligned}$$

离心项 $+r\omega_L^2$ 与洛伦兹径向力 $-2r\omega_L^2$ 部分抵消，剩下一个“弹簧力” $-\gamma m\omega_L^2 r$ ，它恒指向轴，劲度系数正比于 B^2 。

5.2 一般光线：复坐标与拉莫尔转动系

不从轴上出发的光线（Busch 常量不为零）一般不在子午面内，叫斜光线。成像要求所有光线（包括斜光线）都满足同一个线性方程。下面用复坐标一次性处理。

推导：实验室系中的近轴方程

令 $u = x + iy$ 。近轴时 $B_z \approx B(z)$, $B_x \approx -\frac{x}{2}B'$, $B_y \approx -\frac{y}{2}B'$ (式 (3.7)), $\dot{z} \approx v$ 。由式 (3.3) 写出两个横向分量：

$$\begin{aligned} \gamma m \ddot{x} &= -e(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y), \\ \gamma m \ddot{y} &= -e(\dot{z}B_x - \dot{x}B_z). \end{aligned}$$

第二式乘以 i 与第一式相加，整理 $(\dot{y} - i\dot{x} = -i\dot{u}, -\frac{y}{2} + i\frac{x}{2} = \frac{i}{2}u)$ 得

$$\gamma m \ddot{u} = ie\left(B\dot{u} + \frac{1}{2}\dot{B}u\right), \quad (5.2)$$

其中 $\dot{B} = \dot{z}B'(z)$ 是电子“感受到”的场的变化率。右边第一项是轴向场引起的回旋；第二项来自边缘场 B_r 。

推导：换到拉莫尔转动系

令 $u = w e^{i\Theta(t)}$ ，其中 $\dot{\Theta} = \omega_L = eB/2\gamma m$ ，即 w 是在以当地拉莫尔角速度转动的参考系中看到的横向位置。逐项求导：

$$\begin{aligned}\dot{u} &= (\dot{w} + i\omega_L w) e^{i\Theta}, \\ \ddot{u} &= (\ddot{w} + 2i\omega_L \dot{w} \\ &\quad + i\dot{\omega}_L w - \omega_L^2 w) e^{i\Theta}.\end{aligned}$$

代入式 (5.2)，两边除以 $\gamma m e^{i\Theta}$ ，并用 $eB/\gamma m = 2\omega_L$ 、 $e\dot{B}/2\gamma m = \dot{\omega}_L$ ：

$$\begin{aligned}\ddot{w} + 2i\omega_L \dot{w} + i\dot{\omega}_L w - \omega_L^2 w \\ = 2i\omega_L (\dot{w} + i\omega_L w) + i\dot{\omega}_L w.\end{aligned}$$

$\dot{w}$ 项两边相同（科里奥利力与洛伦兹力的回旋部分抵消）， $\dot{\omega}_L$ 项两边相同（边缘场的作用恰好是让参考系跟着转）。剩下

$$\ddot{w} = -\omega_L^2(t) w. \quad (5.3)$$

这就是第 5.1 节的径向方程，但现在对任意近轴光线成立：在拉莫尔系中， x 与 y 方向是两个互不耦合的、劲度系数随时间变化的谐振子。

5.3 以 z 为自变量：近轴光线方程

光学中关心的是光线的形状 $w(z)$ ，而不是 $w(t)$ 。由速率守恒， $\dot{z} = v/\sqrt{1 + r'^2 + r^2\theta'^2} = v[1 + \mathcal{O}(w'^2 + KB^2w^2)]$ （第 3 项来自绕轴转动，见第 7.2 节），近轴时取 $\dot{z} = v$ ，则 $\frac{d}{dt} = v\frac{d}{dz}$ ， $\ddot{w} = v^2 w''$ 。代入式 (5.3)，并用 $\gamma m v = p$ 、 $p^2 = 2meU^*$ ：

$$\begin{aligned}\frac{\omega_L^2}{v^2} &= \frac{e^2 B^2}{4(\gamma m v)^2} \\ &= \frac{e^2 B^2}{4 \cdot 2meU^*} = \frac{eB^2}{8mU^*}.\end{aligned}$$

要点：近轴光线方程与像旋转

在拉莫尔转动系中，任意近轴光线满足

$$\begin{aligned}w'' + k^2(z) w &= 0, \\ k^2(z) &= K B(z)^2, \quad K = \frac{e}{8mU^*}.\end{aligned} \quad (5.4)$$

拉莫尔系相对实验室系转过的角度为

$$\begin{aligned}\Theta(z) &= \int \omega_L dt = \int \frac{eB}{2p} dz \\ &= \sqrt{K} \int B(z) dz.\end{aligned} \quad (5.5)$$

相对论的全部影响只是 $U \rightarrow U^*$ （200 kV 时 $K = 9.19 \times 10^4 \text{ T}^{-2} \text{ m}^{-2}$ ）。

要点：磁透镜总是会聚

式 (5.4) 中 $k^2 = KB^2 \geq 0$ ，与 B 的符号无关。所以每一段磁场都把拉莫尔系中的光线推向轴：轴对称的静磁场只能做会聚透镜，不存在“磁凹透镜”。 B 的符号只决定像旋转的方向 (式 (5.5))。

注：与光学透镜的对照

玻璃透镜可凸可凹，所以可以用凸凹组合消除像差。磁透镜在近轴层次上只有“凸”的，这已经暗示了第 7 节的结论：球差也只有一种符号。式 (5.4) 与第 42 届复赛“自聚焦光纤”中的 $x'' + \alpha^2 x = 0$ 形式相同：在磁透镜里，“折射率梯度”由 B^2 提供。

5.4 基本光线、成像与放大率

式 (5.4) 是二阶线性方程，任何解都可以写成两个特解的线性组合。取物面在 z_o ，定义两条基本光线：

$$\begin{aligned} h(z_o) &= 0, & h'(z_o) &= 1; \\ g(z_o) &= 1, & g'(z_o) &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

h 是从轴上物点以单位斜率出发的光线（有长度量纲）， g 是从单位高度平行出发的光线（无量纲）。从物面上 w_o 处以斜率 w'_o 出发的任意光线为

$$w(z) = w_o g(z) + w'_o h(z). \quad (5.7)$$

推导：像面、放大率与朗斯基量

(i) 像面：若 $h(z_i) = 0$ ，则 $w(z_i) = w_o g(z_i)$ ，与出射斜率 w'_o 无关：从同一物点出发的所有光线会聚到同一像点。 z_i 就是像面，横向放大率 $M = g(z_i)$ 。

(ii) 朗斯基量：定义 $J = gh' - g'h$ 。求导并利用 $g'' = -k^2 g$ 、 $h'' = -k^2 h$ ：

$$\begin{aligned} J' &= g'h' + gh'' - g''h - g'h' \\ &= -k^2 gh + k^2 gh = 0. \end{aligned}$$

所以 J 沿轴不变，等于物面处的值 $J = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$ 。在像面 $h(z_i) = 0$ ，于是 $g(z_i)h'(z_i) = 1$ ，即

$$h'(z_i) = \frac{1}{M}. \quad (5.8)$$

物方斜率为 α 的光线到达像面时斜率为 α/M ：放大率越大，像方光线越“平”。这是几何光学中拉格朗日-亥姆霍兹不变量（玻璃光学中物、像两侧的 nyu 相等， y 为物高或像高、 u 为光线与轴的夹角、 n 为折射率）在本问题里的形式：这里 n 处处相同， $y u$ 在物方为 $1 \cdot \alpha$ ，在像方为 $M \cdot \alpha/M$ 。

回到实验室系，像还要整体转过角度 $\Theta(z_i) - \Theta(z_o) = \sqrt{K} \int_{z_o}^{z_i} B dz$ 。磁透镜的像是“放大 M 倍再转过 Θ ”。

6 薄磁透镜与 Glaser 场

6.1 Busch 焦距公式

假设：薄透镜近似

磁场集中在长度约 a 的区域内，且焦距 $f \gg a$ 。小参量为 a/f 。于是光线穿过磁场区时离轴距离几乎不变，只有斜率被改变。

推导：薄透镜的焦距

平行于轴、高度为 w_0 的光线射入。把式 (5.4) 对整个磁场区积分：

$$\begin{aligned} w'_{\text{出}} - w'_{\lambda} &= - \int k^2(z) w(z) dz \\ &\approx -w_0 \int k^2 dz, \end{aligned}$$

约等号用了“场区内 $w \approx w_0$ ”，丢掉的相对修正是 $\mathcal{O}(a/f)$ 。 $w'_{\lambda} = 0$ ，出射光线以斜率 $-w_0/f$ 射向焦点，于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= K \int_{-\infty}^{\infty} B(z)^2 dz \\ &= \frac{e}{8mU^*} \int B^2 dz. \end{aligned} \quad (6.1)$$

这就是 Busch 的焦距公式。在拉莫尔系中，薄磁透镜与薄玻璃透镜的数学形式完全相同，所以成像公式 $1/s_o + 1/s_i = 1/f$ 与横向放大率 $M = -s_i/s_o$ 照搬几何光学。像相对物的旋转角由式 (5.5) 给出：

$$\Theta = \sqrt{\frac{e}{8mU^*}} \int_{-\infty}^{\infty} B dz. \quad (6.2)$$

检验：量纲与标度

$[K] = \text{C}/(\text{kg} \cdot \text{V}) = \text{T}^{-2}\text{m}^{-2}$ （因为 $\text{T} = \text{kg}/(\text{C} \cdot \text{s})$, $\text{V} = \text{kg m}^2/(\text{C s}^2)$ ）， $[\int B^2 dz] = \text{T}^2\text{m}$ ，所以 $1/f$ 的单位是 m^{-1} ； Θ 无量纲。电压加倍，焦距加倍；电流加倍，焦距变为 $1/4$ ，旋转角加倍。

6.2 短线圈透镜

对式 (3.10) 积分（令 $z = a \tan \psi$ ）：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} B dz &= \mu_0 NI, \\ \int_{-\infty}^{\infty} B^2 dz &= \frac{(\mu_0 NI)^2 a^4}{4} \int \frac{dz}{(a^2 + z^2)^3} \\ &= \frac{3\pi(\mu_0 NI)^2}{32a}. \end{aligned}$$

第一个积分正是安培环路定理：沿轴从 $-\infty$ 到 $+\infty$ ，再从无穷远处绕回，回路套住 N 匝电流。代入式 (6.1)、(6.2)：

$$\frac{1}{f} = \frac{3\pi e\mu_0^2(NI)^2}{256 mU^*a},$$

$$\Theta = \sqrt{\frac{e}{8mU^*}} \mu_0 NI, \quad \Theta^2 = \frac{32}{3\pi} \frac{a}{f}. \quad (6.3)$$

最后一式消去了电流和电压：薄线圈透镜 ($f \gg a$) 的旋转角必然较小， $\Theta \approx 1.84\sqrt{a/f}$ ；要得到 $f \sim a$ 的强透镜，像必然转过 1 rad 量级。

检验：薄透镜公式的精度

$a = 1$ cm, $U = 10$ kV, 对精确轴上场 (3.10) 数值积分式 (5.4), 求平行光线的出射斜率 (脚本 `verify_numeric.py`): $NI = 100, 200, 400, 800$ A 时, 数值焦距比 Busch 公式分别大 0.31%、1.26%、5.2%、23%。偏差近似正比于 a/f , 与“丢掉 $\mathcal{O}(a/f)$ ”一致。 $NI = 400$ A 时, 精确追迹给出的半程旋转角 $\Theta(0) = 0.37084$ rad 与 $\sqrt{K} \mu_0 NI/2$ 吻合到五位有效数字。

图 3 是精确磁场、精确洛伦兹力下的轨迹：沿轴看，平行入射的电子先绕轴旋进再穿过轴；在拉莫尔系中看，它们是平面内的会聚光线。

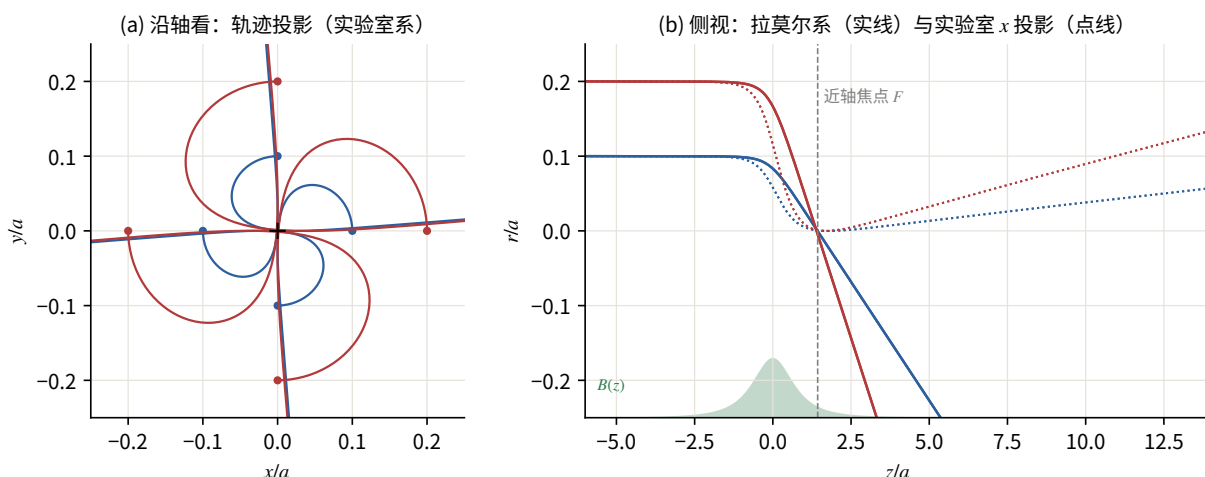


图 3 短线圈透镜中的电子轨迹 ($a = 1$ cm, $NI = 900$ A, $U = 10$ kV; 圆电流环精确场, 精确洛伦兹力追迹)。(a) 沿轴看到的横向投影, 圆点为入射位置 ($r_0 = 0.1a, 0.2a$, 四个方位); (b) 侧视: 实线是拉莫尔系中的离轴距离, 点线是实验室系的 x 坐标 (电子转出了 $x-z$ 平面), 绿色阴影为 $B(z)$ 。边缘光线比近轴焦点 F 稍早过轴, 这就是球差。

交互演示：短线圈磁透镜中的电子轨迹（精确线圈场，四阶龙格-库塔积分洛伦兹力）。上图：侧视，实线为拉莫尔系，虚线为实验室 x 投影；下图：沿轴看的横向投影（实验室系螺旋）。滑块调节安匝数 NI 、加速电压 U 与入射高度；读数给出 Busch 公式焦距、数值焦距与像旋转角。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 `eoptics-lens`）。

6.3 Glaser 钟形场的精确解与强透镜

薄透镜近似在 $f \sim a$ 时失效，而高分辨物镜恰恰工作在这一区间。Glaser 场 (3.12) 的近轴方程可以精确求解。定义无量纲的透镜强度

$$k_G^2 \equiv KB_0^2 a^2 = \frac{eB_0^2 a^2}{8mU^*},$$

$$\omega \equiv \sqrt{1 + k_G^2}. \quad (6.4)$$

要点：Glaser 场的精确光线

作变量代换 $z = a \cot \varphi$ (z 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 对应 φ 从 π 到 0)，式 (5.4) 的通解为

$$w = \frac{C_1 \sin \omega \varphi + C_2 \cos \omega \varphi}{\sin \varphi}. \quad (6.5)$$

推导见附录 C。从左方以高度 w_0 平行入射的光线是

$$w = w_0 \frac{\sin[\omega(\pi - \varphi)]}{\omega \sin \varphi}. \quad (6.6)$$

它在 $\omega(\pi - \varphi) = n\pi$ 处过轴，即 $\varphi_n = \pi(1 - n/\omega)$ ， $n = 1, 2, \dots < \omega$ 。

由式 (6.6) 可以读出两种“焦距” (附录 C)：

- 物镜焦距：光线第一次过轴发生在 $z_1 = -a \cot(\pi/\omega)$ 处 (强透镜时在场内)，过轴斜率为 $-w_0/f_o$,

$$f_o = \frac{a}{\sin(\pi/\omega)}. \quad (6.7)$$

物镜的样品就放在场中、这个焦点附近。

- 投影 (渐近) 焦距：把出射光线在远处的渐近直线反向延长求得， $f_p = -a\omega/\sin(\pi\omega)$ 。它对应把磁场当作一个整体、物和像都在场外的用法 (投影镜)。

检验：弱场极限与特例

$k_G^2 \ll 1$ 时 $\omega \approx 1 + k_G^2/2$ ，两种焦距都趋于 $2a/(\pi k_G^2)$ 。另一方面，Busch 公式给出 $1/f = K \int B^2 dz = K \cdot \pi a B_0^2/2 = \pi k_G^2/(2a)$ ，二者一致。 $k_G^2 = 3$ ($\omega = 2$) 时，第一个焦点恰在场中心 $z = 0$ ， $f_o = a$ 取最小值；出射光线在远处平行于轴、高度 $-w_0$ ($f_p = \infty$ ，“望远镜”状态)。 $k_G^2 = 8$ ($\omega = 3$) 时光线在场内两次过轴。数值积分与式 (6.7) 对 $k_G^2 = 0.5-8$ 一致到 10^{-6} (图 4)。

数量级 200 kV 时 $\sqrt{3/K} = 5.71 \times 10^{-3} \text{ T m}$ 。若要 $k_G^2 = 3$ 且 $a = 2 \text{ mm}$ ，需要 $B_0 = 2.86 \text{ T}$ ；纯铁的饱和磁化强度 $M_s \approx 1.7 \times 10^6 \text{ A/m}$ ，对应 $\mu_0 M_s \approx 2.1 \text{ T}$ [26]，高端极靴常用的铁钴钕合金 (如 Hiperco 50) 也只有约 2.4 T [27]，这就是极靴物镜的峰值场被限制在 2 T 量级、焦距被限制在毫米量级的原因 (例题 3)。整个 Glaser 场中的旋转角为 $\Theta = \sqrt{K} \int B dz = \sqrt{K} \pi a B_0 = \pi k_G$ ， $k_G^2 = 3$ 时为 $5.44 \text{ rad} \approx 312^\circ$ 。

