

椭球静电学：共焦二次曲面、旋转椭球坐标与导体椭球的电容

第 43 届决赛短训讲义组

2026 年 10 月

目录

1 导读	2
2 名词与符号	4
3 前置数学 I：二次曲面与共焦族	4
3.1 椭球与双曲面	4
3.2 共焦二次曲面族	6
3.3 椭球参数 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 及其梯度	8
4 前置数学 II：正交曲线坐标与旋转椭球坐标	9
4.1 正交曲线坐标与拉梅系数	9
4.2 旋转椭球坐标（“双曲坐标”）	10
4.3 分离变量与勒让德函数	13
4.4 一般椭球坐标	15
5 导体椭球的电容	15
5.1 方法 A：旋转椭球坐标（“双曲坐标法”）	15
5.2 方法 A'：一般三轴椭球（椭球坐标）	17
5.3 面电荷密度	18
5.4 方法 B：焦线上的均匀线电荷（长椭球）	19
5.5 方法 C：相似椭球壳与牛顿定理	20
5.6 方法 D：仿射伸缩与投影（依赖方法 C）	22
5.7 几种方法的比较	23
6 均匀带电椭球的电势	24
6.1 方法一：叠加相似薄壳	24

1 导读	2
6.2 方法二：猜解、验证与唯一性	26
6.3 方法三：射线法（以场点为中心的库仑积分）	27
6.4 退极化因子	28
6.5 方法四：旋转椭球坐标中直接解（“双曲坐标法”）	30
7 旋转椭球沿长轴的极化	32
7.1 前置：极化、束缚电荷与边界条件	32
7.2 方法一：两个错开的均匀带电椭球	32
7.3 方法二：旋转椭球坐标中分离变量	33
7.4 讨论	35
8 决赛风格例题	35
9 实验与数据处理：用平行板电容器测退极化因子	41
10 小结：推导链	44
A 椭球坐标的推导	46
B 旋转椭球的积分与渐近式	47
C 角积分恒等式与射线法的系数	48
D 加权最小二乘与格林互易定理	49

1 导读

球是静电学里最好算的形体：均匀带电球的外场与点电荷一样，导体球的电容是 $4\pi\epsilon_0 R$ ，介质球放进匀强电场，内部场仍然均匀。把球沿三个互相垂直的方向分别拉伸，得到椭球。椭球没有球那样的旋转对称性，可是上面这些“好算”的性质几乎都还在，只是换了一种更深的形式：

- **二次型**。均匀带电椭球内部的电势是坐标的二次多项式 $\phi_0 - \sum_i B_i x_i^2$ ，所以内部电场是坐标的线性函数。均匀极化相当于两个错开一点的均匀带电椭球之差，于是均匀极化的椭球内部电场处处相同。反过来，“牛顿定理之逆”（Dive 1931、Nikliborc 1932，据文献 [1] 转述）说：在适当的正则性条件下（有界、补集连通），内部电势为二次多项式的均匀带电体只能是椭球。这是“退极化因子”“退磁因子”之所以能定义成三个常数的原因。
- **共焦族**。与一个椭球“共焦”的一族椭球面（第 3.2 节）恰好是带电导体椭球外部的等势面。这族曲面连同与它正交的两族双曲面构成一套正交坐标，在这套坐标里拉普拉斯方程变成常微分方程。

- **尖端**。细长导体椭球尖端的面电荷密度是赤道处的 c/a 倍 (c 、 a 为长、短半轴)，不带电的细长导体椭球放在沿轴的外电场中，尖端场强是外场的 $1/N_z$ 倍 (N_z 为退极化因子，细针时 $\approx (c/a)^2/[\ln(2c/a) - 1]$)。避雷针、场发射尖端的场强增强都可以用它估算。

本讲围绕三个问题展开：(1) 导体椭球的电容；(2) 均匀带电椭球的电势；(3) 旋转椭球沿长轴的极化（介质椭球放在匀强电场中）。它们之间的逻辑关系见图 1：导体问题给出共焦椭球族上的外部电势和“相似椭球壳”的电荷分布；把实心均匀椭球切成一层层这样的薄壳，叠加就得到均匀带电椭球的电势；对均匀带电椭球的电势求一次导数，就得到均匀极化椭球的场。同一个结论我们都会用两三种方法推出，并比较它们各自的妙处。

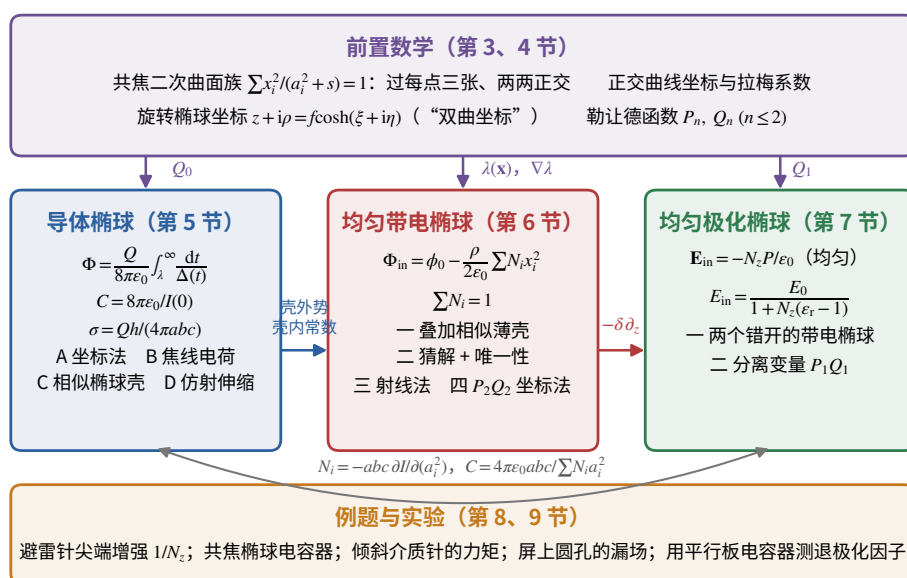


图 1 本讲的结构。上：前置数学；中：三个主问题及每个问题用到的几种方法；箭头表示前一问题的结果被后一问题使用；下：例题与实验题。图中 $I(0) = \int_0^\infty dt/\Delta(t)$, h 为中心到切平面的距离, N_i 为退极化因子，均在正文中定义。

注：关于“双曲坐标”这个叫法

本讲的核心工具是旋转椭球坐标 (prolate/oblate spheroidal coordinates, 长球坐标/扁球坐标) 和一般的椭球坐标 (ellipsoidal coordinates)。它们的坐标曲面由共焦的椭球面和双曲面组成，参数化要用双曲函数 $\cosh$ 、 $\sinh$ ，例如长旋转椭球坐标 $z = f \cosh \xi \cos \eta$ 、 $\rho = f \sinh \xi \sin \eta$ (第 4.2 节)，所以课堂上常把这套做法叫作“双曲坐标法”。本讲沿用这一叫法时，指的就是这套坐标。数学手册里另有一种平面坐标也叫“双曲坐标” (hyperbolic coordinates, 以 $xy = \text{常数}$ 的双曲线为坐标线)，与本讲无关。