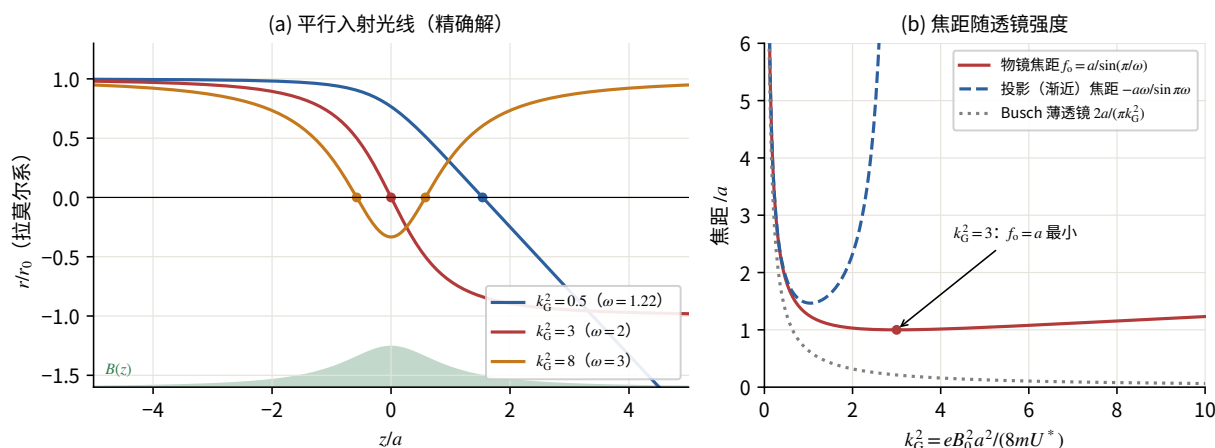


图 4 Glaser 钟形场。(a) 平行入射光线 (式 (6.6), 拉莫尔系), 圆点为过轴点 $\varphi_n = \pi(1 - n/\omega)$; (b) 物镜焦距 $f_0 = a/\sin(\pi/\omega)$ 、投影焦距与 Busch 薄透镜近似 $2a/(\pi k_G^2)$ 随 k_G^2 的变化。

交互演示：焦距与透镜强度：对圆电流环或 Glaser 场数值积分近轴方程，比较 Busch 薄透镜公式与精确焦距，并画出 $1/f$ 随 $(NI)^2/U^*$ 的变化。可调匝数、电压与场的宽度。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 eoptics-focus）。

7 球差与 Scherzer 定理

7.1 什么是球差

近轴方程 (5.4) 是对 w 、 w' 的线性近似。实际光线离轴更远、斜率更大时，还有正比于 w^3 、 $w w'^2$ 等的三阶项。对轴上物点，这些项使孔径角为 α 的光线不再精确地落在高斯像点（近轴像点）上。由旋转对称，偏差只能是 α 的奇函数，最低阶为 α^3 。

定义：球差系数

从轴上物点以斜率 α 出发的光线，在高斯像面上偏离轴的距离（沿子午面计，正向取与 h 光线在物方出射方向相同）为

$$\Delta r_i = M C_s \alpha^3 + \mathcal{O}(\alpha^5). \quad (7.1)$$

C_s 叫（物方）球差系数，单位为长度。 $C_s > 0$ 表示边缘光线偏折过度、在高斯像面之前就过轴，与凸玻璃透镜的球差同号。

由式 (5.8)，像方光线斜率为 α/M ，所以边缘光线过轴的位置在高斯像面之前 $M^2 C_s \alpha^2$ 处（纵向球差）。

7.2 三阶子午光线方程

假设：三阶计算的前提

(1) 场轴对称、静态，电子经过的区域无电流；(2) 物点在轴上，所以 Busch 常量为零，光线是子午光线（只需研究 r ）；(3) 电子始终沿 $+z$ 前进（ $\dot{z} > 0$ ），可以用 z 作自变量；(4) 保留到 r 、 r' 的三阶，小参量为 r/a 与 r' 。

推导：三阶方程（细节见附录 B）

第 1 步：精确的转动角速度。由 Busch 定理 (4.2) 与磁通的展开 (3.9)，记 $\omega_0 \equiv e/(2\gamma m)$ ：

$$\dot{\theta} = \frac{e\Phi}{2\pi\gamma m r^2} = \omega_0 \left(B - \frac{r^2}{8} B'' \right).$$

第 2 步：径向方程。把它与 $B_z = B - \frac{r^2}{4} B''$ 代入精确的径向方程 (5.1)，展开到 r^3 ：

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - 2\omega_0 r \dot{\theta} B_z \\ &= -\omega_0^2 B^2 r + \frac{\omega_0^2}{2} B B'' r^3. \end{aligned}$$

第 3 步：换自变量。速率守恒： $\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = v^2$ 。用 $\dot{r} = r' \dot{z}$ 、 $r \dot{\theta} = r \theta' \dot{z}$ 得 $\dot{z}^2 = v^2/(1+s^2)$ ，其中 $s^2 = r'^2 + r^2 \theta'^2$ 是二阶小量，且 $\theta'^2 \approx \omega_0^2 B^2/v^2 = K B^2$ 。由链式法则

$$\ddot{r} = \dot{z} \frac{d}{dz}(\dot{z} r') = \dot{z}^2 r'' + \frac{1}{2}(\dot{z}^2)' r'.$$

第 4 步：展开。 $\dot{z}^2 \approx v^2(1-s^2)$ ， $(s^2)' \approx 2K B B' r^2$ （ $r' r''$ 与 $K B^2 r r'$ 两项在首阶相消）。代入并除以 v^2 ，保留三阶：

$$\begin{aligned} r'' + K B^2 r &= F_3, \\ F_3 &= -K^2 B^4 r^3 - K B^2 r r'^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} K B B'' r^3 \\ &\quad + K B B' r^2 r'. \end{aligned} \tag{7.2}$$

F_3 的四项各有来历： $-K^2 B^4 r^3$ 与 $-K B^2 r r'^2$ 来自“电子总速率一定，横向运动越快、纵向越慢，在场中停留越久”； $B B'' r^3$ 来自磁场离轴的变化 (3.8) 与 (3.9)； $B B' r^2 r'$ 来自纵向速度沿轨道的变化。

7.3 像面上的偏差：常数变易

令 $r = \alpha h + \Delta r$ ，其中 αh 是近轴解， Δr 是三阶修正，满足 $\Delta r(z_0) = \Delta r'(z_0) = 0$ （初始位置、斜率都由 αh 给定）。代入式 (7.2)，右边只需保留首阶：

$$\Delta r'' + k^2 \Delta r = F_3(\alpha h) = \alpha^3 F_3(h). \tag{7.3}$$

推导：有源方程的解

设 $\Delta r(z) = \int_{z_0}^z [g(\zeta)h(z) - h(\zeta)g(z)]F(\zeta) d\zeta$, F 是右边的源。直接验证: $\Delta r(z_0) = 0$; 求导时积分上限处的项 $[g(z)h(z) - h(z)g(z)]F = 0$, 所以

$$\Delta r' = \int_{z_0}^z [g(\zeta)h'(z) - h(\zeta)g'(z)]F d\zeta,$$

$$\Delta r'(z_0) = 0;$$

再求导, 上限处的项变为 $[g(z)h'(z) - h(z)g'(z)]F(z) = JF = F$, 积分内的项变为 $-k^2\Delta r$ 。于是 $\Delta r'' + k^2\Delta r = F$ 。这就是常数变易法的结果: 把源 $F(\zeta)d\zeta$ 看成在 ζ 处给光线的一次小“踢”, 每一次踢的后果由两条基本光线传播到 z 。

在像面 $h(z_i) = 0$, $g(z_i) = M$:

$$\begin{aligned}\Delta r(z_i) &= -M \int_{z_0}^{z_i} h(\zeta)F(\zeta) d\zeta \\ &= -M\alpha^3 \int_{z_0}^{z_i} hF_3(h) dz.\end{aligned}\tag{7.4}$$

比较定义 (7.1), $C_s = -\int hF_3(h) dz$ 。

7.4 配方: Scherzer 定理

把式 (7.2) 的 F_3 (以 h 代 r) 代入, 得到

$$\begin{aligned}C_s &= \int_{z_0}^{z_i} \left[K^2 B^4 h^4 + KB^2 h^2 h'^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{K}{2} BB'' h^4 - KBB' h^3 h' \right] dz.\end{aligned}$$

第三项含 B'' , 符号不定。对它分部积分:

$$\begin{aligned}-\frac{K}{2} \int BB'' h^4 dz &= -\frac{K}{2} \left[BB' h^4 \right]_{z_0}^{z_i} \\ &\quad + \frac{K}{2} \int (B'^2 h^4 + 4BB' h^3 h') dz.\end{aligned}$$

边界项为零, 因为 h 在物面和像面都为零。合并后

$$\begin{aligned}C_s &= \int \left[K^2 B^4 h^4 + \frac{K}{2} B'^2 h^4 \right. \\ &\quad \left. + KB^2 h^2 h'^2 + KBB' h^3 h' \right] dz.\end{aligned}$$

后三项可以配成一个完全平方加一个非负项: $K(Bhh' + \frac{1}{2}B'h^2)^2 = K(B^2 h^2 h'^2 + BB' h^3 h' + \frac{1}{4}B'^2 h^4)$ 。

要点：球差积分与 Scherzer 定理

$$\begin{aligned}
C_s &= \int_{z_0}^{z_1} P \, dz, \\
P &= K^2 B^4 h^4 + \frac{K}{4} B'^2 h^4 \\
&\quad + K \left(B h h' + \frac{1}{2} B' h^2 \right)^2.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

三项都非负，且只要有磁场就不全为零。所以满足第 7.2 节前提的磁透镜，球差系数恒为正： $C_s > 0$ 。这就是 Scherzer 定理（1936 年 [9]）在磁透镜情形的内容。

注：与教科书形式的关系

再做一次分部积分（用 $h'' = -KB^2h$ ），式 (7.5) 可以化成文献中常见的形式 [11, 28]

$$C_s = \frac{e}{128mU^*} \int \left[\frac{3e}{mU^*} B^4 h^4 + 8B'^2 h^4 - 8B^2 h^2 h'^2 \right] dz,$$

后者最后一项为负，看不出正定性。两式的等价性用 sympy 核对过（脚本 `verify_sympy.py`，附录 B）。Scherzer 1936 年的原始证明走的是另一条路，这里的配方只是一个便于验证的初等版本。

要点：定理的每个前提用在哪里

1. 轴对称：Busch 定理（ Φ 只依赖 r, z ）与“偏差只能是 α^3 ”都靠它。
2. 静态：速率守恒 $\dot{z}^2 = v^2/(1+s^2)$ 靠它；场随时间变化时电子能量会变。
3. 电子所经区域无电流、无电荷： B_z 的展开 (3.8) 用了 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ 。（对静电透镜，对应的条件是轴上无空间电荷， $\nabla^2 \phi = 0$ 。）
4. 实像、电子不回头： h 在物、像两端为零，分部积分的边界项才消失； $\dot{z} > 0$ 才能用 z 作自变量。

第 9 节的每一种校正方案，都是有意破坏其中某一条。

7.5 数值验证与物理含义

用两类场检验式 (7.5)（脚本 `verify_numeric.py`、`fig_cs.py`）：(i) 圆电流环，离轴场用椭圆积分精确计算（与级数展开完全独立）；(ii) Glaser 场，200 kV。对每个透镜，先由近轴方程求出像面与 M ，再精确追迹孔径角 $\alpha = 2-8 \text{ mrad}$ 的电子，拟合 $\Delta r_i/(M\alpha^3)$ 并外推到 $\alpha \rightarrow 0$ 。表 3 显示两者一致到 10^{-5} 。图 5(b) 画出了式 (7.5) 的三项被积函数：它们处处非负，主要贡献来自场最强处。

几个物理结论：

- 弱透镜的球差很大。对单位放大率的弱 Glaser 透镜（例题 3），主导项是 $\frac{K}{2} B'^2 h^4$ ， $C_s \approx 4f^3/a^2$ ：

表 3 球差系数：式 (7.5) 的积分与精确追迹的比较（线圈： $a = 10$ mm, 10 kV；Glaser 场： $a = 2$ mm, 200 kV）

透镜	z_o/mm	z_i/mm	M	C_s (积分) /mm	C_s (追迹) /mm
线圈 $NI = 600$ A	-80	49.10	-0.617	7330.34	7330.33
线圈 $NI = 1000$ A	-50	16.72	-0.357	3032.39	3032.39
线圈 $NI = 1500$ A	-30	8.30	-0.356	736.55	736.55
Glaser $k_G^2 = 0.5$	-10	5.02	-0.530	252.76	252.76
Glaser $k_G^2 = 1.5$	-4	2.42	-0.702	18.615	18.615
Glaser $k_G^2 = 3$	-2.5	1.60	-0.800	5.790	5.790

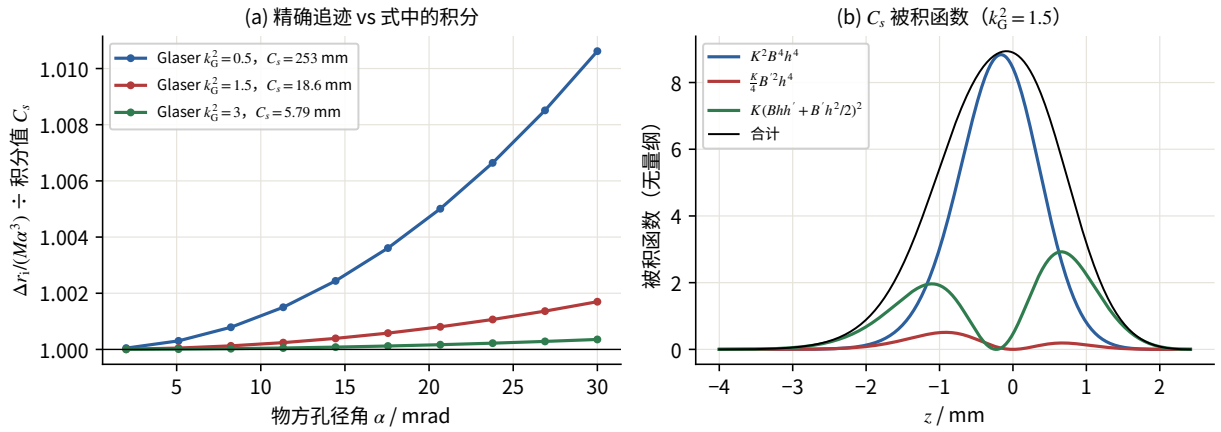


图 5 (a) 精确追迹得到的 $\Delta r_i / (M\alpha^3)$ 除以式 (7.5) 的积分值： $\alpha \rightarrow 0$ 时趋于 1，偏离按 α^2 增长（五阶像差）。(b) $k_G^2 = 1.5$ 的 Glaser 透镜（物在 $z = -4$ mm）中式 (7.5) 的三项被积函数（各项均无量纲，积分后单位为长度）。

f 是 a 的 10 倍时， C_s 是 f 的 400 倍。

- 强透镜的 C_s/f 较小。对物在焦点附近、 $M = -60$ 的 Glaser 物镜，数值计算给出 $C_s/f_o = 1.24, 0.61, 0.37, 0.30, 0.25$ ($k_G^2 = 0.5, 1, 2, 3, 5$)，并随 k_G^2 继续缓慢下降 ($k_G^2 = 10$ 时 0.21)。但 B_0 受限时， k_G^2 越大 a 越大， C_s 本身在 $k_G^2 \approx 3$ 附近最小（例题 1）。实际高分辨物镜的 C_s 为毫米量级，与 f_o 相当。
- 因此提高分辨率的传统办法是把透镜做得更短、更强，直到受铁饱和限制（第 6.3 节）。Scherzer 定理说明，在这条路上 C_s 永远不会变成零。

7.6 最小弥散圆

孔径角在 $[-\alpha, \alpha]$ 内的光线不会会聚到一点。观察面相对高斯像面移动时，光斑大小随之变化，存在一个最小值。

推导：最小弥散圆的位置与半径

用物方量描述（像方量乘以 M ，纵向距离乘以 M^2 ）。在离焦量为 Δf 的面上，斜率为 β 的光线的位置是 $x(\beta) = C_s \beta^3 + \Delta f \beta$ 。光斑半径 $R(\Delta f) = \max_{|\beta| \leq \alpha} |x(\beta)|$ 。 $\Delta f < 0$ 时， $x(\beta)$ 在端

点 $\beta = \alpha$ 处取 $C_s \alpha^3 + \Delta f \alpha$ ，在内部极值点 $\beta_*^2 = -\Delta f / (3C_s)$ 处取 $-\frac{2}{3} |\Delta f| \sqrt{|\Delta f| / (3C_s)}$ 。端点值随 $|\Delta f|$ 增大而减小，内部极值的绝对值随 $|\Delta f|$ 增大而增大，两者绝对值相等时 R 最小。取 $\Delta f = -\frac{3}{4} C_s \alpha^2$ 验证：端点 $x = C_s \alpha^3 / 4$ ； $\beta_* = \alpha / 2$ ， $x(\beta_*) = C_s \alpha^3 / 8 - \frac{3}{8} C_s \alpha^3 = -C_s \alpha^3 / 4$ 。所以

$$\begin{aligned} \Delta f_{lc} &= -\frac{3}{4} C_s \alpha^2, \\ R_{\min} &= \frac{1}{4} C_s \alpha^3. \end{aligned} \quad (7.6)$$

边缘焦点在 $\Delta f = -C_s \alpha^2$ 处 ($x(\alpha) = 0$)，所以最小弥散圆位于从高斯像面到边缘焦点的 $3/4$ 处，半径是高斯像面上光斑半径 $C_s \alpha^3$ 的 $1/4$ 。

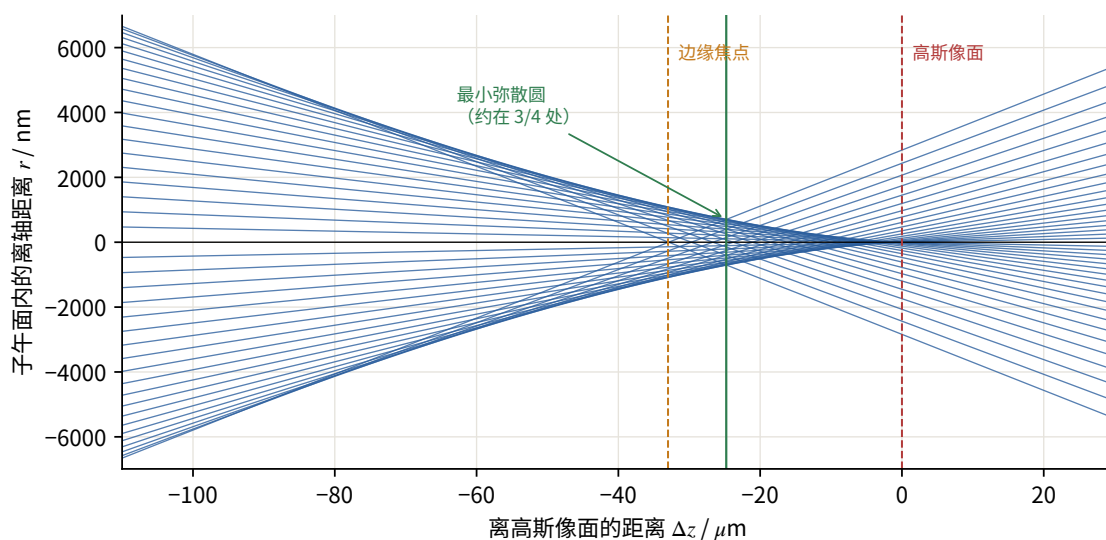


图 6 Glaser 透镜 ($k_G^2 = 1.5$, $a = 2$ mm, 200 kV, $M = -0.70$, $C_s = 18.6$ mm) 像面附近的光线扇, $|\alpha| \leq 60$ mrad, 精确追迹。数值求得的最小弥散圆位于高斯像面前 $24.78 \mu\text{m}$ 、半径 709 nm；式 (7.6) 换到像方 ($M^2 \Delta f_{lc}$ 、 $|M| R_{\min}$) 给出 $24.75 \mu\text{m}$ 、 705 nm。

8 分辨率：球差、衍射与色差

8.1 几何球差与衍射的平衡

物镜后焦面附近的物镜光阑限制了参与成像的孔径半角 α 。 α 越大，球差弥散 $\propto \alpha^3$ 越大； α 越小，衍射越严重。

前置知识：圆孔衍射与瑞利判据

波长为 λ 的波通过孔径半角为 α 的理想透镜，点物的像是艾里斑；折合到物面，第一暗环的半径为 $0.61\lambda / (n \sin \alpha)$ 。两个点的间距等于这个半径时恰好可以分辨（瑞利判据）。电子显微镜中 $n = 1$ ， α 只有几 mrad 到几十 mrad， $\sin \alpha \approx \alpha$ ，所以衍射极限为 $\delta_d = 0.61\lambda / \alpha$ 。对比：可见光 (550 nm) 油浸物镜 ($n \sin \alpha \approx 1.4$) 的衍射极限约 240 nm。

假设：几何判据

把两种弥散看成彼此独立的模糊，总弥散半径取平方和

$$\delta^2 = \delta_s^2 + \delta_d^2, \quad \delta_s = \frac{1}{4}C_s\alpha^3, \quad \delta_d = \frac{0.61\lambda}{\alpha},$$

其中 δ_s 是最小弥散圆半径（式 (7.6)）。这是一种约定；第 8.2 节会用波动光学给出更有物理意义的判据。

推导：最优孔径角

令 $\frac{d(\delta^2)}{d\alpha} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{6C_s^2\alpha^5}{16} - \frac{2(0.61\lambda)^2}{\alpha^3} &= 0 \\ \Rightarrow \alpha^8 &= \frac{16 \times 2 \times 0.61^2}{6} \frac{\lambda^2}{C_s^2} = 1.985 \frac{\lambda^2}{C_s^2}, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{opt}} &= 1.09 \left(\frac{\lambda}{C_s} \right)^{1/4}, \\ \delta_{\text{min}} &= 0.65 C_s^{1/4} \lambda^{3/4}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

表 4 不同判据下的最优孔径角与分辨极限（形式均为 $\alpha = c_1(\lambda/C_s)^{1/4}$, $\delta = c_2 C_s^{1/4} \lambda^{3/4}$ ）

判据	c_1	c_2
平方和 $\sqrt{\delta_s^2 + \delta_d^2}$ 最小（本讲）	1.09	0.65
线性和 $\delta_s + \delta_d$ 最小	0.95	0.86
令 $\delta_s = \delta_d$ ，取其中一项	1.25	0.49
Scherzer 欠焦下的相位衬度（第 8.2 节）	1.52	0.66

指数 1/4、3/4 与判据无关，系数随判据在 0.5–0.9 之间变化（表 4，由 `verify_sympy.py` 计算）。对 200 kV、 $C_s = 1.2 \text{ mm}$ ： $\alpha_{\text{opt}} = 7.4 \text{ mrad}$ ， $\delta_{\text{min}} = 0.24 \text{ nm}$ （图 7）。由于 C_s 只以 1/4 次方进入，即使把 C_s 减小 16 倍，分辨率也只提高 2 倍。这正是“改进圆透镜”这条路走不远的原因。

交互演示：球差光线扇与最优孔径：上图为像面附近的光线扇（由三阶像差公式 $x = C_s\beta^3 + \Delta f\beta$ 计算，用约化单位），标出高斯像面、边缘焦点、最小弥散圆，并用虚线画出同一单位下的衍射半径；下图为 δ_s 、 δ_d 与总弥散随 α 的变化。可调孔径角、 C_s 与加速电压。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 `eoptics-cs`）。

8.2 波像差与 Scherzer 欠焦

高分辨电镜观察的是很薄的样品。电子穿过样品时几乎不被吸收，只是波的相位被样品内的静电势改变。这种样品叫相位物体。几何光学的“光斑”概念不足以描述它的像，需要用波动光学。

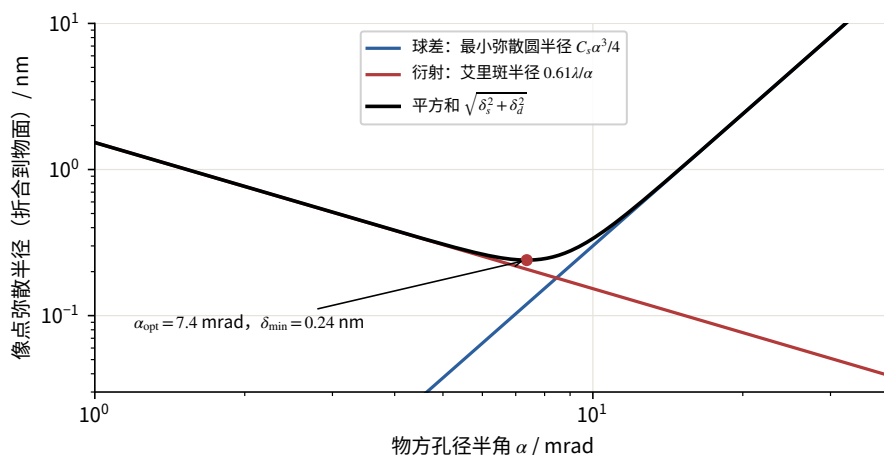


图 7 200 kV、 $C_s = 1.2 \text{ mm}$ 时，球差弥散 $C_s \alpha^3/4$ 、衍射 $0.61\lambda/\alpha$ 与二者平方和随孔径角的变化。最优点 $\alpha_{\text{opt}} = 7.4 \text{ mrad}$ 、 $\delta_{\text{min}} = 0.24 \text{ nm}$ 与式 (8.1) 一致。

前置知识：物镜后焦面：对每一束波分别加相位；余弦分解

几何光学：沿同一方向射入薄透镜的平行光，会聚到后焦面上同一点，离轴距离为 $f\alpha$ (α 是光线与轴的夹角)。所以样品射出的各个方向的平面波（透射束和各衍射束）在物镜后焦面上彼此分开，各占一个点。凡是只与方向有关的作用（像差引起的附加相位、物镜光阑的遮挡）都可以逐束施加：第 j 束乘以自己的因子。过了后焦面，各束重新交叠，在像面上干涉成像。另一个工具：任何周期性的分布都可以写成不同空间频率 q 的余弦（与正弦）之和，这叫傅里叶分解。本节只用到它的一个推论：若像对样品的响应是线性的，就可以对每个余弦分量单独计算，再把结果相加。

定义：波像差

从样品出发、与轴成 α 角传播的那一束平面波，到达像面时（按物方坐标）比沿轴的那一束多乘上一个相位因子 $e^{-i\chi(\alpha)}$ 。写成 $\chi = 2\pi W/\lambda$ ， $W(\alpha)$ 叫波像差（单位为长度，即光程差）。下面由自由传播的物理推出 W 的形式与符号（取平面波为 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ ， $|\mathbf{k}| = k_0 = 2\pi/\lambda$ ；对各束都相同的时间因子略去）。

推导：离焦与球差的波像差

(i) 离焦。平面波 $e^{i(k_x x + k_z z)}$ 中 $k_x = k_0 \sin \alpha \approx k_0 \alpha$ ， $k_z = k_0 \cos \alpha \approx k_0(1 - \alpha^2/2)$ 。沿 z 传播距离 Δz ，它乘上 $e^{ik_z \Delta z}$ ；相对沿轴的波（乘 $e^{ik_0 \Delta z}$ ），多出相位 $-k_0 \Delta z \alpha^2/2$ 。欠焦（透镜稍弱）时，由薄透镜公式 $1/s_o = 1/f - 1/s_i$ ， f 增大使与像面共轭的物面向上游移动 $|\Delta f|$ ：看到的是出射波“倒退传播” $\Delta z = \Delta f < 0$ 后的样子。于是多出的相位为 $-k_0 \Delta f \alpha^2/2 \equiv -\chi$ ，即

$$W_{\text{离焦}} = \frac{1}{2} \Delta f \alpha^2.$$

几何核对：从轴上物点以斜率 α 出发的光线，在 $\Delta z = \Delta f$ 的面上离轴 $x = \Delta f \alpha = dW/d\alpha$ 。

(ii) 一般关系 $x = dW/d\alpha$ 。看 α_0 附近的一小组方向，把 W 展开： $W(\alpha) \approx W(\alpha_0) + W'(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + \dots$ 。线性项给出因子 $e^{-ik_0 W'(\alpha_0) \alpha} = e^{-ik_x W'(\alpha_0)}$ 。而把一列波整体横移 Δx ， $e^{ik_x x} \rightarrow e^{ik_x (x - \Delta x)}$ ，正好乘上 $e^{-ik_x \Delta x}$ 。所以这组方向的波整体横移了 $\Delta x = W'(\alpha_0)$ ：沿 α_0 方向的光线在观察面上离轴 $dW/d\alpha$ 。这与 (i) 的几何核对一致，符号由平面波的形式 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ 决定，不是

约定。

(iii) 球差。由第 7.6 节，斜率为 α 的光线在离焦面上的位置 $x = C_s \alpha^3 + \Delta f \alpha = (\Delta f + C_s \alpha^2) \alpha$ ：球差相当于一个随角度增大的“过焦”。由 (ii)， $dW/d\alpha = \Delta f \alpha + C_s \alpha^3$ ，积分 ($W(0) = 0$) 得

$$W(\alpha) = \frac{1}{4} C_s \alpha^4 + \frac{1}{2} \Delta f \alpha^2. \quad (8.2)$$

Δf 是离焦量， $\Delta f < 0$ 称为欠焦。

推导：弱相位光栅的像

设样品使电子波的相位改变 $\phi(x) = \phi_0 \cos(2\pi qx)$ ， $|\phi_0| \ll 1$ （弱相位物体）， q 是空间频率。出射波

$$\begin{aligned} e^{i\phi} &\approx 1 + i\phi_0 \cos(2\pi qx) \\ &= 1 + \frac{i\phi_0}{2} e^{i2\pi qx} + \frac{i\phi_0}{2} e^{-i2\pi qx} \end{aligned}$$

是三列平面波：沿轴的透射波，和两列衍射波。由光栅方程，衍射波与轴的夹角为 $\alpha = \pm \lambda q$ 。三束波在物镜后焦面上分开（前置知识框），每一束各自乘上 $e^{-i\chi}$ ；透射束 $\alpha = 0$ ， $\chi = 0$ ；两束衍射波多出相位

$$\begin{aligned} \chi(q) &= \frac{2\pi}{\lambda} W(\lambda q) \\ &= \pi \Delta f \lambda q^2 + \frac{\pi}{2} C_s \lambda^3 q^4. \end{aligned} \quad (8.3)$$

两列衍射波的 χ 相同（ χ 是 q 的偶函数）。在像面上（按物方坐标），三列波重新叠加：

$$\psi = 1 + i\phi_0 \cos(2\pi qx) e^{-i\chi}.$$

强度 $I = |\psi|^2$ 到 ϕ_0 的一阶为（ $\phi_0 \cos(2\pi qx)$ 是实数，可以提到 Re 外面）

$$\begin{aligned} I &\approx 1 + 2\phi_0 \cos(2\pi qx) \operatorname{Re} [ie^{-i\chi}] \\ &= 1 + 2\phi_0 \sin \chi(q) \cos(2\pi qx). \end{aligned} \quad (8.4)$$

要点：相位衬度传递函数

空间频率为 q 的样品结构，以权重 $\sin \chi(q)$ 转化为像的强度起伏。任意相位分布 $\phi(x)$ 都可以分解为许多余弦的叠加（傅里叶分解）；弱相位近似下像强度对 ϕ 是线性的，各分量独立地按 $\sin \chi(q)$ 传递，所以 $\sin \chi(q)$ 叫相位衬度传递函数。没有像差、正焦时 $\chi = 0$ ，相位物体完全不可见。适当的球差加适当的欠焦反而产生衬度。

推导：Scherzer 欠焦

用无量纲量 $Q = q(C_s \lambda^3)^{1/4}$ 、 $D = \Delta f / \sqrt{C_s \lambda}$ ，式 (8.3) 化为

$$\chi = \pi D Q^2 + \frac{\pi}{2} Q^4.$$

$D < 0$ 时， χ 从 0 下降，在 $Q^2 = -D$ 处取最小值 $-\pi D^2/2$ ，然后回升，在 $Q^2 = -2D$ 处回到零。我们希望在尽量宽的频带内 $\sin \chi$ 保持同号且接近 -1 。Scherzer 的选择是令最小值为 $-2\pi/3$ ：这时 χ 在 $-2\pi/3$ 到 0 之间变化， $\sin \chi$ 在大部分区间接近 -1 ，而 χ 不会下降到 $-\pi$

使 $\sin \chi$ 回到零。于是 $D^2 = 4/3$ ，第一个零点 $Q_0^2 = 2|D|$ ：

$$\begin{aligned}\Delta f_{\text{Sch}} &= -\sqrt{\frac{4}{3}C_s\lambda} = -1.15\sqrt{C_s\lambda}, \\ \delta_{\text{Sch}} &= \frac{1}{q_0} = 0.66 C_s^{1/4} \lambda^{3/4}.\end{aligned}\quad (8.5)$$

检验：数值

200 kV、 $C_s = 1.2 \text{ mm}$ ： $\Delta f_{\text{Sch}} = -63 \text{ nm}$ ， $\delta_{\text{Sch}} = 0.244 \text{ nm}$ ，与表 4 的几何估计 0.24 nm 相近，也与文献报道的未校正 200 kV 场发射电镜点分辨率 0.24 nm 一致 [14, 29] ($C_s = 1.2 \text{ mm}$ 在这里是一个典型的假设值)。教科书中也常用 $\Delta f = -1.2\sqrt{C_s\lambda}$ ，对应系数约 0.65；系数取决于允许传递函数在通带内有多大起伏。Scherzer 1949 年的论文系统地讨论了离焦、照明和孔径对分辨率与衬度的影响 [30]。

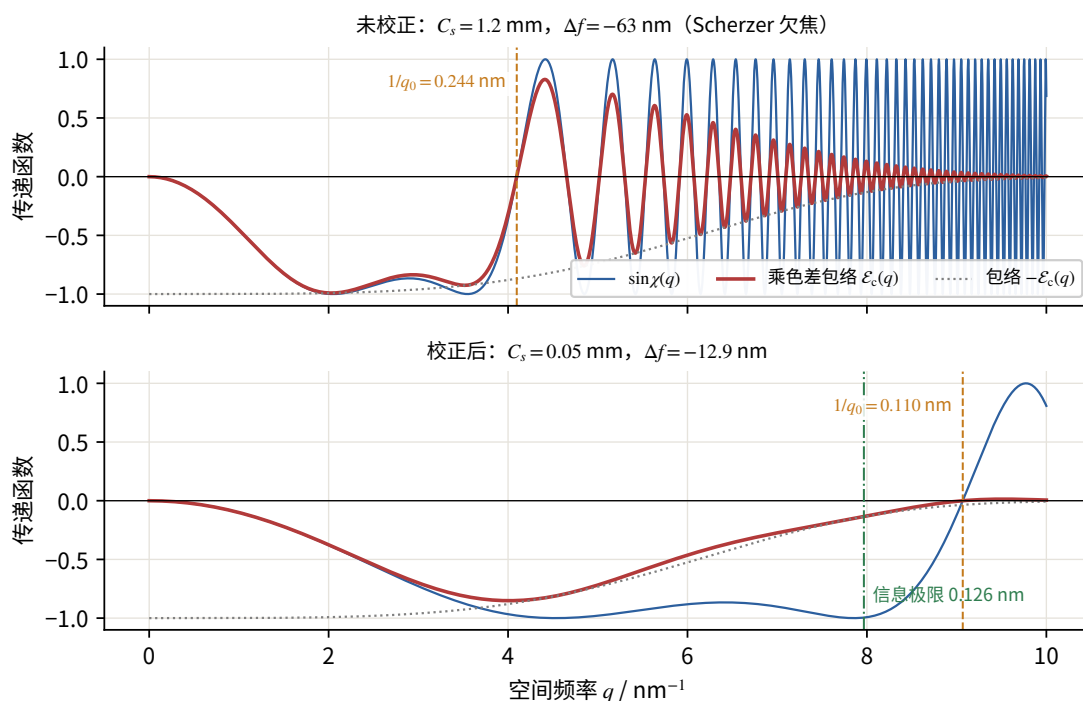


图 8 200 kV 的相位衬度传递函数 $\sin \chi(q)$ (蓝) 以及乘以色差包络 $\mathcal{E}_c(q)$ (式 (8.7), 取 $\sigma_f = 4 \text{ nm}$) 之后的结果 (红); 灰色点线为包络 $-\mathcal{E}_c(q)$ 。上: 未校正, $C_s = 1.2 \text{ mm}$, Scherzer 欠焦, 第一零点 $1/q_0 = 0.244 \text{ nm}$; 下: 球差校正到 $C_s = 0.05 \text{ mm}$, 相应的 Scherzer 欠焦, 通带一直延伸到信息极限 0.126 nm 。

交互演示：相位衬度传递函数 $\sin \chi(q)$ ：调节离焦量 Δf 、球差系数 C_s 、加速电压与焦距扩展 σ_f ；按钮“Scherzer 欠焦”自动设定 $\Delta f = -\sqrt{4C_s\lambda/3}$ 。读数给出第一零点 $1/q_0$ 与信息极限。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 eoptics-ctf)。

8.3 色差、能量展宽与信息极限

电子枪发出的电子能量并不完全相同。常见的电子枪有三类：热阴极 (把钨丝或 LaB_6 加热到很高温度, 靠热运动发射电子)、肖特基场发射枪 (加热与强电场共同作用)、冷场发射枪 (室温下纯靠强电场使电子隧穿出尖端)。能量分布的半高全宽依次减小：肖特基枪约 0.7 eV (对应标准差

约 0.3 eV；一台 200 kV 电镜的能谱系统分辨率实测为 0.65 eV[29])，冷场发射枪更小，热阴极更大 [31]。此外，高压电源有纹波，透镜电流也有起伏。由式 (6.1)， $1/f \propto B^2/U^* \propto I^2/U^*$ ，这些起伏都会改变焦距。