学习目标 学完本讲，你应当能够：(1) 证明共焦二次曲面过每点三张、两两正交，求椭球参数 $\lambda(\mathbf{x})$ 的梯度与拉普拉斯；(2) 用复映射 $z + ip = f \cosh(\xi + i\eta)$ 建立旋转椭球坐标，分离变量构造 Q_0, Q_1, Q_2 ；(3) 用多种方法求导体椭球的电容与面电荷、均匀带电椭球的内外电势、匀强场中介质椭球的内部场，并能比较各法的妙处；(4) 用退极化因子分析尖端增强、力矩、漏场等问题，处理“用平行板电容器测退极化因子”的实验数据。

前置知识：本讲需要的普通物理与数学

- 电磁学：库仑定律与叠加原理，电势，高斯定理的积分形式，导体静电平衡（导体内部场为零、导体是等势体、电荷分布在表面、表面外侧场强 σ/ε_0 ），电偶极子，电介质的极化强度 $\mathbf{P}$ 与电位移 $\mathbf{D}$ （第 7.1 节会复习）。
- 数学：多元函数的偏导数与链式法则、隐函数求导、重积分与变量代换、泰勒展开、复数的指数形式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 、双曲函数 $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ 、 $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ 及其反函数、高斯积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ 。

本讲新引入的工具——散度与拉普拉斯算子、泊松方程与唯一性定理、二次曲面与共焦族、正交曲线坐标与拉梅系数、旋转椭球坐标与椭球坐标、勒让德方程与 Q_n 、相似椭球壳、退极化因子、格林互易定理、加权最小二乘——都在首次使用前给出定义与推导。

建议学时 讲授 2 学时（第 3–7 节主线：前置数学 25 分钟，导体椭球 25 分钟，均匀带电椭球与退极化因子 25 分钟，极化 15 分钟）；例题与实验题另需 2–3 学时；附录供课后研读。

2 名词与符号

几点说明：

- 字母 Q 不带下标时是电荷，带下标 Q_0, Q_1 时是勒让德函数。 λ 不带下标时是共焦参数，线电荷密度写作 λ_ℓ 。
- 一般三轴椭球的公式对 a, b, c 的大小顺序没有要求；只有在讨论“过一点的三张曲面”时约定 $a > b > c$ 。
- 旋转椭球一律以 z 为对称轴： $c > a$ 是长（雪茄形）椭球， $c < a$ 是扁（铁饼形）椭球。
- 斜体 e 是离心率，正体 e 是自然对数的底。
- 例题与实验题中另用的字母（ $\beta, \tau, K, \kappa, d, U_0$ 等）在用到时定义；局部推导中的辅助记号（如 Λ, Θ, Ψ ）只在该推导内有效。

3 前置数学 I：二次曲面与共焦族

3.1 椭球与双曲面

定义：二次曲面的三种标准形

设 A, B, C 是非零实数。方程

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1 \quad (3.1)$$

所表示的曲面叫中心二次曲面，其形状由 A, B, C 的正负决定：

- A, B, C 全正：椭球面，半轴为 $\sqrt{A}, \sqrt{B}, \sqrt{C}$ ；用垂直于任一坐标轴的平面去截，截线都

表 1 本讲符号表

符号	含义	单位
$a, b, c; a_i$	椭球沿 x, y, z 的半轴; $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c$	m
x_i	直角坐标 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$	m
ρ, φ	柱坐标: 到 z 轴的距离、方位角	m, 1
旋转椭球	以 z 为对称轴, 赤道半轴 $a(=b)$, 极半轴 c	
f	焦距 (两焦点间距离的一半): 长椭球 $\sqrt{c^2 - a^2}$, 扁椭球 $\sqrt{a^2 - c^2}$	m
e	离心率: 长椭球 f/c , 扁椭球 f/a	1
s	共焦族参数, 曲面 $\sum_i x_i^2/(a_i^2 + s) = 1$	m ²
λ, μ, ν	过一点三个共焦参数 (椭球坐标), $\lambda > \mu > \nu$	m ²
$\Delta(t)$	$\sqrt{(a^2 + t)(b^2 + t)(c^2 + t)}$	m ³
$I(\lambda), J_i(\lambda)$	$\int_\lambda^\infty \frac{dt}{\Delta(t)}, \int_\lambda^\infty \frac{dt}{(a_i^2 + t)\Delta(t)}$	m ⁻¹ , m ⁻³
Γ	$\sum_i x_i^2/(a_i^2 + \lambda)^2, \nabla \lambda = 2/\sqrt{\Gamma}$	m ⁻²
h	椭球中心到表面某点切平面的距离	m
ξ, η	旋转椭球坐标; $u = \cosh \xi, v = \cos \eta$ (长椭球)	1
H_1, H_2, H_3	拉梅系数 (标度因子)	视坐标而定
P_n, Q_n	第一、二类勒让德函数 (只用 $n = 0, 1, 2$)	1
Φ	电势	V
$Q; \sigma; \rho_e$	总电荷; 面电荷密度; 体电荷密度	C; C/m ² ; C/m ³
λ_ℓ	线电荷密度	C/m
C	电容	F
$m; k$	相似椭球的相似比; 相似壳外表面的放大比	1
q	小轴比 (短半轴/长半轴, 渐近展开用); §4.1 的 q_i 为一般曲线坐标	1
$N_i; N_z, N_x$	退极化因子; 旋转椭球沿对称轴、垂直对称轴的值	1
$\mathbf{P}, \mathbf{D}$	极化强度, 电位移	C/m ²
$\varepsilon_r, \chi = \varepsilon_r - 1$	相对介电常数, 极化率	1
E_0, E_{in}	外加匀强电场, 椭球内部电场	V/m
$\tilde{\alpha}_i$	约化极化率: 偶极矩 $p_i = \varepsilon_0 V \tilde{\alpha}_i E_{0,i}$	1
V	椭球体积 $\frac{4}{3}\pi abc$	m ³

是椭圆。

- 两正一负 (如 $C < 0$): 单叶双曲面。它是连通的一张曲面, 像冷却塔: 用 $z = \text{常数}$ 去截得椭圆, 用含 z 轴的平面去截得双曲线。
- 一正两负 (如 $B, C < 0$): 双叶双曲面。 $x^2/A = 1 + y^2/|B| + z^2/|C| \geq 1$, 所以曲面分成 $x \geq \sqrt{A}$ 与 $x \leq -\sqrt{A}$ 两叶, 像两只相背的碗。

(三个都负时方程无实点。)

定义: 旋转椭球、焦点与离心率

$a = b$ 时椭球面 $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 是椭圆绕 z 轴旋转一周而成, 叫旋转椭球面。