推导：色差系数

设 U^* 有相对变化 $\delta U^*/U^*$ 、透镜电流有相对变化 $\delta I/I$ 。 $k^2 = KB^2 \propto I^2/U^*$ 变为 $k^2(1 - \epsilon)$ ，其中

$$\epsilon = \frac{\delta U^*}{U^*} - 2 \frac{\delta I}{I} \quad (\text{一阶}) .$$

光线 $r = \alpha h + \Delta r$ 满足 $\Delta r'' + k^2 \Delta r = \epsilon k^2 \alpha h$ (把 $-k^2(1 - \epsilon)r$ 中多出的 $+\epsilon k^2 r$ 移到右边作为源)。由式 (7.4)，

$$\begin{aligned} \Delta r(z_i) &= -M \int h(\epsilon k^2 \alpha h) dz \\ &= -M \epsilon \alpha K \int B^2 h^2 dz \\ &\equiv -M C_c \alpha \epsilon, \\ C_c &= K \int_{z_o}^{z_i} B^2 h^2 dz > 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

折合到物面，偏差为 $-C_c \alpha \epsilon$ ；与离焦光线 $x = \Delta f \alpha$ (第 7.6 节) 对比，能量变化 ϵ 相当于离焦 $\Delta f = -C_c \epsilon$ 。能量偏高 ($\epsilon > 0$) 的电子偏折较弱，到达高斯像面时还没有过轴，相当于欠焦； C_c 的被积函数也非负，所以圆透镜的色差同样无法自行消除。对电压， $\delta U^*/U^* = \eta \delta U/U$ ， $\eta = (1 + eU/mc^2)/(1 + eU/2mc^2)$ ，200 kV 时 $\eta = 1.164$ 。

检验：数值

对 Glaser 透镜，把 K 改变 10^{-5} 后重新积分近轴方程，得到的像面位移与 $-MC_c \alpha \epsilon$ 吻合到 2×10^{-3} 以内 ($k_G^2 = 1.5$: $C_c = 5.961$ mm; $k_G^2 = 3$: $C_c = 3.019$ mm, 物距同表 3)。对 $M = -60$ 的 Glaser 物镜, $C_c/f_o = 0.81, 0.71, 0.63, 0.59$ ($k_G^2 = 0.5, 1, 2, 3$)。脚本 `verify_examples.py`。

几何上，能量展宽 ΔE (全宽) 使像点弥散的量级为 $\delta_c \approx C_c \alpha \eta \Delta E / E_k$ ($E_k = eU$ ；用全宽估计，只表示量级)。200 kV、 $C_c = 1.2$ mm、 $\Delta E = 0.7$ eV、 $\alpha = 7.4$ mrad 时 $\delta_c = 0.036$ nm，比球差弥散小得多；但若球差被校正、孔径角放大到 20 mrad， δ_c 增大到 0.098 nm，成为新的限制 (例题 1)。

推导：色差包络与信息极限

在相位衬度图像中，色差的效果是：不同能量的电子对应不同的离焦量 (上一个推导：能量变化 ϵ 相当于离焦 $-C_c \epsilon$)。设各电子的离焦量在 Δf 附近有高斯分布的起伏 ζ ，其标准差叫焦距扩展：

$$\sigma_f = C_c \sqrt{\left(\frac{\eta \sigma_E}{E_k}\right)^2 + \left(\frac{2 \sigma_I}{I}\right)^2},$$

σ_E, σ_I 是能量、电流起伏的标准差。由式 (8.3)， χ 多出 $\vartheta = \pi \lambda q^2 \zeta$ 。各电子的像强度相加，要求 $\sin(\chi + \vartheta) = \sin \chi \cos \vartheta + \cos \chi \sin \vartheta$ 对 ϑ 的平均。 ϑ 是均值为零、标准差为 $\sigma_\vartheta = \pi \lambda q^2 \sigma_f$ 的高斯变量，奇函数 $\sin \vartheta$ 的平均为零。对 $\cos \vartheta$ ，逐项平均它的泰勒级数 $\cos \vartheta = \sum_n (-1)^n \vartheta^{2n} / (2n)!$ ，并

用高斯分布的偶数阶矩 $\langle \vartheta^{2n} \rangle = (2n-1)!! \sigma_\vartheta^{2n} ((2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))$ ；对 $\int x^{2n} e^{-x^2/2\sigma^2} dx$ 分部积分即得递推 $\langle x^{2n} \rangle = (2n-1)\sigma^2 \langle x^{2n-2} \rangle$ 。再用 $(2n)! = 2^n n! (2n-1)!!$ ：

$$\begin{aligned} \langle \cos \vartheta \rangle &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (2n-1)!! \sigma_\vartheta^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\sigma_\vartheta^2}{2} \right)^n = e^{-\sigma_\vartheta^2/2}. \end{aligned}$$

所以传递函数变为 $\sin \chi(q) \mathcal{E}_c(q)$,

$$\mathcal{E}_c(q) = \exp \left[-\frac{1}{2} (\pi \lambda \sigma_f)^2 q^4 \right]. \quad (8.7)$$

取 $\mathcal{E}_c = e^{-2}$ 处为信息极限： $(\pi \lambda \sigma_f)^2 q_I^4 = 4$,

$$d_I = \frac{1}{q_I} = \sqrt{\frac{\pi \lambda \sigma_f}{2}}. \quad (8.8)$$

200 kV、 $C_c = 1.2 \text{ mm}$ 、 $\sigma_E = 0.3 \text{ eV}$ 时，仅能量展宽一项就给出 $\sigma_f = 2.1 \text{ nm}$ ；计入电源不稳后取 $\sigma_f = 4 \text{ nm}$ ，得 $d_I = 0.126 \text{ nm}$ 。作为对照，一台未作像校正的 200 kV 场发射电镜，厂方给出的点分辨率为 240 pm、信息极限为 110 pm[29]：未校正时，点分辨率由球差决定，远差于色差决定的信息极限。图 8 上图中，第一零点之后的传递函数仍不为零，但正负交替，像无法直接解读；下图中，校正球差后的通带一直延伸到信息极限。

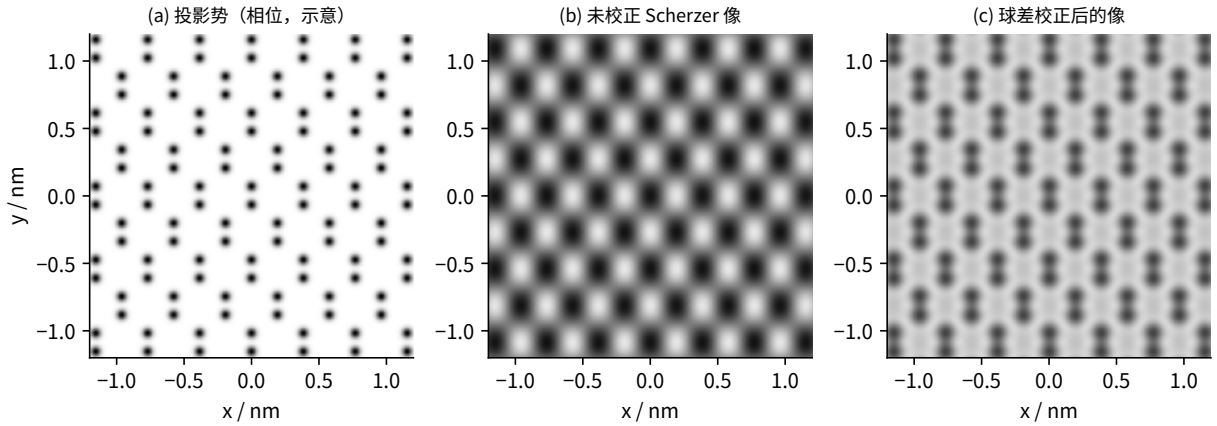


图 9 弱相位物体成像的示意模拟（按式 (8.4) 对每个空间频率分量乘以 $\sin \chi \mathcal{E}_c$ ）。(a) 投影势：原子柱两两成对（“哑铃”），间距 0.136 nm，排布仿照 Si [110] 投影（示意）；(b) 未校正（ $C_s = 1.2 \text{ mm}$ ，Scherzer 欠焦，物镜光阑截止于 q_0 ）：每个哑铃成为一个暗斑；(c) $C_s = 0.05 \text{ mm}$ ：哑铃的两个原子柱被分开。

9 绕过 Scherzer 定理：像差校正

9.1 破坏前提的几条路

Scherzer 在 1947 年就列出了绕开定理的办法 [10, 11]。按第 7.4 节要点框中的四个前提，可以归纳为表 5。

表 5 破坏 Scherzer 定理前提的途径

被破坏的前提	做法	例子
轴对称	四极子、六极子、八极子等多极场	六极子校正器 [12, 13]; 四极-八极子 [15]
静态	随时间变化的场 (配合脉冲电子束)	脉冲激励的像差校正 [32]
轴上无电荷	在光路中放置带电薄膜或空间电荷	箔透镜 [33]; 空间电荷透镜 [34]
电子不回头	静电镜: 电子减速、反向	双曲面电子镜 [35]; SMART[36]

电子镜的球差与色差与透镜反号 [35], 箔透镜要让电子穿过一层薄膜 (会散射电子), 时变场要求电子束是脉冲。真正在高分辨电镜中普及的是第一条: 多极子。下面用一个简化模型说明六极子怎样产生负球差。

9.2 多极场

设在一段长度上磁场只有横向分量 $B_x(x, y)$ 、 $B_y(x, y)$, 与 z 无关; 电子所经区域无电流。

推导：横向场可以写成 $x + iy$ 的多项式

在电子经过的区域无电流, 横向场满足 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 与 $\nabla \times \mathbf{B}$ 的 z 分量为零:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0.$$

把两个分量合成一个复数 $G \equiv B_x - iB_y$ 。验证: 取 $G = cu^n$ ($u = x + iy$, c 为复常数), 则 $B_x = \text{Re} G$, $B_y = -\text{Im} G$ 满足上面两个方程。因为 $\frac{\partial u^n}{\partial x} = nu^{n-1}$, $\frac{\partial u^n}{\partial y} = i nu^{n-1}$, 所以 $\frac{\partial G}{\partial y} = i \frac{\partial G}{\partial x}$ 。把 $G = B_x - iB_y$ 代入, 比较两边的实部与虚部:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_x}{\partial y} - i \frac{\partial B_y}{\partial y} &= i \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial x} \\ \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial y} &= \frac{\partial B_y}{\partial x}, \quad -\frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial B_x}{\partial x}, \end{aligned}$$

正是上面两个方程。所以任何 u 的多项式都给出一个合法的无源横向场:

$$\begin{aligned} B_x - iB_y &= c_0 + c_1 u + c_2 u^2 \\ &\quad + c_3 u^3 + \cdots \end{aligned} \quad (9.1)$$

反过来, 复变函数理论保证: 在一个不含电流的圆形区域内, 任何满足这两个方程的光滑场都能写成这样的幂级数 (本讲引用这一结论, 不证明)。 c_0 是均匀横向场 (偏转用的 “二极子”), $c_1 u$ 是四极场, $c_2 u^2$ 是六极场, $c_3 u^3$ 是八极场。它们分别由 4、6、8 个交替排列的磁极产生。

电子沿 $+z$ 以速率 v 运动时, 横向力 $\mathbf{F} = -ev \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B} = ev(B_y, -B_x)$, 即

$$\begin{aligned} F_x + iF_y &= ev(B_y - iB_x) \\ &= -iev(B_x + iB_y) = -iev \overline{G(u)}, \end{aligned}$$

上划线表示复共轭。用 $d/dt = v d/dz$, $u'' = (F_x + iF_y)/(\gamma m v^2) = -i(e/p)\overline{G}$ 。

- 四极场 $G = c_1 u$: $u'' \propto \bar{u}$ 。取适当的取向, $x'' = -\kappa_1 x$ 、 $y'' = +\kappa_1 y$: 一个方向会聚、另一个方向发散。四极子不轴对称, 是“柱面透镜”, 可以产生发散作用。
- 六极场 $G = c_2 u^2$: 选取六极子绕轴的取向, 使 $-i\bar{c}_2 e/p$ 为负实数, 记为 $-\kappa$, 则

$$w'' = -\kappa \bar{w}^2, \quad \kappa = \frac{e|c_2|}{p} \text{ (m}^{-3}\text{)}. \quad (9.2)$$

(六极子中没有轴向场, 拉莫尔转动不出现, 这里 $w = u$ 。) 力 $\propto \bar{w}^2$ 是位移的二次函数; 当 w 绕轴转过角度 ψ 时, $\bar{w}^2$ 转过 -2ψ , 所以作用图样有三重对称 (图 10(a))。它不轴对称, 这一阶的效果叫三重像散, 本身对成像有害。

9.3 两块六极子的组合：负球差

假设：简化校正器模型

(1) 两块相同的六极子, 长度 d 、强度 κ ; (2) 二者之间是一对理想圆透镜, 把第一块的中心面以放大率 -1 成像到第二块的中心面 (真实设计还要处理圆透镜的拉莫尔转动和像差, 这里忽略); (3) 光线在六极子中近似平行于轴入射, 高度 w_0 ; (4) 按 κ 的幂次做微扰, 保留到 κ^2 , 小参量为 $\kappa |w_0| d^2$ 。

推导：单块六极子, 到 κ^2 (细节见附录 D)

令 $w = w_0 + \kappa w_1 + \kappa^2 w_2$, 代入式 (9.2), 按 κ 的幂次比较。一阶: $w_1'' = -\bar{w}_0^2$, $w_1 = -\frac{1}{2}\bar{w}_0^2 z^2$ 。二阶: $\bar{w}^2 = \bar{w}_0^2 + 2\kappa \bar{w}_0 \bar{w}_1 + \dots$, 所以 $w_2'' = -2\bar{w}_0 \bar{w}_1 = +|w_0|^2 w_0 z^2$ 。出口处 ($z = d$) 的斜率改变为

$$\Delta w' = -\kappa \bar{w}_0^2 d + \frac{1}{3} \kappa^2 |w_0|^2 w_0 d^3.$$

第一项是三重对称的 ($\propto \bar{w}_0^2$); 第二项正比于 $|w_0|^2 w_0$, 沿径向向外, 大小 $\propto r^3$, 与方位无关: 它是轴对称的、发散性的三阶项, 正是负球差的形式。

要点：两块组合的结果

第二块六极子前的转移光学使光线变为 $-w$ 。在“展开”的坐标中, 这相当于符号相反的第二块六极子, 所以一阶的三重项在出口处位置与斜率都相互抵消; 二阶的组合项不抵消, 而是相加。到 κ^2 阶 (附录 D):

$$\Delta w'_{\text{总}} = +\frac{2}{3} \kappa^2 d^3 |w_0|^2 w_0. \quad (9.3)$$

它以入射坐标表示, 沿径向向外。数值积分式 (9.2) 验证了三重项的抵消和 $\frac{2}{3} \kappa^2 d^3 r^3$ 标度 (图 10, 相对偏差 $< 2\%$, $\kappa r d^2 \leq 0.0125$)。

与物镜配合 设校正器位于物镜之后、来自轴上物点的光线平行于轴的区域 (例如把物镜后焦面成像到校正器上), 光线高度 $r = f\alpha$ (f 是物镜焦距)。物镜的球差在这里表现为一个向内的额外斜率: 物方偏差 $C_s \alpha^3$ 相当于这个平行光区中斜率改变 $-C_s \alpha^3 / f$ (物在焦面上横移 Δx , 后方平行光的方向就改变 $\Delta x / f$)。校正器给出向外的斜率 $\frac{2}{3} \kappa^2 d^3 (f\alpha)^3$ 。二者抵消的条件是

$$C_s = \frac{2}{3} \kappa^2 d^3 f^4. \quad (9.4)$$

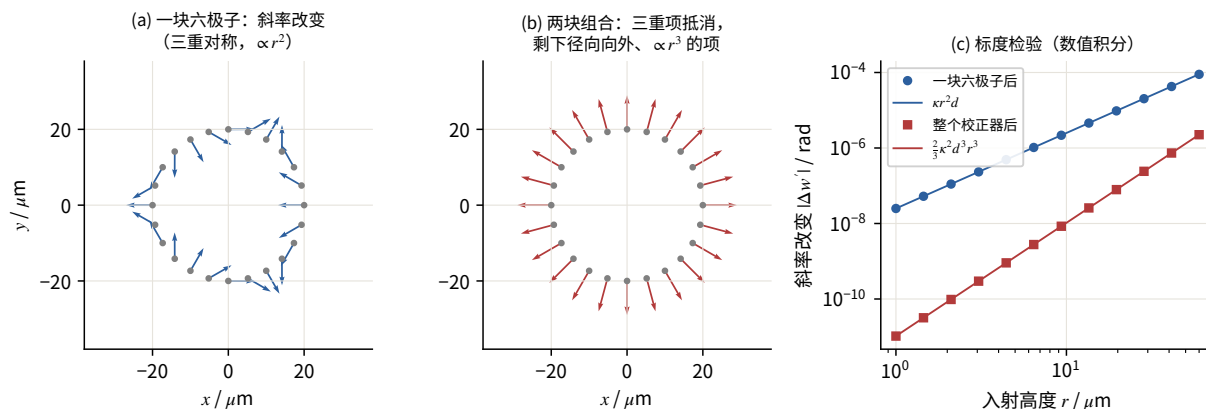


图 10 六极子校正器的简化模型 ($\kappa = 1 \times 10^6 \text{ m}^{-3}$, $d = 25 \text{ mm}$, 数值积分 $w'' = -\kappa \bar{w}^2$)。 (a) 高度 $20 \mu\text{m}$ 的一圈光线经过第一块六极子后的斜率改变: 三重对称、 $\propto r^2$; (b) 经过整个校正器后 (去掉整体 -1 反转): 三重项抵消, 剩下径向向外、 $\propto r^3$ 的项; (c) 两者随入射高度的标度, 直线为微扰公式。

取 $f = 2 \text{ mm}$ 、 $C_s = 1 \text{ mm}$ 、 $d = 25 \text{ mm}$, 200 kV : $\kappa = 2.4 \times 10^6 \text{ m}^{-3}$, 即 $|c_2| = \kappa p / e = 4.0 \times 10^3 \text{ T/m}^2$, 离轴 1 mm 处的场只有 4 mT 。所需的场并不强, 难点在于精度: $\alpha = 20 \text{ mrad}$ 时, 单块六极子产生的三重斜率约 $1 \times 10^{-4} \text{ rad}$, 必须由第二块抵消到远小于这个量; 因此实际校正器离不开精确的像差测量和计算机控制的反复调整 (例如文献 [17] 中的计算机控制校正系统)。在本模型中, 校正器不改变一阶成像, 只叠加一个可调的负球差; 真实设计的细节见文献 [12, 14]。

9.4 四极-八极子校正器与校正后的极限

另一种思路先用四极子把圆形电子束“压扁”成沿 x 方向的线 (式 (9.1) 下面的第一条), 在那里放一个八极子 (力 $\propto \bar{w}^3$)。对沿 x 拉长的光束, 八极子的主要作用是 x 方向上 $\propto x^3$ 的修正, 可以用来抵消 x 方向的球差; 在另一个把光束压扁成 y 方向线的位置放第二个八极子处理 y 方向; 第三个八极子消除残余的四重像散 (八极场一阶作用产生的、具有四重对称的像差)。这就是 Krivanek 等人在扫描透射电镜中实现的方案 [15–17]。

球差被校正之后, 限制分辨率的依次是: 五阶球差 C_5 与其他高阶像差; 色差 (信息极限, 式 (8.8)), 它可以用单色器 (只让很窄能量范围的电子通过的能量过滤器) 减小能量展宽, 或用更复杂的校正器同时校正 [20, 21]; 以及样品本身和机械、电磁的稳定性。2008 年 TEAM 项目报道了超过 50 pm 的信息传递 [18], 2009 年分辨了 47 pm 的原子间距 [19]。校正器还带来了新的成像方式: 有意“过度校正”, 把总球差调成适当的负值, 可以让原子柱显示为亮点、衬度更高; Jülich 的像校正电镜就把这种“负球差成像”作为典型的高分辨成像设置 [37]。

10 决赛风格例题

例题 1: 200 kV 电子显微镜的分辨极限

一台透射电子显微镜的加速电压 $U = 200 \text{ kV}$, 物镜球差系数 $C_s = 1.2 \text{ mm}$, 色差系数 $C_c = 1.2 \text{ mm}$ 。电子静能取 $mc^2 = 511.0 \text{ keV}$ 。

1. 求 U^* 、电子波长 λ 与 v/c 。若误用非相对论公式, 波长偏差多少?