- $c > a$: 长旋转椭球。它的子午截线 (含 z 轴的平面截出的椭圆) 以 $z = \pm f, f = \sqrt{c^2 - a^2}$ 为焦点, 椭圆上任一点到两焦点距离之和等于长轴 $2c$ 。离心率 $e = f/c$ 。

- $c < a$: 扁旋转椭球。子午截线的焦点在赤道面内, 到 z 轴的距离 $f = \sqrt{a^2 - c^2}$; 两焦点绕 z 轴旋转形成半径 f 的焦圆。离心率 $e = f/a$ 。

3.2 共焦二次曲面族

定义: 共焦二次曲面族

给定 $a > b > c > 0$ 。对实参数 $s \neq -a^2, -b^2, -c^2$, 曲面

$$\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} = 1 \quad (3.2)$$

组成一个单参数曲面族, 叫共焦二次曲面族。由上面的分类:

- $s > -c^2$: 三个分母全正, 是椭球面; $s = 0$ 就是给定的椭球。
- $-b^2 < s < -c^2$: 一负两正, 单叶双曲面 (绕 z 方向 “开口”)。
- $-a^2 < s < -b^2$: 两负一正, 双叶双曲面 (两叶分在 $x > 0$ 与 $x < 0$)。

“共焦” 的含义: 族中任意两员的半轴平方之差相同, $(a^2 + s) - (b^2 + s) = a^2 - b^2$ 等与 s 无关。因此族中每个曲面被三个坐标平面截出的二次曲线都有相同的焦点。例如 $y = 0$ 平面上的截线是 $\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} = 1$, 焦点在 $x = \pm\sqrt{a^2 - c^2}$, 与 s 无关。

推导: 过空间每一点恰有三张共焦曲面

固定一点 (x, y, z) (三个坐标都不为零), 考虑 s 的函数

$$F(s) = \frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} - 1. \quad (3.3)$$

过该点的共焦曲面对应 $F(s) = 0$ 的根。

1. 单调性: $F'(s) = -\sum_i x_i^2 / (a_i^2 + s)^2 < 0$, 所以在每个不含极点的区间上 F 严格递减, 每个区间至多一个根。
2. 区间 $(-c^2, \infty)$: $s \rightarrow -c^2+$ 时 $z^2/(c^2 + s) \rightarrow +\infty$, $s \rightarrow \infty$ 时 $F \rightarrow -1$, 由连续性恰有一根 λ 。区间 $(-b^2, -c^2)$: 左端 $y^2/(b^2 + s) \rightarrow +\infty$ 、右端 $z^2/(c^2 + s) \rightarrow -\infty$, 恰有一根 μ 。区间 $(-a^2, -b^2)$ 同理恰有一根 ν 。区间 $(-\infty, -a^2)$: 分母全负, $F < -1$, 无根。

另一方面, $F(s) = 0$ 两边乘以 $(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)$ 得到 s 的三次方程, 最多三个根。所以过每一点恰有三张共焦曲面: 一个椭球面 (λ)、一个单叶双曲面 (μ)、一个双叶双曲面 (ν), 见图 2。点落在坐标平面上时 (某个 $x_i = 0$), 相应的极点消失, 由连续性 μ 或 ν 退到区间端点, 三个根仍唯一确定。

推导：三张曲面两两正交

曲面 $G(x) = 1$ 在某点的法向沿梯度 ∇G 。对参数为 s_1 的曲面， $G = \sum_i x_i^2 / (a_i^2 + s_1)$ ，法向

$$\mathbf{n}_1 \propto \left(\frac{x}{a^2 + s_1}, \frac{y}{b^2 + s_1}, \frac{z}{c^2 + s_1} \right)$$

(公共因子 2 已略去)。参数为 s_2 的曲面同理。两法向的点积

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \propto \sum_i \frac{x_i^2}{(a_i^2 + s_1)(a_i^2 + s_2)}.$$

用部分分式 $\frac{1}{(a_i^2 + s_1)(a_i^2 + s_2)} = \frac{1}{s_2 - s_1} \left[\frac{1}{a_i^2 + s_1} - \frac{1}{a_i^2 + s_2} \right]$ 改写：

$$\begin{aligned} & \sum_i \frac{x_i^2}{(a_i^2 + s_1)(a_i^2 + s_2)} \\ &= \frac{1}{s_2 - s_1} \left[\sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2 + s_1} - \sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2 + s_2} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

若两张曲面都过该点，方括号里两个和都等于 1，差为零；而 $s_1 \neq s_2$ 。所以 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ ：过同一点的两张不同共焦曲面在该点正交。

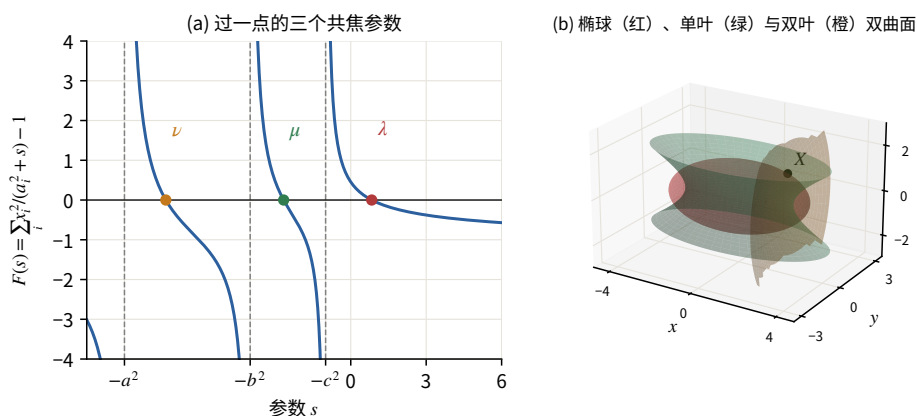


图 2 (a) 对点 $X = (1.6, 1.2, 0.9)$ 、 $a^2, b^2, c^2 = 9, 4, 1$ ，函数 $F(s)$ (式 (3.3)) 在三个极点之间各有一个零点 $\lambda = 0.834$ 、 $\mu = -2.668$ 、 $\nu = -7.355$ 。(b) 过 X 的三张共焦曲面：椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面（只画 $x > 0$ 一叶），它们在 X 点两两正交。

退化的成员 s 从上方趋于 $-c^2$ 时，椭球的 z 半轴 $\sqrt{c^2 + s} \rightarrow 0$ ，椭球被压扁成 $z = 0$ 平面内的一块椭圆面 $\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} \leq 1$ ，叫焦椭圆盘。族中所有椭球都“包着”它。对旋转椭球 ($a = b$) 有两种情形：

- 长椭球 ($c > a$)：共焦族 $\frac{x^2 + y^2}{a^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} = 1$ 的最小成员 ($s \rightarrow -a^2$) 是 z 轴上的线段 $|z| \leq f$ ，即两焦点之间的焦线段；
- 扁椭球 ($c < a$)：最小成员 ($s \rightarrow -c^2$) 是赤道面上半径 f 的焦圆盘。

第 5.4 节会看到，导体椭球外部的场就像是电荷集中在这块退化的“焦面”上产生的。

3.3 椭球参数 $\lambda(\mathbf{x})$ 及其梯度

下面固定一个椭球 ($s = 0$ 的成员), 研究它外部的点。

定义: 椭球参数 λ

对空间任一点 $\mathbf{x}$, $\lambda(\mathbf{x})$ 是方程 $\sum_i x_i^2 / (a_i^2 + \lambda) = 1$ 的最大根, 即过该点的那个共焦椭球的参数。由上面的单调性论证: 点在椭球外部时 $\lambda > 0$, 在椭球面上 $\lambda = 0$, 在内部 $\lambda < 0$ 。远处 $r \rightarrow \infty$ 时 a_i^2 相对 λ 可略, $\sum x_i^2 / \lambda \approx 1$, 即

$$\lambda \approx r^2 \quad (r \gg a, b, c). \quad (3.5)$$

λ 的等值面就是共焦椭球族。这里没有要求 $a > b > c$ 。

后面反复要用 λ 的梯度与拉普拉斯。先定义两个记号:

$$A_i \equiv a_i^2 + \lambda, \quad \Gamma \equiv \sum_i \frac{x_i^2}{A_i^2}. \quad (3.6)$$

推导: $\nabla\lambda$: 隐函数求导

$\lambda(\mathbf{x})$ 由 $\sum_j x_j^2 / A_j = 1$ 隐式确定。两边对 x_i 求偏导, 注意 $A_j = a_j^2 + \lambda$ 通过 λ 依赖 x_i :

$$\frac{2x_i}{A_i} - \sum_j \frac{x_j^2}{A_j^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = 0.$$

第二项的和就是 Γ , 所以

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{A_i \Gamma}, \quad |\nabla \lambda|^2 = \sum_i \frac{4x_i^2}{A_i^2 \Gamma^2} = \frac{4}{\Gamma}. \quad (3.7)$$

$\nabla \lambda$ 沿共焦椭球的法向 (x_i / A_i), 与上一小节的法向一致。

推导: $\nabla^2 \lambda$

拉普拉斯算子 $\nabla^2 \equiv \sum_i \partial^2 / \partial x_i^2$ 。对式 (3.7) 的第一式再对 x_i 求偏导 (不求和), 用乘积法则, 三项分别来自 x_i 、 $1/A_i$ 、 $1/\Gamma$:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2} = \frac{2}{A_i \Gamma} - \frac{2x_i}{A_i^2 \Gamma} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} - \frac{2x_i}{A_i \Gamma^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}.$$

其中 Γ 既显含 x_i , 又通过 λ 依赖 x_i : $\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{A_i^3} - 2\Lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$, $\Lambda \equiv \sum_j x_j^2 / A_j^3$ 。代入 $\partial_i \lambda$ 的表达式后对 i 求和, 逐项计算:

- 第一项: $\frac{2}{\Gamma} \sum_i \frac{1}{A_i}$;
- 第二项: $-\sum_i \frac{2x_i}{A_i^2 \Gamma} \cdot \frac{2x_i}{A_i \Gamma} = -\frac{4\Lambda}{\Gamma^2}$;
- 第三项: $-\sum_i \frac{2x_i}{A_i \Gamma^2} \left(\frac{2x_i}{A_i^3} - 2\Lambda \frac{2x_i}{A_i \Gamma} \right) = -\frac{4\Lambda}{\Gamma^2} + \frac{8\Lambda}{\Gamma^3} \Gamma = +\frac{4\Lambda}{\Gamma^2}$ 。

后两项相消, 得

$$\begin{aligned}\nabla^2\lambda &= \frac{2}{\Gamma} \sum_i \frac{1}{a_i^2 + \lambda}, \\ \frac{\nabla^2\lambda}{|\nabla\lambda|^2} &= \frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{a_i^2 + \lambda} = \frac{d}{d\lambda} \ln \Delta(\lambda)\end{aligned}\quad (3.8)$$

最后一步用了 $\Delta(\lambda) = \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}$, $\ln \Delta = \frac{1}{2} \sum_i \ln(a_i^2 + \lambda)$ 。

式 (3.8) 的关键在于: 比值 $\nabla^2\lambda/|\nabla\lambda|^2$ 只依赖 λ , 不依赖点在共焦椭球面上的位置。第 5.2 节会看到, 这正是“只依赖 λ 的调和函数”存在的条件。

定义: 中心到切平面的距离 h

椭球面 $\sum x_i^2/a_i^2 = 1$ 上一点 $\mathbf{x}_0$ 处的切平面方程是 $\sum_i x_{0i}x_i/a_i^2 = 1$ (法向 (x_{0i}/a_i^2) , 且过 $\mathbf{x}_0$)。原点到这个平面的距离为

$$h(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\sqrt{\sum_i x_{0i}^2/a_i^4}} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \Big|_{\lambda=0}. \quad (3.9)$$

所以在椭球面上 $|\nabla\lambda| = 2/\sqrt{\Gamma} = 2h$ 。在长椭球的尖端 ($z = c$) $h = c$, 在赤道 $h = a$ 。

4 前置数学 II: 正交曲线坐标与旋转椭球坐标

4.1 正交曲线坐标与拉梅系数

定义: 曲线坐标、拉梅系数

用三个数 (q_1, q_2, q_3) 标记空间的点, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ 。固定 q_2, q_3 、只让 q_1 变化, 点画出一条坐标线; 固定 q_1 得到一张坐标面。若三族坐标线处处两两垂直, 称为正交曲线坐标。这时线元的平方没有交叉项:

$$\begin{aligned}ds^2 &= H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \\ H_i &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right|.\end{aligned}\quad (4.1)$$

H_i 叫拉梅系数 (标度因子): q_i 增加 dq_i 时点移动的距离是 $H_i dq_i$ 。例: 球坐标 (r, θ, φ) 中 $H_r = 1$, $H_\theta = r$, $H_\varphi = r \sin \theta$ 。

推导: 梯度、散度与拉普拉斯算子

记 $\hat{\mathbf{e}}_i$ 为沿 q_i 增加方向的单位矢量。

1. **梯度:** 沿 $\hat{\mathbf{e}}_1$ 走 $ds = H_1 dq_1$, 函数改变 $\frac{\partial \Phi}{\partial q_1} dq_1$, 所以方向导数 $\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}$:

$$\nabla \Phi = \sum_i \frac{1}{H_i} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \hat{\mathbf{e}}_i. \quad (4.2)$$

2. **散度:** 矢量场 $\mathbf{F}$ 的散度 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 定义为“穿出单位体积的通量” (直角坐标中即 $\sum \partial F_i / \partial x_i$; 由高斯定理, $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{F} dV$)。取由 q_i 到 $q_i + dq_i$ 围成的小“曲边盒”, 体积 $H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$ 。垂直于 $\hat{\mathbf{e}}_1$ 的一对面, 面积为 $H_2 H_3 dq_2 dq_3$, 但面积本身随 q_1 变化,