- 按平方和判据求最优孔径角与分辨极限；再求 Scherzer 欠焦量与 Scherzer 分辨率。与可见光油浸显微镜 ($\lambda = 550 \text{ nm}$, $n \sin \alpha = 1.4$) 比较。
- 不校正球差, 若想把 Scherzer 分辨率提高到 0.1 nm : (a) 保持 C_s 不变, 加速电压需要多高? (b) 保持 200 kV , C_s 需要多小? 已知峰值场 $B_0 = 2.0 \text{ T}$ 的 Glaser 物镜 ($M = -60$) 的数值计算结果: $k_G^2 = 1, 2, 3, 4, 5, 10$ 时, $C_s = 1.27, 0.89, 0.86, 0.89, 0.95, 1.35 \text{ mm}$ 。评价 (b) 是否可行。
- 电子源能量分布的半高全宽 $\Delta E = 0.7 \text{ eV}$ (对应标准差约 0.3 eV)。用全宽估计孔径角为 α_{opt} 时色差弥散的量级 $\delta_c \approx C_c \alpha \eta \Delta E / E_k$ (η 见第 8.3 节, $E_k = eU$)。设球差已被校正、孔径角放大到 20 mrad , 色差弥散变为多少? 未校正时 20 mrad 下的球差弥散 (最小弥散圆半径) 又是多少?
- 同一个源, 能量起伏的标准差 $\sigma_E = 0.3 \text{ eV}$ (忽略电源起伏), 信息极限 d_I 是多少?
- (新情境: 没有极靴的“透镜”) 用长螺线管中的匀强磁场 B 做 $1:1$ 成像: 物点与像点都在场内, 相距 $L = 2\pi p / (eB)$ (第 4.2 节)。(a) 写出基本光线 $h(z)$ 与 $g(z)$, 求拉莫尔系与实验室系中的放大率; 由式 (7.5) 证明 $C_s = L/2$ 。(b) 用匀强场中精确的螺旋轨道独立推出同一结果。(c) 200 kV 、 $L = 10 \text{ cm}$ 时需要多大的 B ? C_s 与 Scherzer 分辨率是多少? 与第 (3) 问的极靴物镜比较, 说明物镜为什么要做得又短又强。(d) 在第 11 节实验题的装置中 ($U \approx 1 \text{ kV}$, $L = 15 \text{ cm}$, 偏转角约 10 mrad), 球差使屏上光斑扩大多少? 使“缩成一点”的电流偏移多少? 能否忽略?

解答

- $eU/2mc^2 = 200/1022 = 0.1957$, $U^* = 239.14 \text{ kV}$ 。由式 (3.2), $\lambda = 1.2264/\sqrt{239140} \text{ nm} = 2.508 \text{ pm}$ 。 $\gamma = 1 + 200/511 = 1.391$, $v/c = \sqrt{1 - 1/\gamma^2} = 0.695$ 。非相对论公式给出 2.742 pm , 偏大 9.3% 。
- 由式 (8.1): $(\lambda/C_s)^{1/4} = (2.508 \times 10^{-12}/1.2 \times 10^{-3})^{1/4} = 6.76 \times 10^{-3}$, $\alpha_{\text{opt}} = 7.4 \text{ mrad}$; $C_s^{1/4} \lambda^{3/4} = 0.371 \text{ nm}$, $\delta_{\text{min}} = 0.65 \times 0.371 = 0.24 \text{ nm}$ 。由式 (8.5): $\Delta f_{\text{Sch}} = -\sqrt{4 \times 1.2 \times 10^{-3} \times 2.508 \times 10^{-12}/3} = -63 \text{ nm}$, $\delta_{\text{Sch}} = 0.658 \times 0.371 = 0.244 \text{ nm}$ 。光学显微镜 $0.61 \times 550/1.4 = 240 \text{ nm}$, 约差 1000 倍; 但电子波长比光短约 2×10^5 倍, 电子显微镜远没有达到“波长极限”, $\delta_{\text{Sch}} \approx 100\lambda$ 。
- (a) $\delta \propto \lambda^{3/4}$, 所需 $\lambda = 2.508 \times (0.1/0.244)^{4/3} = 0.763 \text{ pm}$, 即 $U^* = (1.2264/0.000763)^2 \text{ V} = 2.58 \text{ MV}$ 。解 $U(1 + U/1.022 \text{ MV}) = 2.58 \text{ MV}$, 得 $U \approx 1.19 \text{ MV}$ 。(这里还假设了 C_s 不随电压变化。实际上电压越高, 维持同样的 k_G^2 需要越强的场; 受铁饱和限制只能加大 a , C_s 随之增大。)(b) $\delta \propto C_s^{1/4}$, 所需 $C_s = 1.2 \times (0.1/0.244)^4 \text{ mm} = 0.034 \text{ mm}$ 。 B_0 固定时, $a = \sqrt{k_G^2/K/B_0}$ 随 k_G^2 增大, 而 C_s/f_0 随 k_G^2 减小, 两者竞争使 C_s 在 $k_G^2 \approx 3$ 处取最小值约 0.86 mm (此时 $f_0 = a = 2.9 \text{ mm}$)。这比所需的 0.034 mm 大 25 倍, 不可行。这就是为什么必须绕过 Scherzer 定理。
- $\eta = 1.164$, $E_k = 200 \text{ keV}$ 。 $\alpha = 7.4 \text{ mrad}$: $\delta_c = 1.2 \times 10^{-3} \times 7.37 \times 10^{-3} \times 1.164 \times 0.7/2 \times$

$10^5 \text{ m} = 0.036 \text{ nm}$, 远小于球差弥散, 未校正时可以忽略。 $\alpha = 20 \text{ mrad}$: $\delta_c = 0.098 \text{ nm}$, 与目标分辨率同量级, 成为主要限制。未校正时 20 mrad 下 $C_s \alpha^3/4 = 2.4 \text{ nm}$: 放大孔径的前提是先消除球差。 (δ_c) 用全宽估计, 只表示量级; 若用标准差, 数值约小一半。

5. $\sigma_f = C_c \eta \sigma_E / E_k = 1.2 \times 10^{-3} \times 1.164 \times 0.3/2 \times 10^5 \text{ m} = 2.09 \text{ nm}$, $d_I = \sqrt{\pi \lambda \sigma_f/2} = 0.091 \text{ nm}$ 。实际电源和透镜电流的起伏使 σ_f 更大, 信息极限通常在 $0.1\text{--}0.13 \text{ nm}$ (正文取 $\sigma_f = 4 \text{ nm}$ 得 0.126 nm)。

6. (a) 匀强场中 $k = \sqrt{K} B$ 是常量。由定义 (5.6) (物面取 $z = 0$), $h = \sin(kz)/k$, $g = \cos(kz)$ 。像面 $h(L) = 0$ 要求 $kL = \pi$; 由 $k = \omega_L/v$, 这正是 $\omega_L t = \pi$, 与 $L = 2\pi p/(eB)$ 一致。拉莫尔系中 $M = g(L) = \cos \pi = -1$ (倒像), 而拉莫尔系转过 $\Theta = kL = \pi$, 所以实验室中 $M = +1$ (正立, 与第 4.2 节一致)。式 (7.5) 中 $B' = 0$, 第二项为零, 平方项只剩 $K(Bhh')^2 = k^2 h^2 h'^2$ 。被积函数

$$\begin{aligned} K^2 B^4 h^4 + K B^2 h^2 h'^2 &= k^4 h^4 + k^2 h^2 h'^2 \\ &= \sin^4 kz + \sin^2 kz \cos^2 kz = \sin^2 kz, \end{aligned}$$

所以 $C_s = \int_0^L \sin^2(kz) dz = L/2$ 。(b) 从轴上出发、与轴成 θ 角的电子, 回旋周期 $2\pi\gamma m/(eB)$ 与 θ 无关, 而纵向速度为 $v \cos \theta$, 所以它回到轴上的位置是 $L \cos \theta \approx L(1 - \theta^2/2)$ 。边缘光线的焦点在高斯像面之前 $L\theta^2/2$ 处。由第 7.1 节, 这个距离应等于 $M^2 C_s \alpha^2$; $M^2 = 1$, $\alpha \approx \theta$, 所以 $C_s = L/2$ 。(数值追迹精确螺旋线: $\alpha = 8\text{--}2 \text{ mrad}$ 时 $C_s/L = 0.49998\text{--}0.50000$, 偏差按 $-\frac{3}{8}\alpha^2$ 变化, 外推到 $\alpha \rightarrow 0$ 为 0.5 。)(c) $B = 2\pi p/(eL) = 2\pi \times 1.649 \times 10^{-3} \text{ T m}/0.1 \text{ m} = 0.104 \text{ T}$ 。 $C_s = 5 \text{ cm}$, $\delta_{\text{Sch}} = 0.658(C_s \lambda^3)^{1/4} = 0.62 \text{ nm}$, 而第 (3) 问的极靴物镜 $C_s \approx 0.86 \text{ mm}$, $\delta_{\text{Sch}} = 0.22 \text{ nm}$ 。 C_s 与成像区的长度同量级, 长透镜的 C_s 大; 只是由于 $\delta \propto C_s^{1/4}$, C_s 相差 60 倍, 分辨率只差约 3 倍。(d) 屏上光斑: $|M| C_s \alpha^3 = 0.075 \times (10^{-2})^3 \text{ m} = 75 \text{ nm}$, 远小于荧光屏颗粒。边缘光线的焦点提前 $L\alpha^2/2$, 相对提前量 $\alpha^2/2 = 5 \times 10^{-5}$; 要把它移回屏上, 场只需减小同样的相对量, 对应电流偏移 0.005% , 比判读误差 0.4% 小两个数量级, 可以忽略。所以实验题的聚焦条件用近轴方程是可靠的。

评分要点: U^* 的推导 (1 分); α_{opt} 的求极值与 Scherzer 条件 (2 分); (3) 的标度与可行性论证 (2 分); 色差与信息极限 (2 分); (6) 匀强场的 $C_s = L/2$ 两种推导与讨论 (3 分)。

例题 2: 短线圈磁透镜与“无旋转”双透镜

一个短线圈的平均半径 $a = 1.5 \text{ cm}$, 匝数 $NI = 600 \text{ A}$, 电子加速电压 $U = 30 \text{ kV}$ 。线圈截面尺寸可忽略。

1. 用 Busch 公式求焦距 f 与像旋转角 Θ 。判断薄透镜近似是否适用。
2. 物 (一个发光的电子源) 放在线圈前 25 cm 处, 求像距、横向放大率, 并描述实验室中看到的像与物的关系。
3. 把两个这样的线圈共轴放置, 中心相距 $L_{12} = 10 \text{ cm}$, 通以相反方向的电流。说明组合的像旋转角为零而会聚作用仍在; 用薄透镜组合公式求组合焦距 F 。数值积分给出: 反向

电流 $F = 10.68 \text{ cm}$, 同向电流 $F = 10.57 \text{ cm}$; $L_{12} = 5 \text{ cm}$ 时分别为 8.71 cm 与 7.59 cm , 而薄透镜组合公式给出 7.85 cm 。解释为什么同向、反向的焦距不同, 为什么 L_{12} 越小差别越大。

4. 证明 $\Theta^2 = 32a/(3\pi f)$, 并由此说明: 焦距与线圈半径同量级的强透镜, 像旋转角必然在 1 rad 量级。

解答

- $U^* = 30 \times (1 + 30/1022) \text{ kV} = 30.88 \text{ kV}$, $K = e/(8mU^*) = 7.12 \times 10^5 \text{ T}^{-2} \text{ m}^{-2}$ 。 $\mu_0 NI = 7.54 \times 10^{-4} \text{ T m}$, $\int B^2 dz = 3\pi(\mu_0 NI)^2/(32a) = 1.116 \times 10^{-5} \text{ T}^2 \text{ m}$, $f = 1/(K \int B^2 dz) = 12.6 \text{ cm}$ 。 $\Theta = \sqrt{K} \mu_0 NI = 0.636 \text{ rad} = 36.5^\circ$ 。 $f/a = 8.4$, 薄透镜近似的误差约为 a/f 量级: 数值积分精确轴上场给出 $f = 13.06 \text{ cm}$, 比 Busch 公式大 3.8% 。
- $1/s_i = 1/f - 1/s_o$, $s_i = 25.3 \text{ cm}$, $M = -s_i/s_o = -1.01$ 。(对照: 用精确轴上场数值积分近轴方程, 像在线圈中心后 27.3 cm , $M = -1.09$; 像距差 8% , 与 (1) 中焦距 3.8% 的偏差相呼应。) 在拉莫尔系中是一个倒立、几乎等大的实像; 回到实验室系, 还要转过 $\Theta = 36.5^\circ$ 。若 $\mathbf{B}$ 沿 $+z$, 从 $+z$ 方向往回看, 转动是逆时针的 (与电子回旋同向, 式 (4.2))。所以看到的像是物 “倒转 180° 再逆时针转 36.5° ”, 总共相当于转过 216.5° 的等大像。
- 旋转角 $\propto \int B dz$: 两线圈的场符号相反, $\int B dz = \mu_0 NI - \mu_0 NI = 0$, 所以 $\Theta = 0$ 。会聚 $\propto \int B^2 dz$, 与符号无关, 所以每个线圈仍是会聚透镜。薄透镜组合: $1/F = 2/f - L_{12}/f^2$, $F = 10.44 \text{ cm}$ 。
差别来自两个线圈磁场的重叠: $\int (B_1 \pm B_2)^2 dz = 2 \int B_1^2 dz \pm 2 \int B_1 B_2 dz$ 。同向时交叉项为正、会聚更强 (F 小), 反向时交叉项为负、会聚更弱 (F 大)。 $L_{12} = 10 \text{ cm}$ 时 $\int B_1 B_2 dz / \int B_1^2 dz = 1.2\%$, $L_{12} = 5 \text{ cm}$ 时为 8.9% , 所以 L_{12} 越小差别越大。(数值焦距还包含两个线圈各自的厚透镜修正, 约 4% 。) 实际电镜中常用一对反向的线圈或透镜来消除像旋转。
- 由式 (6.3), $\Theta^2 = K(\mu_0 NI)^2$, $1/f = K \cdot 3\pi(\mu_0 NI)^2/(32a)$, 二者相除消去 $K(\mu_0 NI)^2$, 得 $\Theta^2 f = 32a/(3\pi)$ 。 $f \sim a$ 时 $\Theta \sim \sqrt{32/3\pi} = 1.84 \text{ rad}$ 。物理上, 会聚需要 $\int B^2 dz$, 旋转来自 $\int B dz$; 对固定的场形, $\int B^2 dz \sim (\int B dz)^2/a$, 强会聚必然伴随大旋转。

评分要点: Busch 公式的两个积分 (3 分); 实验室系中像的取向 (2 分); 交叉项的论证 (3 分); $\Theta^2 f$ 关系及物理解释 (2 分)。

例题 3: Glaser 物镜——强透镜、铁饱和与球差

用 Glaser 场 $B = B_0/(1 + z^2/a^2)$ 模拟一个 200 kV 电镜的物镜, $K = 9.19 \times 10^4 \text{ T}^{-2} \text{ m}^{-2}$ 。

- 由式 (6.6) 推出物镜焦距 $f_o = a/\sin(\pi/\omega)$ 。对固定的 a , k_G^2 取何值时 f_o 最小? 此时焦点在何处?
- 极靴材料限制 $B_0 \leq 2.0 \text{ T}$ (保守取值)。在 $k_G^2 = 3$ 的条件下, a 与 f_o 最小为多少?