所以净穿出通量是 $\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 H_3 F_1) dq_1 dq_2 dq_3$ 。三对面相加再除以体积:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} & \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 H_3 F_1) \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3 H_1 F_2) \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1 H_2 F_3) \right].\end{aligned}\quad (4.3)$$

3. 拉普拉斯算子: $\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi$, 把式 (4.2) 的分量 $F_i = \frac{1}{H_i} \partial_i \Phi$ 代入式 (4.3):

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \\ \times \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i^2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \right).\end{aligned}\quad (4.4)$$

核对: 球坐标中 $H_1 H_2 H_3 = r^2 \sin \theta$, $i = r$ 一项给出 $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r})$, 正是熟悉的径向部分。

前置知识: 泊松方程、拉普拉斯方程与唯一性定理

- 由高斯定理 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{内}}/\epsilon_0$ 用于小体积, 得 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e/\epsilon_0$; 代入 $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ 得泊松方程 $\nabla^2 \Phi = -\rho_e/\epsilon_0$ 。没有电荷处为拉普拉斯方程 $\nabla^2 \Phi = 0$, 其解叫调和函数。
- 两种媒质 (或真空中一层面电荷 σ) 的分界面上: Φ 连续; 电场的法向分量跳变 $E_{n,\text{外}} - E_{n,\text{内}} = \sigma/\epsilon_0$ (对紧贴界面的扁盒用高斯定理); 切向分量连续。
- 唯一性定理:** 空间中有若干导体, 给定每个导体的总电荷 (或电势), 导体外的电荷分布已知, 且无穷远处 $\Phi \rightarrow 0$, 则静电场唯一。证明: 设有两个解, 差 $w = \Phi_1 - \Phi_2$ 在导体外满足 $\nabla^2 w = 0$, 在每个导体上为常数 w_k , 每个导体上的电荷差为零。对恒等式 $\nabla \cdot (w \nabla w) = |\nabla w|^2 + w \nabla^2 w$ 在导体外全空间积分, 用高斯定理把左边化为导体表面与无穷远球面的面积分: 每个导体表面贡献 $w_k \oint \nabla w \cdot d\mathbf{S} \propto w_k \times (\text{电荷差}) = 0$, 无穷远处 $w \sim 1/r$, $|\nabla w| \sim 1/r^2$, 面积分 $\sim 1/r \rightarrow 0$ 。于是 $\int |\nabla w|^2 dV = 0$, $\nabla w = 0$, 两个解的场相同 [2]。

用法: 只要“猜”出一个满足方程与全部边界条件的解, 它就是唯一的那个解。本讲多次这样用。

4.2 旋转椭球坐标 (“双曲坐标”)

先在含 z 轴的子午平面内工作, 用 z 和 $\rho \geq 0$ (到 z 轴的距离) 作坐标, 最后再绕 z 轴转出方位角 φ 。

定义：长旋转椭球坐标

取 $f > 0$ 。引入复数 $w = \xi + i\eta$ ($\xi \geq 0, 0 \leq \eta \leq \pi$)，令

$$\begin{aligned} z + i\rho &= f \cosh(\xi + i\eta), \\ \text{即 } z &= f \cosh \xi \cos \eta, \quad \rho = f \sinh \xi \sin \eta \end{aligned} \quad (4.5)$$

三维中 $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ 。实部虚部的拆分来自 $\cosh(\xi + i\eta) = \frac{1}{2}(e^\xi e^{i\eta} + e^{-\xi} e^{-i\eta})$ 与 $e^{\pm i\eta} = \cos \eta \pm i \sin \eta$ 。

坐标面 由 $\cos^2 \eta + \sin^2 \eta = 1$ 与 $\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1$ 分别消去 η 和 ξ ：

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{f^2 \cosh^2 \xi} + \frac{\rho^2}{f^2 \sinh^2 \xi} &= 1, \\ \frac{z^2}{f^2 \cos^2 \eta} - \frac{\rho^2}{f^2 \sin^2 \eta} &= 1. \end{aligned} \quad (4.6)$$

- $\xi = \text{常数}$ ：长旋转椭球，极半轴 $c = f \cosh \xi$ ，赤道半轴 $a = f \sinh \xi$ ， $c^2 - a^2 = f^2$ ——所有 ξ 面以 $z = \pm f$ 为公共焦点，是一个共焦族。 $\xi \rightarrow 0$ 时退化为焦线段 $|z| \leq f$ ； $\xi \rightarrow \infty$ 时 $c \approx a \approx f e^\xi / 2$ ，趋于大球面。
- $\eta = \text{常数}$ ：以同样两点为焦点的双叶双曲面 ($\eta < \pi/2$ 为 $z > 0$ 一叶， $\eta > \pi/2$ 为 $z < 0$ 一叶)， $\eta = \pi/2$ 退化为赤道面， $\eta = 0, \pi$ 退化为 z 轴上 $|z| \geq f$ 的两段。
- $\varphi = \text{常数}$ ：含 z 轴的半平面。

它就是第 3.2 节的共焦族在两条半轴相等时的情形（这里以对称轴为 z ，不再沿用 $a > b > c$ 的顺序）：椭球面 (ξ) 与双叶双曲面 (η) 之外，原来的单叶双曲面族退化成了 $\varphi = \text{常数}$ 的半平面族。用两焦点的距离 r_1 （到 $z = -f$ ）、 r_2 （到 $z = +f$ ）表示： $r_1 + r_2 = 2f \cosh \xi$ ， $r_1 - r_2 = 2f \cos \eta$ （椭圆与双曲线的焦半径性质），所以

$$u \equiv \cosh \xi = \frac{r_1 + r_2}{2f}, \quad v \equiv \cos \eta = \frac{r_1 - r_2}{2f}. \quad (4.7)$$

这在数值计算中很方便（不必解方程就能从 (ρ, z) 得到 (ξ, η) ）。

推导：拉梅系数：复映射一步到位

记 $Z \equiv z + i\rho = f \cosh w$ 。 $\cosh w = \frac{1}{2}(e^\xi e^{i\eta} + e^{-\xi} e^{-i\eta})$ ，直接逐项求偏导： ∂_ξ 给出 $\frac{1}{2}(e^w - e^{-w}) = \sinh w$ ；由 $\partial_\eta e^{\pm i\eta} = \pm i e^{\pm i\eta}$ ， ∂_η 给出 $i \sinh w$ 。即

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \xi} &= f \sinh w, \\ \frac{\partial Z}{\partial \eta} &= i f \sinh w \implies dZ = f \sinh w (d\xi + i d\eta). \end{aligned}$$

子午面内的线元平方 $dz^2 + d\rho^2 = |dZ|^2$ ，而 $|d\xi + i d\eta|^2 = d\xi^2 + d\eta^2$ ，所以

$$dz^2 + d\rho^2 = f^2 |\sinh w|^2 (d\xi^2 + d\eta^2).$$

没有 $d\xi d\eta$ 交叉项—— ξ 线与 η 线正交；且两个方向的拉梅系数相等。唯一的例外是 $\sinh w = 0$ 处 ($w = 0$ 或 $i\pi$ ，即两个焦点)，那里 $H_\xi = H_\eta = 0$ ，坐标奇异。由 $\sinh w = \sinh \xi \cos \eta +$

$i \cosh \xi \sin \eta, |\sinh w|^2 = \sinh^2 \xi \cos^2 \eta + \cosh^2 \xi \sin^2 \eta = \sinh^2 \xi + \sin^2 \eta$ 。加上绕轴方向的 $\rho^2 d\varphi^2$:

$$\begin{aligned} H_\xi &= H_\eta = f \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}, \\ H_\varphi &= \rho = f \sinh \xi \sin \eta. \end{aligned} \quad (4.8)$$

注：复映射的妙处

凡是 $Z = g(w)$ (w 的幂级数或 $e^{\pm w}$ 的组合) 都有 $dZ = g'(w)dw$ 、 $|dZ|^2 = |g'|^2(d\xi^2 + d\eta^2)$: 在 $g' \neq 0$ 处网格自动正交、两个拉梅系数自动相等, 省去逐个计算 $\partial_\xi \mathbf{r} \cdot \partial_\eta \mathbf{r}$ 。扁椭球坐标只是把 $\cosh$ 换成 $\sinh$ 。

拉普拉斯算子 代入式 (4.4)。妙处在于 $\frac{H_\xi H_\eta H_\varphi}{H_\xi^2} = H_\varphi = f \sinh \xi \sin \eta$, 那个麻烦的根号消掉了; η 方向同理。于是

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{f^2(\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)} \\ &\times \left[\frac{1}{\sinh \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sinh \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sin \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{f^2 \sinh^2 \xi \sin^2 \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

对轴对称的 Φ (不依赖 φ), 换用 $u = \cosh \xi \in [1, \infty)$ 、 $v = \cos \eta \in [-1, 1]$: $du = \sinh \xi d\xi$, 所以 $\frac{1}{\sinh \xi} \partial_\xi (\sinh \xi \partial_\xi \Phi) = \partial_u (\sinh^2 \xi \partial_u \Phi) = \partial_u ((u^2 - 1) \partial_u \Phi)$; η 部分同理变为 $\partial_v ((1 - v^2) \partial_v \Phi)$ 。轴对称的拉普拉斯方程成为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left[(u^2 - 1) \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial v} \left[(1 - v^2) \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

定义：扁旋转椭球坐标

$$z + i\rho = f \sinh(\xi + i\eta), \quad (4.11)$$

$$z = f \sinh \xi \cos \eta, \quad \rho = f \cosh \xi \sin \eta.$$

$\xi = \text{常数}$ 是扁旋转椭球 $\frac{z^2}{f^2 \sinh^2 \xi} + \frac{\rho^2}{f^2 \cosh^2 \xi} = 1$ (极半轴 $c = f \sinh \xi$, 赤道半轴 $a = f \cosh \xi$, $a^2 - c^2 = f^2$), $\xi = 0$ 退化为半径 f 的焦圆盘; $\eta = \text{常数}$ 是单叶双曲面。同样的复映射论证给出 $H_\xi = H_\eta = f |\cosh w| = f \sqrt{\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta}$, $H_\varphi = f \cosh \xi \sin \eta$ 。以 $u = \sinh \xi \in [0, \infty)$ 、 $v = \cos \eta$ 为变量, 轴对称拉普拉斯方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left[(u^2 + 1) \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial v} \left[(1 - v^2) \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

(核对: 固定 r 令 $f \rightarrow 0$, $f \cosh \xi \approx f \sinh \xi \approx r$, η 成为极角, 式 (4.10) 回到球坐标的拉普

拉斯方程。)

交互演示：长/扁旋转椭球坐标网格：拖动滑块改变 ξ_0 、 η_0 ，高亮对应的坐标椭圆与双曲线，读出该点的直角坐标、两焦半径之和与差、拉梅系数，并数值显示两族曲线在交点处的夹角（应为 90° ）。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 ellipsoid-coords）。

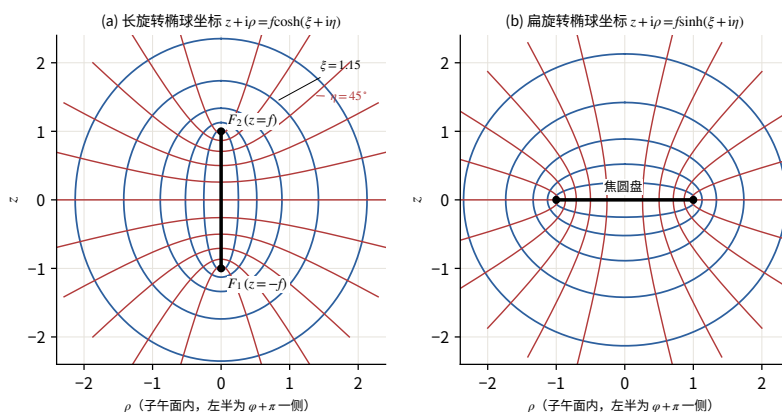


图 3 子午面内的旋转椭球坐标网格 ($f = 1$)。蓝: $\xi = 0.25, 0.5, 0.8, 1.15, 1.5$; 红: $\eta = 15^\circ, 30^\circ, \dots, 165^\circ$ 。(a) 长椭球坐标, $\xi = 0$ 退化为两焦点之间的焦线段 (粗黑线); (b) 扁椭球坐标, $\xi = 0$ 退化为半径 f 的焦圆盘 (粗黑线为其截面)。(a) 中蓝线满足 $r_1 + r_2 = 2f \cosh \xi$, 红线满足 $r_1 - r_2 = 2f \cos \eta$ 。

4.3 分离变量与勒让德函数

推导：分离变量得勒让德方程

在式 (4.10) 中试探 $\Phi = U(u)V(v)$, 代入后除以 UV :

$$\frac{1}{U} \frac{d}{du} \left[(u^2 - 1) \frac{dU}{du} \right] = -\frac{1}{V} \frac{d}{dv} \left[(1 - v^2) \frac{dV}{dv} \right].$$

左边只依赖 u , 右边只依赖 v , 两者恒等只能都等于同一常数, 记为 $n(n+1)$ 。于是 U 、 V 满足同一个方程

$$\frac{d}{dt} \left[(1 - t^2) \frac{dy}{dt} \right] + n(n+1)y = 0, \quad (4.13)$$

只是 V 的自变量 $t = v \in [-1, 1]$, U 的自变量 $t = u \geq 1$ 。式 (4.13) 叫勒让德方程。在球坐标中分离变量得到的角向方程正是它 ($t = \cos \theta$)。