3. 数值计算表明, $k_G^2 = 3$ 、放大率 $M = -60$ 时 $C_s = 0.30f_o$ 。求 C_s 与 Scherzer 分辨率。
4. 电子穿过整个 Glaser 场, 像旋转多少?
5. (新情境)把同一种场作弱透镜($k_G^2 \ll 1$)用于等大成像(物、像分别在透镜中心两侧 $2f$ 处)。证明 $C_s \approx 4f^3/a^2$, 并说明为什么高分辨物镜必须是强透镜。可用 $\int B'^2 dz = \pi B_0^2/(4a)$ 。

解答

1. 第一次过轴处 $\omega(\pi - \varphi_1) = \pi$, $\varphi_1 = \pi - \pi/\omega$ 。由 $z = a \cot \varphi$, $dz/d\varphi = -a/\sin^2 \varphi$ 。对式 (6.6) 求导, 在 φ_1 处 $\sin[\omega(\pi - \varphi_1)] = 0$ 、 $\cos[\omega(\pi - \varphi_1)] = -1$, 得 $dw/d\varphi = w_0/\sin \varphi_1$, 于是

$$w'(z_1) = \frac{dw/d\varphi}{dz/d\varphi} = -\frac{w_0 \sin \varphi_1}{a},$$

$$f_o = -\frac{w_0}{w'(z_1)} = \frac{a}{\sin \varphi_1} = \frac{a}{\sin(\pi/\omega)}.$$

$\sin(\pi/\omega) \leq 1$, 等号在 $\omega = 2$ 即 $k_G^2 = 3$ 时成立, $f_o = a$ 。焦点 $z_1 = a \cot(\pi/2) = 0$, 在场的中心。

2. $k_G^2 = KB_0^2 a^2 = 3$, $a = \sqrt{3/K}/B_0 = 5.71 \times 10^{-3} \text{ T m}/2.0 \text{ T} = 2.86 \text{ mm} = f_o$ 。
3. $C_s = 0.30 \times 2.86 \text{ mm} = 0.86 \text{ mm}$, $\delta_{\text{Sch}} = 0.658 C_s^{1/4} \lambda^{3/4} = 0.224 \text{ nm}$: 比例题 1 的 $C_s = 1.2 \text{ mm}$ 只好 8%, 因为 $\delta \propto C_s^{1/4}$ 。
4. $\Theta = \sqrt{K} \int B dz = \sqrt{K} \pi a B_0 = \pi k_G = \pi \sqrt{3} = 5.44 \text{ rad} = 312^\circ$, 与 a 、 B_0 的具体值无关。
5. 薄透镜内 $h \approx 2f$; 入射一侧 $h' \approx +1$, 出射一侧 $h' \approx -1$ 。用 Busch 公式 $1/f = K\pi a B_0^2/2$, 即 $KB_0^2 = 2/(\pi a f)$, 估计式 (7.5) 中各项对 C_s 的贡献 ($B' \sim B_0/a$, 积分区间长 $\sim a$):

- 含 $B'^2 h^4$ 的两部分 (第二项和平方项展开中的 $\frac{K}{4} B'^2 h^4$): $\sim KB_0^2 h^4/a \sim f^3/a^2$;
- $K^2 B^4 h^4$: $\sim K^2 B_0^4 h^4 a \sim f^2/a$, 小 a/f 倍;
- $KBB'h^3 h'$: $\sim KB_0^2 h^3 \sim f^2/a$, 小 a/f 倍;
- $KB^2 h^2 h'^2$: $\sim KB_0^2 h^2 a \sim f$, 小 $(a/f)^2$ 倍。

所以

$$C_s \approx \frac{K}{2} (2f)^4 \int B'^2 dz = 8Kf^4 \cdot \frac{\pi B_0^2}{4a}$$

$$= 2\pi f^4 \frac{KB_0^2}{a} = 2\pi f^4 \cdot \frac{2}{\pi a^2 f} = \frac{4f^3}{a^2}.$$

数值积分在 $k_G^2 = 0.02$ 、 0.05 、 0.1 时: 把物放在透镜中心前 $2f$ (f 取 Busch 值, 此时实际 $M = -1.03$ 、 -1.08 、 -1.16), $C_s/(4f^3/a^2) = 1.008$ 、 1.019 、 1.037 ; 若严格取 $M = -1$ 并用投影焦距 f_p 归一, 则为 1.022 、 1.052 、 1.092 。偏差都随 a/f 增大, 与上面的估计一致。 $f = 10a$ 时 $C_s = 400f$, 而强透镜 $C_s \approx 0.3f$: 弱透镜的球差大三个数量级。

评分要点: f_o 的推导与极值 (3 分); 铁饱和给出的尺度 (2 分); (5) 的量级比较与积分 (4 分); 旋转角 (1 分)。

例题 4: Busch 线聚焦——屏上亮线的旋转与缩短

电子经 $U = 1000 \text{ V}$ 加速后, 沿长螺线管的轴射入匀强场 B (场方向沿 $+z$)。入口处一对偏转板加交变电压, 使电子获得沿 x 方向、大小在 $\pm v_{\perp\max}$ 之间变化的横向速度 ($v_{\perp\max} \ll v$), 没有磁场时荧光屏上出现一条沿 x 方向的亮线。不计相对论效应。

1. 屏在场内、距入口 $L = 20 \text{ cm}$ 。证明屏上亮线仍是一条过轴的直线, 它相对 x 轴转过 $\phi = \omega_L T$ ($T = L/v$), 长度变为无场时的 $|\sin \phi / \phi|$ 倍。求亮线第一次缩成一点所需的 B_1 。
2. 从屏的后面 ($+z$ 方向) 往回看, 亮线向哪个方向转? 如果改用正离子, 结果有什么不同?
3. 实际上螺线管只延伸到 $L_{\text{in}} = 15 \text{ cm}$, 之后是 $L_d = 5 \text{ cm}$ 的无场区才到屏 (边缘场的宽度可以忽略)。用 Busch 定理说明电子离开磁场后在实验室系中做什么运动, 求亮线缩成一点的条件和所需的磁场。

解答

1. 每个电子都从轴上出发, Busch 常量为零。由式 (4.3) ($\theta_0 = 0$), 时刻 T 的横向位置为

$$u = \frac{v_{\perp}}{\omega_L} \sin(\omega_L T) e^{i\omega_L T} = v_{\perp} T \frac{\sin \phi}{\phi} e^{i\phi}.$$

对所有 $v_{\perp} \in [-v_{\perp\max}, v_{\perp\max}]$, 相位因子 $e^{i\phi}$ 相同, 模长正比于 $v_{\perp}$ 。所以屏上的点排成一条过轴、与 x 轴成 ϕ 角的直线, 长度为无场时 $2v_{\perp\max}T$ 的 $|\sin \phi / \phi|$ 倍。第一次缩成一点: $\phi = \pi$, 即 $eBL/(2mv) = \pi$,

$$B_1 = \frac{2\pi mv}{eL} = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{2mU}{e}} = 3.35 \text{ mT}.$$

2. 由第 3.2 节, 电子绕 B 逆时针回旋 (从 $+z$ 往回看), 拉莫尔转动同向, 所以亮线随 B 增大逆时针转动。正离子回旋方向相反, 亮线顺时针转。这是判断粒子电荷符号的一种方法。
3. 离开磁场后 $\Phi = 0$, Busch 定理给出 $\gamma m r^2 \dot{\theta} = 0$: 电子不再绕轴转动, 在实验室系中做匀速直线运动, 而且是子午直线运动 ($\dot{\theta} = 0$)。这就是拉莫尔系在出口处“停止转动”后的直线延长。在拉莫尔系中, 出口处 $w = (v_{\perp}/\omega_L) \sin \phi_e$ 、 $w' = (v_{\perp}/v) \cos \phi_e$, 其中 $\phi_e = \omega_L L_{\text{in}}/v$ 。到屏上:

$$w_{\text{屏}} = \frac{v_{\perp}}{\omega_L} \left(\sin \phi_e + \frac{\omega_L L_d}{v} \cos \phi_e \right).$$

它对所有 $v_{\perp}$ 同时为零的条件是 $\tan \phi_e = -\omega_L L_d/v$, 即 ϕ_e 在 $(\pi/2, \pi)$ 内: 电子出场时还在轴的上方、正向轴运动, 靠无场区的直线漂移到达轴。数值求解得 $\phi_e = 2.456 \text{ rad}$, $B = 3.49 \text{ mT}$, 比场一直延伸到屏时所需的 3.35 mT 大 4%。直接数值积分阶跃场中的拉莫尔系方程, 屏上的残余离轴量小于最大离轴量的 2×10^{-3} 。

评分要点: 复数解与亮线的转角、长度 (4 分); 转向与电荷符号 (2 分); 用 Busch 定理处理出口 (2 分); 聚焦条件与数值 (2 分)。

11 实验与数据处理：纵向磁场聚焦法测电子比荷

例题 5 (实验题)：有限长螺线管中的 Busch 法

装置：示波管水平放置，管轴大致沿南北方向，套在一个单层螺线管内，二者共轴。螺线管长 $\ell = 24.0\text{ cm}$ ，半径 $R_s = 4.5\text{ cm}$ ，1400 匝。电子从阳极小孔附近的交叉点（电子束截面最小、可看作点源的位置）射出，紧接着穿过一对偏转板。偏转板上加交变电压，使电子获得大小不等的横向速度；偏转板很短且紧靠交叉点，各电子横向速度的“出发点”（有效偏转中心）可视为与交叉点重合，位于轴上 $z_a = -7.5\text{ cm}$ 处。荧光屏在 $z_s = 7.5\text{ cm}$ ， $L = z_s - z_a = 15.0\text{ cm}$ （坐标原点在螺线管中心）。没有磁场时屏上是一条亮线；调节螺线管电流 I ，使亮线第一次缩成一点（即屏与偏转中心成像共轭，参见例题 4），记下电流。对每个加速电压 U ，电流正、反两个方向各测一次： I_+ 时螺线管场与地磁场沿管轴的分量 B_E 同向， I_- 时反向。另用霍尔探头在轴上测量每安培电流产生的磁场 $b(z) = B/I$ 。数据见表 6 与表 7。

本题数据为按模型生成的模拟数据：聚焦电流由第 5 节的近轴方程对有限长螺线管场、沿轴地磁分量（未告知）与相对论修正精确求解，再加相对 0.4% 的随机判读误差并读到 1 mA；霍尔读数加 0.3% 的随机误差。随机种子事先固定为 20261017（脚本 `scripts/exp_data.py`）。

1. 忽略地磁场。说明对给定的场形 $b(z)$ ，聚焦条件只依赖于 I^2/U^* ，因此 $I \propto \sqrt{U^*}$ 。
2. 令 $s(z) = \sin[\pi(z - z_a)/L]$ 。设拉莫尔系中聚焦光线为 $w(z)$ ， $w(z_a) = w(z_s) = 0$ 。证明恒等式

$$\int_{z_a}^{z_s} \left(k^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \right) w s \, dz = 0,$$

再用 $w \approx s$ （场接近均匀）得到聚焦条件，导出

$$\frac{e}{m} = \frac{4\pi^2 U}{L\beta_2 I^2},$$

$$\beta_2 \equiv \int_{z_a}^{z_s} b(z)^2 \sin^2 \frac{\pi(z - z_a)}{L} \, dz.$$

3. 计入地磁场，证明 $I_{\pm} \approx \Gamma\sqrt{U} \mp \Delta I$ （ Γ 是与地磁场无关的斜率），其中 $\Delta I = B_E \beta_1 / \beta_2$ ， $\beta_1 = \int b \sin^2[\pi(z - z_a)/L] dz$ 。据此应怎样处理两组数据？
4. 以 $\sqrt{U}$ 为横坐标，对 $\bar{I} = (I_+ + I_-)/2$ 作最小二乘直线拟合 $\bar{I} = \Gamma\sqrt{U} + I_0$ ，给出斜率、截距及其不确定度。截距与零相容吗？理论上截距为零，再作过原点的单参数拟合 $\bar{I} = \Gamma_0\sqrt{U}$ ，比较两种拟合给出的斜率不确定度，并讨论各自的风险。
5. 由霍尔数据计算 β_1 、 β_2 （Simpson 公式），用两种拟合分别求 e/m 及其不确定度，并与推荐值 $1.75882 \times 10^{11}\text{ C/kg}$ 比较。由 ΔI 求 B_E 。
6. 讨论系统误差：(a) 若把螺线管当作长度为 L 、场为中心值 $b(0)I$ 的均匀场，或用平均场 $\frac{1}{L} \int b \, dz$ 代替（相当于要求拉莫尔转角为 π ）， e/m 各偏多少？哪种做法更可信，为什么？(b) 相对论修正在两种拟合下各有多大，为什么不同？(c) 电压表准确度 0.5%、偏转中心位置不确定 1 mm 的影响。提出改进方案。

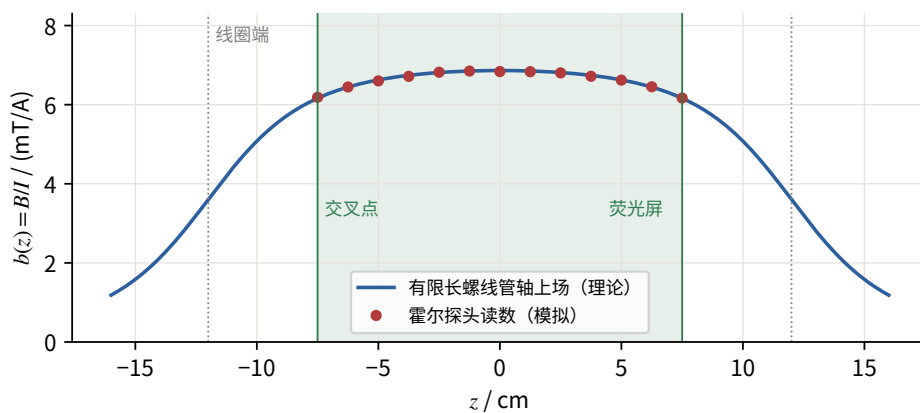


图 11 实验题的螺线管轴上场：曲线为式 (3.11) 的理论值（每安培），圆点为表 7 的霍尔读数，阴影为电子飞行区间 $[z_a, z_s]$ 。场在两端比中心低约 10%。

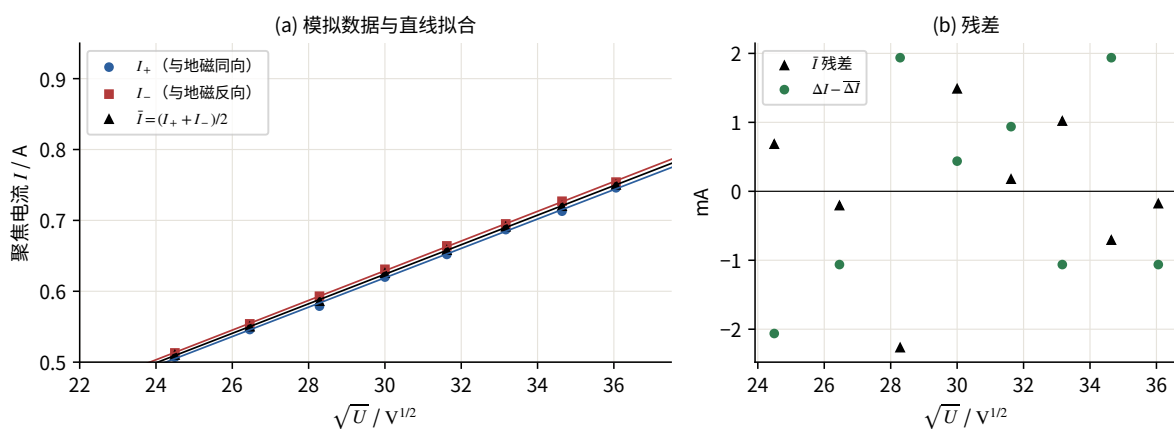


图 12 实验题数据处理。(a) $I_{\pm}$ 与 $\bar{I}$ 对 $\sqrt{U}$ 的直线拟合；(b) $\bar{I}$ 拟合的残差和 ΔI 相对其平均值的起伏，都在判读误差范围内，看不出系统性的弯曲。

表 6 聚焦电流 (模拟数据)

U/V	$\sqrt{U}/\text{V}^{1/2}$	I_+/A	I_-/A	$\bar{I}/\text{A}$
600	24.495	0.507	0.513	0.5100
700	26.458	0.546	0.554	0.5500
800	28.284	0.579	0.593	0.5860
900	30.000	0.620	0.631	0.6255
1000	31.623	0.652	0.664	0.6580
1100	33.166	0.687	0.695	0.6910
1200	34.641	0.713	0.727	0.7200
1300	36.056	0.746	0.754	0.7500

表 7 霍尔探头测得的轴上场 $b(z) = B/I$ (模拟数据)

z/cm	-7.5	-6.25	-5.0	-3.75	-2.5	-1.25	0
$b/(\text{mT}/\text{A})$	6.187	6.447	6.601	6.716	6.820	6.850	6.838
z/cm	1.25	2.5	3.75	5.0	6.25	7.5	
$b/(\text{mT}/\text{A})$	6.835	6.803	6.718	6.621	6.452	6.167	

解答

1. 拉莫尔系方程 $w'' + KI^2 b(z)^2 w = 0$, $K = e/8mU^*$ 。场形 $b(z)$ 固定时, 方程只含参数 $KI^2 \propto I^2/U^*$ 。聚焦条件 $w(z_s) = 0$ 决定这个参数的一个确定值, 所以 $I \propto \sqrt{U^*}$ 。 $U \leq 1.3 \text{ kV}$ 时 $U^*/U - 1 \leq 0.13\%$, 先用 $\sqrt{U}$ 处理, 在 (6) 中估计修正。
2. $s'' = -(\pi/L)^2 s$, $s(z_a) = s(z_s) = 0$ 。用 s 乘 $w'' + k^2 w = 0$ 并积分, 对第一项分部积分两次:

$$\begin{aligned} \int w'' s \, dz &= [w' s - w s']_{z_a}^{z_s} + \int w s'' \, dz \\ &= -\frac{\pi^2}{L^2} \int w s \, dz, \end{aligned}$$

边界项为零, 因为 w 与 s 在两端都为零。于是 $\int (k^2 - \pi^2/L^2) w s \, dz = 0$, 这是精确的。均匀场时 $w \propto s$; 场接近均匀时 $w = s + \delta w$, δw 是小量。由于括号 $(k^2 - \pi^2/L^2)$ 本身也是同阶小量, 用 $w \approx s$ 只引入二阶误差:

$$\begin{aligned} KI^2 \int b^2 s^2 \, dz &= \frac{\pi^2}{L^2} \int s^2 \, dz = \frac{\pi^2}{2L} \\ \Rightarrow I^2 &= \frac{\pi^2}{2LK\beta_2} = \frac{4\pi^2 m U^*}{e L \beta_2}, \end{aligned}$$

即 $e/m = 4\pi^2 U^*/(L\beta_2 I^2)$ 。物理意义: 聚焦条件要求的是 B^2 以 $\sin^2$ 为权重的平均, 权重在飞行区间中部最大, 因为那里电子离轴最远、磁场的“弹簧力”作用最强。均匀场时 $\beta_2 = b^2 L/2$, 回到 $e/m = 8\pi^2 U/(B^2 L^2)$ 。

3. 总场 $B = Ib \pm B_E$ 。代入上式的推导, $\int (Ib \pm B_E)^2 s^2 \, dz = I^2 \beta_2 \pm 2IB_E \beta_1 + \mathcal{O}(B_E^2)$, 聚焦条件为 $I^2 \beta_2 \pm 2IB_E \beta_1 = \pi^2/(2LK)$ 。 $B_E/(Ib) \approx 3.4 \times 10^{-5}/(0.65 \times 6.8 \times 10^{-3}) \approx 0.8\%$,

保留到一阶： $I_{\pm} = \sqrt{\pi^2/(2LK\beta_2)} \mp B_E\beta_1/\beta_2 \equiv \Gamma\sqrt{U} \mp \Delta I$ 。所以取平均 $\bar{I}$ 消去地磁场，取半差 $\Delta I = (I_- - I_+)/2$ 求 B_E 。

4. 最小二乘公式 (附录 E)： $n = 8$ ， $\bar{x} = 30.590$ ， $S_{xx} = \sum(x_i - \bar{x})^2 = 113.88 \text{ V}$ 。得斜率 $\Gamma = (2.0835 \pm 0.0118) \times 10^{-2} \text{ A/V}^{1/2}$ ，截距 $I_0 = (-1.0 \pm 3.6) \text{ mA}$ ，残差标准差 $s_r = 1.26 \text{ mA}$ 。截距与零相容 (0.3σ)，符合 $I \propto \sqrt{U}$ 。(按 0.4% 的判读误差，预期 $s_r \approx 0.004 \times 0.65 \text{ A}/\sqrt{2} = 1.8 \text{ mA}$ ；自由度为 6 时，由残差估计的 s_r 本身有约 30% 的统计起伏，二者相容。)

过原点拟合：使 $\sum(\bar{I}_i - \Gamma_0 x_i)^2$ 最小，得 $\Gamma_0 = \sum x_i \bar{I}_i / \sum x_i^2$ ， $u(\Gamma_0) = s_r / \sqrt{\sum x_i^2}$ (s_r 用 $n - 1 = 7$ 个自由度估计)。 $\sum x_i^2 = \sum U_i = 7600 \text{ V}$ ，得 $\Gamma_0 = (2.0802 \pm 0.0013) \times 10^{-2} \text{ A/V}^{1/2}$ ， $s_r = 1.17 \text{ mA}$ 。斜率的相对不确定度从 0.57% 降到 0.065%，小了将近一个数量级：带截距拟合时，数据集中在 $x = 24\text{--}36$ 一段，斜率与截距强烈相关 (附录 E 中 $\bar{x}^2/S_{xx}$ 很大)，截距的自由度吞掉了大部分信息。风险：若存在模型之外的常数偏置 (电流表零点、未被反向消去的剩余磁场等)，过原点拟合会把它全部算进斜率，造成偏差；带截距拟合对常数偏置是稳健的。本组数据的截距与零相容，可以采用过原点拟合，但两种结果都应报告。若分别拟合 $I_{\pm}$ ，截距为 $(-2.7 \pm 7.3) \text{ mA}$ 与 $(0.7 \pm 3.8) \text{ mA}$ ，外推误差太大，看不出 $\pm\Delta I$ 的差别；直接平均 8 个 ΔI 则得 $\Delta I = (5.06 \pm 0.54) \text{ mA}$ ，精确得多。

5. 权重 $\sin^2[\pi(z - z_a)/L]$ 在 13 个点上依次为 0、0.067、0.25、0.5、0.75、0.933、1、... (对称)。Simpson 公式 (步长 1.25 cm)： $\beta_2 = 3.453 \times 10^{-6} \text{ T}^2 \text{ m/A}^2$ ， $\beta_1 = 5.088 \times 10^{-4} \text{ T m/A}$ 。由霍尔读数 0.3% 的误差传递， $u(\beta_2)/\beta_2 = 0.23\%$ 。于是

$$\frac{e}{m} = \frac{4\pi^2}{L\beta_2\Gamma^2} = 1.756 \times 10^{11} \text{ C/kg},$$

相对不确定度 $\sqrt{(2 \times 0.57\%)^2 + (0.23\%)^2} = 1.15\%$ ，即 $e/m = (1.756 \pm 0.020) \times 10^{11} \text{ C/kg}$ ，与推荐值相差 -0.16% (0.14σ)。用过原点拟合的 Γ_0 ： $e/m = 1.762 \times 10^{11} \text{ C/kg}$ ，相对不确定度 $\sqrt{(2 \times 0.065\%)^2 + (0.23\%)^2} = 0.26\%$ ，现在主要来自霍尔读数，即 $e/m = (1.762 \pm 0.005) \times 10^{11} \text{ C/kg}$ ，与推荐值相差 $+0.16\%$ (0.6σ)。地磁场 $B_E = \Delta I \beta_2 / \beta_1 = (3.4 \pm 0.4) \times 10^{-5} \text{ T}$ ，是地磁场水平分量的合理量级。

6. (a) 均匀场近似 $e/m = 8\pi^2/(\Gamma^2 b(0)^2 L^2)$ ，用 $b(0) = 6.838 \text{ mT/A}$ 得 $1.729 \times 10^{11} \text{ C/kg}$ ，偏低 1.7%：中心场高估了两端的场。平均场 (拉莫尔转角 $= \pi$) $e/m = 8\pi^2/[\Gamma^2(\int b dz)^2]$ ， $\int b dz = 9.991 \times 10^{-4} \text{ T m/A}$ ，得 $1.822 \times 10^{11} \text{ C/kg}$ ，偏高 3.6%：它把两端 (电子离轴很近、几乎不受“弹簧力”) 的弱场与中部同等对待，低估了有效场。为了把方法本身的偏差与相对论效应分开，用非相对论、无噪声、无地磁场的精确聚焦电流检验三种方法：中心场 -1.9% ，平均场 $+3.9\%$ ， $\sin^2$ 加权 $+0.007\%$ 。 $\sin^2$ 加权的残差是二阶小量，可以忽略：用来近似真实光线 w 的函数 $s(z)$ (称为试探函数) 本身有一阶误差，聚焦条件的误差却是二阶的。所以 (2) 的方法最可信，平均场的“转角为 π ”条件只在场缓变 (变化尺度远大于 L) 时成立。(b) 真实的相对论修正是 $U^*/U - 1 = eU/2mc^2$ ，在 600–1300 V 间为 0.06%–0.13%。用 $\sqrt{U^*}$ 代替 $\sqrt{U}$ 重新拟合：过原点拟合中 e/m 增大 0.10%，与平

均修正一致，得 $1.763 \times 10^{11} \text{ C/kg}$ ($+0.26\%$, 约 1σ)；带截距拟合中却增大 0.27% 。原因是修正随 U 增大，相当于给直线加了一点弯曲，自由截距把它转成了斜率的变化，放大了约 3 倍。两种情形都不超过各自的统计误差。(c) 电压表 0.5% 直接给 e/m 0.5% 的 B 类不确定度（由仪器准确度等非统计方法估计的不确定度，区别于由重复测量统计得到的 A 类不确定度），在过原点拟合下已是主要误差之一。 $e/m \propto 1/(L\beta_2)$ ，而 β_2 近似正比于 L ，所以 $e/m \propto L^{-2}$ ， $\delta L = 1 \text{ mm}$ 带来 1.3% ，是最大的系统误差来源。改进：标定偏转中心的位置（例如用不同的屏位置或第二焦点 $\phi = 2\pi$ 的数据，消去 z_a ）；增加数据点或重复判读以减小随机误差；用更长的螺线管使场更均匀；把装置转到东西方向或加磁屏蔽以减小 B_E 。

12 小结：推导链

1. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 、 $\nabla \times \mathbf{B} = 0 \Rightarrow$ 近轴场 $B_r \approx -\frac{r}{2}B'$ ， $B_z \approx B - \frac{r^2}{4}B''$ （式 (3.7)、(3.8)）。
2. 洛伦兹力矩 + 高斯定律 $\Rightarrow$ Busch 定理 $\gamma m r^2 \dot{\theta} - e\Phi/2\pi = \text{常量}$ （式 (4.1)） $\Rightarrow$ 拉莫尔转动 $\omega_L = eB/2\gamma m$ 。
3. 复坐标 + 拉莫尔系 $\Rightarrow w'' + KB^2w = 0$ ， $K = e/8mU^*$ （式 (5.4)） $\Rightarrow$ 磁透镜只会聚；像旋转 $\Theta = \sqrt{K} \int B dz$ 。
4. 薄透镜 $\Rightarrow$ Busch 公式 $1/f = K \int B^2 dz$ （式 (6.1)）；Glaser 场精确解 $\Rightarrow$ 强透镜 $f_o \geq a$ （式 (6.7)）。
5. 精确径向方程 + Busch 定理 + 速率守恒，展开到三阶 $\Rightarrow F_3$ （式 (7.2)）；常数变易 $\Rightarrow \Delta r_i = -M \int hF dz$ （式 (7.4)）；分部积分、配方 $\Rightarrow$ 正定的 C_s （式 (7.5)），即 Scherzer 定理。同一套方法给出 $C_c = K \int B^2 h^2 dz > 0$ 。
6. 球差 $\frac{1}{4}C_s\alpha^3$ 与衍射 $0.61\lambda/\alpha$ 平衡 $\Rightarrow \delta \approx 0.65C_s^{1/4}\lambda^{3/4}$ ；波像差 $\chi(q)$ + 弱相位物体 $\Rightarrow$ 传递函数 $\sin \chi$ ，Scherzer 欠焦 $\Rightarrow 0.66C_s^{1/4}\lambda^{3/4}$ ；色差包络 $\Rightarrow$ 信息极限 $\sqrt{\pi\lambda\sigma_f/2}$ 。
7. 无源横向场 $B_x - iB_y$ 可写成 $u = x + iy$ 的多项式 $\Rightarrow$ 多极场；六极子二阶组合项 $\propto |w|^2 w$ 向外 $\Rightarrow$ 两块六极子消去三重像散、留下负球差 $\frac{2}{3}\kappa^2 d^3$ （式 (9.3)）。

参考文献

- [1] B. Kabius, M. Haider, S. Uhlemann, E. Schwan, K. Urban, and H. Rose. First application of a spherical-aberration corrected transmission electron microscope in materials science. *Journal of Electron Microscopy*, 51(Suppl. 1):S51–S58, 2002. doi: 10.1093/jmicro/51.supplement.s51.
- [2] H. Busch. Eine neue Methode zur e/m -Bestimmung (Vorläufige Mitteilung). *Physikalische Zeitschrift*, 23:438–441, 1922. URL https://archive.org/details/per_physikalische-zeitschrift_physikalische-zeitschrift_1922-11-01_20-21. No DOI.

- [3] H. Busch. Berechnung der bahn von kathodenstrahlen im axialsymmetrischen elektromagnetischen felde. *Annalen der Physik*, 386(25):974–993, 1926. doi: 10.1002/andp.19263862507.
- [4] H. Busch. Über die wirkungsweise der konzentrierungsspule bei der braunschen röhre. *Archiv für Elektrotechnik*, 18(6):583–594, 1927. doi: 10.1007/BF01656203.
- [5] Ernst Ruska. The development of the electron microscope and of electron microscopy. *Reviews of Modern Physics*, 59(3):627–638, 1987. doi: 10.1103/RevModPhys.59.627.
- [6] M. Knoll and E. Ruska. Das elektronenmikroskop. *Zeitschrift für Physik*, 78(5-6):318–339, 1932. doi: 10.1007/BF01342199.
- [7] E. Ruska. Über fortschritte im bau und in der leistung des magnetischen elektronenmikroskops. *Zeitschrift für Physik*, 87(9-10):580–602, 1934. doi: 10.1007/BF01333326.
- [8] The Nobel Prize in Physics 1986. NobelPrize.org, Nobel Prize Outreach. URL <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1986/summary/>. Accessed 2026-10-17.
- [9] O. Scherzer. Über einige fehler von elektronenlinsen. *Zeitschrift für Physik*, 101(9-10):593–603, 1936. doi: 10.1007/BF01349606.
- [10] O. Scherzer. Sphärische und chromatische Korrektur von Elektronen-Linsen. *Optik*, 2:114–132, 1947. No DOI; end page not independently verified.
- [11] P. W. Hawkes. Aberration correction past and present. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 367(1903):3637–3664, 2009. doi: 10.1098/rsta.2009.0004.
- [12] H. Rose. Outline of a spherically corrected semiaplanatic medium-voltage transmission electron microscope. *Optik*, 85:19–24, 1990. No DOI.
- [13] Maximilian Haider, Stephan Uhlemann, Eugen Schwan, Harald Rose, Bernd Kabius, and Knut Urban. Electron microscopy image enhanced. *Nature*, 392(6678):768–769, 1998. doi: 10.1038/33823.
- [14] M. Haider, H. Rose, S. Uhlemann, B. Kabius, and K. Urban. Towards 0.1 nm resolution with the first spherically corrected transmission electron microscope. *Journal of Electron Microscopy*, 47(5):395–405, 1998. doi: 10.1093/oxfordjournals.jmicro.a023610.
- [15] O. L. Krivanek, N. Dellby, and A. R. Lupini. Towards sub-Å electron beams. *Ultramicroscopy*, 78(1-4):1–11, 1999. doi: 10.1016/S0304-3991(99)00013-3.
- [16] N. Dellby, O. L. Krivanek, P. D. Nellist, P. E. Batson, and A. R. Lupini. Progress in aberration-corrected scanning transmission electron microscopy. *Journal of Electron Microscopy*, 50(3):177–185, 2001. doi: 10.1093/jmicro/50.3.177.
- [17] P. E. Batson, N. Dellby, and O. L. Krivanek. Sub-ångstrom resolution using aberration corrected electron optics. *Nature*, 418(6898):617–620, 2002. doi: 10.1038/nature00972.

- [18] C. Kisielowski, B. Freitag, M. Bischoff, H. van Lin, S. Lazar, G. Knippels, P. Tiemeijer, M. van der Stam, S. von Harrach, M. Stekelenburg, M. Haider, S. Uhlemann, H. Müller, P. Hartel, B. Kabius, D. Miller, I. Petrov, E. A. Olson, T. Donchev, E. A. Kenik, A. R. Lupini, J. Bentley, S. J. Pennycook, I. M. Anderson, A. M. Minor, A. K. Schmid, T. Duden, V. Radmilovic, Q. M. Ramasse, M. Watanabe, R. Erni, E. A. Stach, P. Denes, and U. Dahmen. Detection of single atoms and buried defects in three dimensions by aberration-corrected electron microscope with 0.5-Å information limit. *Microscopy and Microanalysis*, 14(5):469–477, 2008. doi: 10.1017/S1431927608080902.
- [19] Rolf Erni, Marta D. Rossell, Christian Kisielowski, and Ulrich Dahmen. Atomic-resolution imaging with a sub-50-pm electron probe. *Physical Review Letters*, 102(9):096101, 2009. doi: 10.1103/PhysRevLett.102.096101.
- [20] B. Kabius, P. Hartel, M. Haider, H. Müller, S. Uhlemann, U. Loebau, J. Zach, and H. Rose. First application of C_c -corrected imaging for high-resolution and energy-filtered TEM. *Journal of Electron Microscopy*, 58(3):147–155, 2009. doi: 10.1093/jmicro/dfp021.
- [21] M. Haider, P. Hartel, H. Müller, S. Uhlemann, and J. Zach. Information transfer in a TEM corrected for spherical and chromatic aberration. *Microscopy and Microanalysis*, 16(4):393–408, 2010. doi: 10.1017/S1431927610013498.
- [22] The 2020 Kavli Prize in Nanoscience. The Kavli Prize / Norwegian Academy of Science and Letters. URL <https://www.kavliprize.org/prizes/nanoscience/2020>. Accessed 2026-10-17.
- [23] Wolf Prize in Physics 2011: M. Haider, H. Rose, K. Urban. Wolf Foundation. URL <https://wolffund.org.il/>. Laureates confirmed via CEOS GmbH, <https://www.ceos-gmbh.de/de/ueber/ehrungen>.
- [24] Eite Tiesinga, Peter J. Mohr, David B. Newell, and Barry N. Taylor. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2018. *Reviews of Modern Physics*, 93(2):025010, 2021. doi: 10.1103/RevModPhys.93.025010.
- [25] Walter Glaser. Strenge Berechnung magnetischer Linsen der Feldform $H = H_0/[1 + (z/a)^2]$. *Zeitschrift für Physik*, 117(5-6):285–315, 1941. doi: 10.1007/BF01676330.
- [26] Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, Hoboken, 8 edition, 2005. Chapter on ferromagnetism, table of saturation magnetization (Fe at room temperature).
- [27] Hiperc 50 alloy (fe-co-v soft magnetic alloy), product page. Carpenter Technology Corporation. URL <https://www.carpentertechnology.com/alloy-finder/hiperco-50>. States “high magnetic saturation (24 kilogauss)”; accessed 2026-10-17.
- [28] Ludwig Reimer and Helmut Kohl. *Transmission Electron Microscopy: Physics of Image Formation*. Springer, 5 edition, 2008. doi: 10.1007/978-0-387-40093-8.

- [29] Ernst Ruska-Centre for Microscopy and Spectroscopy with Electrons. FEI Titan G2 80-200 CREWLEY. *Journal of large-scale research facilities*, 2:A43, 2016. doi: 10.17815/jlsrf-2-68.
- [30] O. Scherzer. The theoretical resolution limit of the electron microscope. *Journal of Applied Physics*, 20(1):20–29, 1949. doi: 10.1063/1.1698233.
- [31] David B. Williams and C. Barry Carter. *Transmission Electron Microscopy: A Textbook for Materials Science*. Springer, New York, 2 edition, 2009. doi: 10.1007/978-0-387-76501-3.
- [32] G. Schönhense and H. Spiecker. Correction of chromatic and spherical aberration in electron microscopy utilizing the time structure of pulsed excitation sources. *Journal of Vacuum Science & Technology B*, 20(6):2526–2534, 2002. doi: 10.1116/1.1523373.
- [33] Michio Hibino, Mikio Kuzuya, and Susumu Maruse. Correction of the spherical aberration of the objective lens in a conventional transmission electron microscope by means of a foil lens. *Japanese Journal of Applied Physics*, 20(4):781, 1981. doi: 10.1143/JJAP.20.781.
- [34] D. Gabor. A space-charge lens for the focusing of ion beams. *Nature*, 160:89–90, 1947. doi: 10.1038/160089b0.
- [35] Gertrude F. Rempfer. A theoretical study of the hyperbolic electron mirror as a correcting element for spherical and chromatic aberration in electron optics. *Journal of Applied Physics*, 67(10):6027–6040, 1990. doi: 10.1063/1.345212.
- [36] R. Fink, M. R. Weiss, E. Umbach, D. Preikszas, H. Rose, R. Spehr, et al. SMART: a planned ultrahigh-resolution spectromicroscope for BESSY II. *Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena*, 84(1-3):231–250, 1997. doi: 10.1016/S0368-2048(97)00016-9.
- [37] Ernst Ruska-Centre for Microscopy and Spectroscopy with Electrons. FEI Titan 80-300 TEM. *Journal of large-scale research facilities*, 2:A41, 2016. doi: 10.17815/jlsrf-2-66.
- [38] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, New York, 3 edition, 1999. Section 5.5: vector potential of a circular current loop.