定义： P_n 与 Q_n ($n = 0, 1, 2$)

本讲只需要 $n = 0, 1, 2$ 。

- 第一类勒让德函数 (勒让德多项式) $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$, $P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$ 。直接代入即可验证, 例如 $n = 2$: $[(1 - t^2) \cdot 3t]' + 6 \cdot \frac{1}{2}(3t^2 - 1) = 3 - 9t^2 + 9t^2 - 3 = 0$ 。它们在 $t = \pm 1$ (即 z 轴上) 有限, 所以角向因子 $V(v)$ 取它们。
- 第二类勒让德函数 Q_n 是方程的另一个独立解。已知一个解 P_n 时, 令 $y = P_n w$ 代入式 (4.13): $(1 - t^2)y' = (1 - t^2)P_n'w + (1 - t^2)P_nw'$, 再求导并加上 $n(n+1)P_nw$, 含 w 本身的项合起来是 $w\{[(1 - t^2)P_n']' + n(n+1)P_n\} = 0$ (P_n 满足方程), 剩下

$(1-t^2)P'_n w' + [(1-t^2)P_n w']' = 0$ 。乘以 P_n , 左边恰是一个全导数: $[(1-t^2)P_n^2 w']' = 0$, 于是 $w' = \text{常数}/[(1-t^2)P_n^2]$ (“降阶法”)。对 $t = u > 1$ 取常数使 $w \rightarrow 0$ ($u \rightarrow \infty$):

$$Q_n(u) = P_n(u) \int_u^\infty \frac{dt}{(t^2-1)P_n(t)^2}, \quad (4.14)$$

用部分分式逐个积出:

$$Q_0(u) = \frac{1}{2} \ln \frac{u+1}{u-1} = \operatorname{artanh} \frac{1}{u}, \quad (4.15)$$

$$Q_1(u) = u Q_0(u) - 1, \quad (4.16)$$

$$Q_2(u) = P_2(u) Q_0(u) - \frac{3}{2}u. \quad (4.17)$$

(例如 $\frac{1}{t^2(t^2-1)} = \frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{t^2}$; Q_2 也可直接代入方程验证。)

检验: Q_n 的性质

- 满足方程: $Q'_0 = -\frac{1}{u^2-1}$, 故 $(1-u^2)Q'_0 = 1$, 导数为零。 $Q'_1 = Q_0 - \frac{u}{u^2-1}$, $(1-u^2)Q'_1 = (1-u^2)Q_0 + u$, 再求导得 $-2uQ_0 + 2 = -2Q_1$ 。 Q_2 同理。
- 远处: 令 $u = 1/s$, $Q_0 = \operatorname{artanh} s = s + \frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{5} + \dots$, 所以

$$\begin{aligned} Q_0 &\approx \frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3}, \\ Q_1 &\approx \frac{1}{3u^2} + \frac{1}{5u^4}, \\ Q_2 &\approx \frac{2}{15u^3}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

与球坐标对照 ($u \approx r/f$): $Q_n P_n(v) \leftrightarrow P_n(\cos \theta)/r^{n+1}$ (单极、偶极、四极), 而 $P_n(u)P_n(v) \leftrightarrow r^n P_n(\cos \theta)$ (常数、匀强场 $uv = z/f$ 、二次调和函数)。

- $u \rightarrow 1^+$ (焦线段上) Q_n 对数发散: 它们只能用在椭球外部。
- 朗斯基行列式 $W_n \equiv P_n Q'_n - P'_n Q_n$: 由 $Q_n = P_n w$ 得 $W_n = P_n^2 w' = -\frac{1}{u^2-1}$, 对 $n = 0, 1, 2$ 都一样 (这就是降阶法中那个全导数的积分常数)。第 6.5、7.3 节读出退极化因子时要用它。
- 用 $u = \cosh \xi$: $\frac{u+1}{u-1} = \coth^2 \frac{\xi}{2}$, 所以 $Q_0(\cosh \xi) = \ln \coth \frac{\xi}{2}$, 且 $\frac{d}{d\xi} Q_0(\cosh \xi) = -\frac{1}{\sinh \xi}$ 。

注: 扁椭球中的对应函数

式 (4.12) 中 (u^2-1) 换成了 (u^2+1) , U 的方程变为 $[(1+u^2)U']' - n(n+1)U = 0$ 。同样用降阶法, $n=0$: $\tilde{Q}_0(u) = \int_u^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arccot} u$; $n=1$: $\tilde{Q}_1(u) = u \int_u^\infty \frac{dt}{t^2(1+t^2)} = 1 - u \operatorname{arccot} u$ 。远处 $\tilde{Q}_0 \approx 1/u$, $\tilde{Q}_1 \approx 1/(3u^2)$ 。朗斯基关系变为 $u\tilde{Q}'_1 - \tilde{Q}_1 = -\frac{1}{1+u^2}$ 。(它们是 Q_n 在虚宗量上的解析延拓, 本讲不需要这一点。)

4.4 一般椭球坐标

对三轴椭球，第 3.2 节过每点的三个共焦参数 (λ, μ, ν) 就是一套正交曲线坐标，叫椭球坐标。附录 A 由恒等式

$$\sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2 + s} - 1 = -\frac{(s - \lambda)(s - \mu)(s - \nu)}{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)} \quad (4.19)$$

推出直角坐标的表达式 $x^2 = \frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}$ 等，以及拉梅系数

$$H_\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \quad (4.20)$$

(μ, ν 同理轮换).

与式 (3.7) 对照： $|\nabla \lambda| = 1/H_\lambda$ ，故 $\Gamma = 4H_\lambda^2$ 。对只依赖 λ 的函数，式 (4.4) 化为

$$\nabla^2 \Phi(\lambda) = \frac{4\Delta(\lambda)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} \frac{d}{d\lambda} \left[\Delta(\lambda) \frac{d\Phi}{d\lambda} \right], \quad (4.21)$$

第 5.2 节会由第 3.3 节的直角坐标计算独立地得到同一结果。两条半轴相等时，夹在两极点之间的那个根被“卡”在端点上不再变化，剩下两个根退化为旋转椭球坐标：在 $a > b > c$ 的顺序下，扁椭球是 $a = b > c$ ($\nu \equiv -a^2$)，长椭球是 $a > b = c$ ($\mu \equiv -b^2$)。若改以对称轴为 z (本讲旋转椭球的约定，赤道半轴 a 、极半轴 c)，则长、扁两种情形都有 $\lambda = f^2 \sinh^2 \xi - a^2$ (长) 或 $f^2 \sinh^2 \xi - c^2$ (扁)， ξ 为过该点的共焦旋转椭球的坐标。

5 导体椭球的电容

假设：本节的问题

真空中一个孤立的导体椭球，半轴 a, b, c ，带电 Q ，无外场。求导体外的电势 $\Phi(\mathbf{x})$ 、电容 $C = Q/\Phi_{\text{表面}}$ (取无穷远电势为零) 与面电荷密度 σ 。由唯一性定理，只要找到一个函数：(i) 在导体外满足拉普拉斯方程；(ii) 在椭球面上为常数；(iii) 无穷远处 $\rightarrow Q/(4\pi\epsilon_0 r)$ ——它就是答案。