A 轴对称磁场的完整展开与圆电流环的精确场

A.1 任意阶的近轴展开

设 $B_z = \sum_{n \geq 0} a_n(z) r^{2n}$, $B_r = \sum_{n \geq 0} b_n(z) r^{2n+1}$ (B_z 是 r 的偶函数、 B_r 是奇函数, 由轴对称与在轴上光滑所要求)。 $a_0 = B(z)$ 。

推导：递推关系

柱坐标中 $\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$ 。代入级数, r^{2n} 的系数给出 $(2n+2)b_n + a'_n = 0$, 即 $b_n = -a'_n/(2n+2)$ 。 $\nabla \times \mathbf{B}$ 的环向分量 $\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0$, r^{2n+1} 的系数给出 $b'_n = (2n+2)a_{n+1}$ 。

消去 b_n :

$$a_{n+1} = -\frac{a_n''}{4(n+1)^2} \Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n B^{(2n)}(z)}{4^n (n!)^2},$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1} B^{(2n+1)}(z)}{2 \cdot 4^n n! (n+1)!}.$$

前几项:

$$B_z = B - \frac{r^2}{4} B'' + \frac{r^4}{64} B'''' - \dots,$$

$$B_r = -\frac{r}{2} B' + \frac{r^3}{16} B''' - \dots.$$

`verify_sympy.py` 核对了这两个截断式满足 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 、 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ 到相应阶, 以及 Busch 证明中用到的恒等式 $r(v_z B_r - v_r B_z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt}$ 到 r^4 阶。

A.2 圆电流环的精确场

半径 a 、电流 I (N 匝时以 NI 代 I) 的圆环, 矢势只有环向分量 [38]

$$A_\theta(r, z) = \frac{\mu_0 I}{\pi \nu} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[\left(1 - \frac{\nu^2}{2}\right) K(\nu^2) - E(\nu^2) \right],$$

$$\nu^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2},$$

K 、 E 是第一、二类完全椭圆积分 (参数为 ν^2 ; 用无衬线字体以区别于透镜常数 K 与能量)。磁通 $\Phi = 2\pi r A_\theta$ 。由 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[K + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right],$$

$$B_r = \frac{\mu_0 I z}{2\pi r \sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[-K + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right].$$

$r \rightarrow 0$ 时 B_z 回到式 (3.10) (脚本中核对到 10^{-8})。本讲所有“精确场”的追迹 (图 1(b)、3, 表 3 的线圈行, Busch 定理的检验) 都用这组公式。

B 三阶光线方程与球差积分的推导细节

B.1 第 2 步的展开

记 $\omega_0 = e/(2\gamma m)$, $\dot{\theta} = \omega_0(B - \frac{r^2}{8} B'')$, $B_z = B - \frac{r^2}{4} B''$ 。精确径向方程 (5.1) 改写为 $\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - 2\omega_0 r \dot{\theta} B_z$ 。逐项展开到 r^3 :

$$r\dot{\theta}^2 = \omega_0^2 r \left(B^2 - \frac{r^2}{4} B B'' \right),$$

$$2\omega_0 r \dot{\theta} B_z = 2\omega_0^2 r \left(B^2 - \frac{r^2}{8} B B'' - \frac{r^2}{4} B B'' \right)$$

$$= 2\omega_0^2 r \left(B^2 - \frac{3r^2}{8} B B'' \right).$$

相减: $\ddot{r} = \omega_0^2 r \left(-B^2 + \frac{1}{2} r^2 B B'' \right)$ 。

B.2 第 4 步的展开

$\dot{z}^2 = v^2/(1+s^2)$, $s^2 = r'^2 + r^2\theta'^2$ 。 s^2 已是二阶, 其中 θ' 只需首阶: $\theta' = \dot{\theta}/\dot{z} \approx \omega_0 B/v$, $r^2\theta'^2 = KB^2r^2$ ($K = \omega_0^2/v^2$)。于是

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= \dot{z}^2 r'' + \frac{1}{2}(\dot{z}^2)' r' \\ &= v^2 \left[(1-s^2)r'' - \frac{1}{2}(s^2)' r' \right] + \mathcal{O}(r^5).\end{aligned}$$

$(s^2)' = 2r'r'' + 2KBB'r^2 + 2KB^2rr'$; 用一阶方程 $r'' = -KB^2r$, 第一项与第三项相消, $(s^2)' = 2KBB'r^2$ 。代入并令其等于 $v^2(-KB^2r + \frac{K}{2}BB''r^3)$:

$$(1-s^2)r'' - KBB'r^2r' = -KB^2r + \frac{K}{2}BB''r^3.$$

两边除以 $(1-s^2)$, 右边首项乘 $(1+s^2)$, 其余已是三阶:

$$\begin{aligned}r'' &= -KB^2r - KB^2r(r'^2 + KB^2r^2) \\ &\quad + \frac{K}{2}BB''r^3 + KBB'r^2r',\end{aligned}$$

即式 (7.2)。sympy 用小参量 ϵ 计阶 ($r \rightarrow \epsilon r$) 独立地重复了这一展开。

B.3 积分形式的等价性

配方形式 (7.5) 的被积函数记为 P , 标准形式的被积函数记为 $S = \frac{K}{16}(24KB^4h^4 + 8B'^2h^4 - 8B^2h^2h'^2)$ 。直接展开并利用 $h'' = -KB^2h$ 可以验证

$$P - S = \frac{d}{dz} \left(\frac{K}{2} B^2 h^3 h' \right),$$

右边积分后在物、像面为零 ($h = 0$), 所以两种形式给出同一个 C_s 。同样, $-hF_3(h)$ 与 P 相差 $\frac{d}{dz}(\frac{K}{2}BB'h^4)$ 。

B.4 物在场内的情形

推导中没有要求物、像在无场区: 物点在轴上 ($r = 0$) 保证 Busch 常量为零; $h(z_o) = h(z_i) = 0$ 保证分部积分的边界项为零。所以式 (7.5) 对“浸没”在磁场中的样品 (高分辨物镜的实际情况) 同样成立。表 3 中 Glaser 透镜的物点都在场内。

C Glaser 场精确解的推导

推导: 变量代换

$z = a \cot \varphi$, $dz/d\varphi = -a/\sin^2 \varphi$, 所以 $\frac{d}{dz} = -\frac{\sin^2 \varphi}{a} \frac{d}{d\varphi}$ 。记 $\cdot$ 为对 φ 求导 (本附录内):

$$w'' = \frac{\sin^2 \varphi}{a^2} (\sin^2 \varphi \ddot{w} + 2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{w}).$$

场: $1 + z^2/a^2 = 1/\sin^2 \varphi$, $k^2(z) = KB_0^2 \sin^4 \varphi = (k_G^2/a^2) \sin^4 \varphi$ 。近轴方程两边除以 $\sin^4 \varphi/a^2$:

$$\ddot{w} + 2 \cot \varphi \dot{w} + k_G^2 w = 0.$$

令 $w = y/\sin \varphi$: $\dot{w} = \dot{y}/\sin \varphi - y \cos \varphi/\sin^2 \varphi$, $\ddot{w} = \ddot{y}/\sin \varphi - 2\dot{y} \cos \varphi/\sin^2 \varphi + y/\sin \varphi + 2y \cos^2 \varphi/\sin^3 \varphi$ 。代入后含 $\dot{y}$ 与 $\cos^2 \varphi$ 的项全部相消, 剩下

$$\ddot{y} + (1 + k_G^2)y = 0,$$

所以 $y = C_1 \sin \omega \varphi + C_2 \cos \omega \varphi$, $\omega = \sqrt{1 + k_G^2}$, 即式 (6.5)。

推导: 平行入射光线与两种焦距

入射端 $z \rightarrow -\infty$ 对应 $\varphi \rightarrow \pi$, 此时 $\sin \varphi \approx \pi - \varphi \approx a/|z|$ 。若分子在 $\varphi = \pi$ 处不为零, $w \propto 1/\sin \varphi \propto |z|$, 是一条斜率不为零的直线, 不是平行入射。所以分子必须在 $\varphi = \pi$ 处为零, 只能是 $\sin[\omega(\pi - \varphi)]$ 的倍数; 这时 $w \rightarrow w_0 \cdot \omega(\pi - \varphi)/[\omega(\pi - \varphi)] = w_0$, 再展开到下一阶可知斜率趋于零, 得式 (6.6)。物镜焦距见例题 3。出射端 $\varphi \rightarrow 0$: $z \approx a/\varphi$, 展开 $\sin[\omega(\pi - \varphi)] \approx \sin \pi \omega - \omega \varphi \cos \pi \omega$,

$$w \approx w_0 \left[\frac{\sin \pi \omega}{\omega a} z - \cos \pi \omega \right].$$

出射斜率 $w_0 \sin(\pi \omega)/(\omega a)$, 所以投影焦距 $f_p = -a\omega/\sin(\pi \omega)$ 。 $\omega = 2$ 时斜率为零、 $w \rightarrow -w_0$ 。

D 六极子组合像差的微扰计算

D.1 单块六极子

方程 $w'' = -\kappa \bar{w}^2$, 入射 $w(0) = w_0$ 、 $w'(0) = 0$ 。令 $w = w_0 + \kappa w_1 + \kappa^2 w_2 + \dots$ 。比较 κ^1 : $w_1'' = -\bar{w}_0^2$, $w_1 = -\frac{1}{2} \bar{w}_0^2 z^2$, $\bar{w}_1 = -\frac{1}{2} w_0^2 z^2$ 。比较 κ^2 : $w_2'' = -2\bar{w}_0 \bar{w}_1 = |w_0|^2 w_0 z^2$, $w_2 = \frac{1}{12} |w_0|^2 w_0 z^4$ 。出口:

$$\begin{aligned} w(d) &= w_0 - \frac{\kappa}{2} \bar{w}_0^2 d^2 + \frac{\kappa^2}{12} |w_0|^2 w_0 d^4, \\ w'(d) &= -\kappa \bar{w}_0^2 d + \frac{\kappa^2}{3} |w_0|^2 w_0 d^3. \end{aligned}$$

D.2 中心对中心、放大率 -1 的转移

理想的放大率 -1 无焦系统 (两个焦距相同、间距为两倍焦距的薄透镜) 把平面 P 上的 (w, w') 变成共轭平面 P' 上的 $(-w, -w')$, 并且把 P 之后距离 ℓ 的平面成像到 P' 之后距离 ℓ 处 (纵向放大率 $M^2 = 1$)。第一块六极子的中心成像到第二块的中心, 所以第一块的出口面成像到第二块的出口面。用直线把第二块入口处的状态外推: 等效于把第一块出口的状态 $(w(d), w'(d))$ 先“退回”距离 d , 再取负号, 进入第二块:

$$w_a = -[w(d) - d w'(d)], \quad w'_a = -w'(d).$$

在第二块中令 $u = -w$ (“展开坐标”), $u'' = -w'' = \kappa \bar{w}^2 = \kappa \bar{u}^2$: 相当于一块反号的六极子, 入射 $u_a = w(d) - dw'(d) = w_0 + \frac{\kappa}{2} \bar{w}_0^2 d^2 + \mathcal{O}(\kappa^2)$, $u'_a = w'(d)$ 。

D.3 第二块六极子中的二阶计算

第二块内到 κ^1 的轨迹: $u = w_0 + \kappa \bar{w}_0^2 (\frac{d^2}{2} - dz + \frac{z^2}{2}) + \mathcal{O}(\kappa^2)$ (三项分别来自入射位置、入射斜率和本块的一阶偏折)。于是 $\bar{u}^2 = \bar{w}_0^2 + 2\kappa |w_0|^2 w_0 (\frac{d^2}{2} - dz + \frac{z^2}{2}) + \dots$,

$$\begin{aligned} \Delta u' &= \int_0^d \kappa \bar{u}^2 dz \\ &= \kappa \bar{w}_0^2 d + 2\kappa^2 |w_0|^2 w_0 \left(\frac{d^3}{2} - \frac{d^3}{2} + \frac{d^3}{6} \right) \\ &= \kappa \bar{w}_0^2 d + \frac{1}{3} \kappa^2 |w_0|^2 w_0 d^3. \end{aligned}$$

出口斜率 $u' = u'_a + \Delta u' = [-\kappa \bar{w}_0^2 d + \frac{1}{3} \kappa^2 |w_0|^2 w_0 d^3] + [\kappa \bar{w}_0^2 d + \frac{1}{3} \kappa^2 |w_0|^2 w_0 d^3] = \frac{2}{3} \kappa^2 |w_0|^2 w_0 d^3$ 。出口位置的 κ^1 项: $\frac{1}{2} d^2 - d^2 + \frac{1}{2} d^2 = 0$, 也抵消。在 κ^2 阶, 出口位置还留下 $\frac{1}{3} \kappa^2 d^4 |w_0|^2 w_0$ (数值核对比值 1.0005), 相当于把组合斜率 $\frac{2}{3} \kappa^2 d^3 |w_0|^2 w_0$ 放在第二块的中心作用; 它也是轴对称的三阶项, 不影响三重项的抵消。这就是式 (9.3)。sympy 符号核对与数值积分见 `verify_sympy.py`、`fig_hexapole.py`。

注: 如果第二块紧接第一块

若没有中间的转移光学、两块六极子同号直接相接, 相当于一块长 $2d$ 的六极子: 三重项 $-2\kappa \bar{w}_0^2 d$ 不抵消。若两块反号直接相接, 出口斜率的一阶三重项抵消, 但出口位置留下 $-\kappa \bar{w}_0^2 d^2$ 的三重偏移 (系数 $-\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = -1$), 三重像散并没有消除; 而且组合项为 $-\frac{4}{3} \kappa^2 d^3 |w_0|^2 w_0$, 指向轴, 反而是正球差 (两者均经数值积分核对)。只有中心对中心的 -1 成像能让位置与斜率的三重项同时抵消, 并使组合项向外。这正是校正器设计的要点。

E 最小二乘直线拟合与数值积分

推导: 直线拟合

数据 (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, 模型 $y = \Gamma x + y_0$, 各 y_i 的随机误差相同、互相独立。使 $\sum (y_i - \Gamma x_i - y_0)^2$ 最小, 对 Γ 、 y_0 求偏导令其为零, 解得

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_{xx}}, \quad y_0 = \bar{y} - \Gamma \bar{x}, \\ S_{xx} &= \sum (x_i - \bar{x})^2. \end{aligned}$$

用残差估计单点误差 $s_r^2 = \sum (y_i - \Gamma x_i - y_0)^2 / (n - 2)$ (减 2 是因为用掉了两个拟合参数), 则

$$\begin{aligned} u(\Gamma) &= \frac{s_r}{\sqrt{S_{xx}}}, \\ u(y_0) &= s_r \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}}. \end{aligned}$$

Γ 是 y_i 的线性组合 $\sum (x_i - \bar{x}) y_i / S_{xx}$, 其方差为 $s_r^2 \sum (x_i - \bar{x})^2 / S_{xx}^2 = s_r^2 / S_{xx}$; y_0 的公式同理。截距的不确定度含 $\bar{x}^2 / S_{xx}$: 数据离原点越远, 外推越不准 (实验题中 $\bar{x} / \sqrt{S_{xx}} = 2.9$)。

过原点拟合：模型 $y = \Gamma_0 x$ ，使 $\sum (y_i - \Gamma_0 x_i)^2$ 最小得 $\Gamma_0 = \sum x_i y_i / \sum x_i^2$ ，它是 y_i 的线性组合，方差为 $s_r^2 / \sum x_i^2$ ， $s_r^2 = \sum (y_i - \Gamma_0 x_i)^2 / (n - 1)$ 。由于 $\sum x_i^2 = S_{xx} + n\bar{x}^2$ 远大于 S_{xx} （实验题中约 67 倍），斜率不确定度小得多；代价是模型必须确实过原点。

Simpson 公式 等间距 Δz 、奇数个点 $f_0, \dots, f_{2N}$ ： $\int f dz \approx \frac{\Delta z}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 4f_{2N-1} + f_{2N}]$ ，误差 $\propto \Delta z^4 f''''$ 。若各 f_j 有独立误差 u_j ，积分的不确定度为 $\frac{\Delta z}{3} \sqrt{\sum c_j^2 u_j^2}$ ， c_j 是上面的权重 1、4、2、...

误差传递 对 $e/m = 4\pi^2 / (L\beta_2\Gamma^2)$ ，各量独立时相对不确定度为

$$\frac{u(e/m)}{e/m} = \left[\left(\frac{2u_\Gamma}{\Gamma} \right)^2 + \left(\frac{u_{\beta_2}}{\beta_2} \right)^2 + \left(\frac{u_L}{L} \right)^2 + \dots \right]^{1/2}.$$

注意 β_2 本身依赖 L （积分区间与权重），所以 L 的影响要整体估计（实验题 (6c)）。

F 数值方法说明

- 精确追迹 (`scripts/eo.py` 中的 `trace_exact`)：以 z 为自变量积分相对论洛伦兹力方程，状态为 (x, y, p_x, p_y, t) ， $p_z = \sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2}$ ；DOP853 方法，相对容差 10^{-11} – 10^{-12} 。线圈场用附录 A.2 的椭圆积分；Glaser 场用附录 A.1 截断到 r^3 的级数（对三阶像差足够）。
- 近轴量：像面由 $h(z) = 0$ 的根（Brent 法）求得， $M = g(z_i)$ 。
- 球差系数的追迹值： $\alpha = 2$ – 8 mrad 四条光线，按近轴旋转角投影到子午面，拟合 $\Delta r_i / (M\alpha^3) = C_s + c\alpha^2$ 并取 $\alpha \rightarrow 0$ 的截距。
- 交互演示用四阶龙格-库塔法积分同样的方程，读数与正文公式的对照见 `VERIFY.md`。

G 名词解释

表 8 术语对照

中文	英文	一句话定义
近轴近似	paraxial approximation	只保留离轴距离与斜率的一次项
子午光线	meridional ray	位于（转动的）包含光轴的平面内的光线
斜光线	skew ray	不与光轴相交、不在子午面内的光线
拉莫尔角频率	Larmor frequency	$eB/2\gamma m$, 回旋频率的一半
Busch 定理	Busch's theorem	轴对称场中 $\gamma m r^2 \dot{\theta} - e\Phi/2\pi$ 守恒
磁刚度	magnetic rigidity	$B\rho = p/e$
球差	spherical aberration	孔径越大的光线会聚点偏离越多 ($\propto \alpha^3$)
色差	chromatic aberration	不同能量的电子焦距不同
最小弥散圆	disk of least confusion	光线束截面最小处
极靴	pole piece	把磁场集中到短间隙中的铁磁零件
物镜光阑	objective aperture	限制成像孔径角的小孔
相位物体	phase object	只改变透射波相位、不改变振幅的样品
传递函数	contrast transfer function	各空间频率转化为像衬度的权重 $\sin \chi$
Scherzer 欠焦	Scherzer defocus	使传递函数通带最宽的欠焦量
信息极限	information limit	色差包络降到 e^{-2} 处对应的周期
多极子	multipole	四、六、八极等非轴对称磁/电场元件
三重像散	three-fold astigmatism	六极场的一阶效应, 三重对称
像差校正器	aberration corrector	产生负球差以抵消物镜球差的多极子组合