自然的猜测是：等势面就是共焦椭球族，即 Φ 只依赖于 λ (或旋转椭球的 ξ)。条件 (ii) 自动满足 (椭球面就是 $\lambda = 0$)，剩下要检验 (i) 能否满足。

5.1 方法 A：旋转椭球坐标 (“双曲坐标法”)

推导：长椭球：只依赖 ξ 的调和函数

设导体是长椭球 $\xi = \xi_0$ ， $c = f \cosh \xi_0$ ， $a = f \sinh \xi_0$ 。令 $\Phi = \Phi(\xi)$ ，式 (4.9) 中 η, φ 导数为零，拉普拉斯方程化为

$$\frac{d}{d\xi} \left(\sinh \xi \frac{d\Phi}{d\xi} \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\Phi}{d\xi} = -\frac{K}{\sinh \xi},$$

K 为常数。前面的因子 $1/[f^2(\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)]$ 依赖 η ，但它乘的是零，所以不影响——这就是“只依赖 ξ 的解存在”的原因。再积分一次，取无穷远为零，由第 4.3 节最后一条：

$$\Phi = K \ln \coth \frac{\xi}{2} = K Q_0 (\cosh \xi). \quad (5.1)$$

推导：定常数与电容

远处 $\xi \rightarrow \infty$, $r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = f \sqrt{\sinh^2 \xi + \cosh^2 \eta} \approx f \cosh \xi$, 由式 (4.18), $\Phi \approx K / \cosh \xi \approx K f / r$. 与 $Q / (4\pi\epsilon_0 r)$ 比较得 $K = Q / (4\pi\epsilon_0 f)$. 导体表面 $\cosh \xi_0 = c / f$, 表面电势 $\Phi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 f} Q_0(c/f)$, 于是

$$\begin{aligned} C_{\text{长}} &= \frac{4\pi\epsilon_0 f}{Q_0(c/f)} = \frac{4\pi\epsilon_0 f}{\operatorname{artanh}(f/c)} \\ &= \frac{4\pi\epsilon_0 \sqrt{c^2 - a^2}}{\operatorname{arcosh}(c/a)} \quad (c > a). \end{aligned} \quad (5.2)$$

最后一步: $\operatorname{artanh} \frac{f}{c} = \frac{1}{2} \ln \frac{c+f}{c-f} = \frac{1}{2} \ln \frac{(c+f)^2}{c^2 - f^2} = \ln \frac{c+f}{a} = \operatorname{arcosh} \frac{c}{a}$ (用了 $c^2 - f^2 = a^2$ 与 $\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$)。文献中常把长半轴记作 a 、短半轴记作 b , 同一结果写成 $4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 - b^2} / \operatorname{arcosh}(a/b)$; 本讲始终以 c 表示对称轴方向的半轴。

推导：扁椭球

导体为扁椭球 $\xi = \xi_0$, $c = f \sinh \xi_0$, $a = f \cosh \xi_0$. 用式 (4.12), $\Phi = \Phi(u)$, $u = \sinh \xi$: $[(1+u^2)\Phi]' = 0$, $\Phi' = -K/(1+u^2)$, $\Phi = K \operatorname{arccot} u = K \tilde{Q}_0(\sinh \xi)$. 远处 $\operatorname{arccot} u \approx 1/u \approx f/r$, 同样 $K = Q / (4\pi\epsilon_0 f)$. 表面 $u_0 = c/f$, $\operatorname{arccot} \frac{c}{f} = \arctan \frac{f}{c} = \arccos \frac{c}{a}$ (直角三角形, 斜边 a 、两直角边 c 与 f)。所以

$$\begin{aligned} C_{\text{扁}} &= \frac{4\pi\epsilon_0 f}{\operatorname{arccot}(c/f)} \\ &= \frac{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 - c^2}}{\arccos(c/a)} \quad (c < a). \end{aligned} \quad (5.3)$$

检验：三个极限

- **球**: $c \rightarrow a$ 时 $f \rightarrow 0$, $\operatorname{artanh}(f/c) \approx f/c$, $C \rightarrow 4\pi\epsilon_0 c = 4\pi\epsilon_0 a$. 扁椭球一侧 $\arccos(c/a) \approx \sqrt{2(1 - c/a)} \approx f/a$, 同样给出 $4\pi\epsilon_0 a$.
- **圆盘**: 扁椭球 $c \rightarrow 0$, $f \rightarrow a$, $\arccos 0 = \pi/2$:

$$C_{\text{盘}} = \frac{4\pi\epsilon_0 a}{\pi/2} = 8\epsilon_0 a. \quad (5.4)$$

半径 5 cm 的薄圆盘 $C = 3.54 \text{ pF}$, 是同半径球的 $2/\pi \approx 0.64$ 倍。

- **细针**: 长椭球 $a \ll c$. 小参量 $q = a/c$ (短半轴/长半轴). $f = c\sqrt{1 - q^2} = c(1 - \frac{q^2}{2} + \dots)$, $\frac{c+f}{a} = \frac{2}{q}(1 - \frac{q^2}{4} + \dots)$, 所以 $\operatorname{arcosh}(c/a) = \ln(2c/a) - \frac{q^2}{4} + \mathcal{O}(q^4)$. 代入式 (5.2):

$$C_{\text{针}} = \frac{4\pi\epsilon_0 c}{\ln(2c/a)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{a^2}{c^2}\right) \right]. \quad (5.5)$$

修正是 a^2/c^2 量级, 而不是常见的 “ $1/\ln$ 量级”: 对椭球而言, 对数里的常数项 ($2c/a$ 中的因子 2) 是精确的, 修正只出现在 a^2/c^2 阶 (其他细长导体, 例如圆柱, 对数里的常数不同, 修正是 $1/\ln$ 量级)。

5.2 方法 A': 一般三轴椭球 (椭球坐标)

推导: 只依赖 λ 的调和函数

设 $\Phi = \Phi(\lambda(\mathbf{x}))$ 。由链式法则, $\partial_i \Phi = \Phi' \partial_i \lambda$, $\partial_i^2 \Phi = \Phi'' (\partial_i \lambda)^2 + \Phi' \partial_i^2 \lambda$, 对 i 求和:

$$\nabla^2 \Phi = \Phi'' |\nabla \lambda|^2 + \Phi' \nabla^2 \lambda = |\nabla \lambda|^2 \left[\Phi'' + \Phi' \frac{\nabla^2 \lambda}{|\nabla \lambda|^2} \right].$$

代入式 (3.7)、(3.8):

$$\nabla^2 \Phi = \frac{4}{\Gamma} \left[\Phi'' + \Phi' \frac{\Delta'}{\Delta} \right] = \frac{4}{\Gamma \Delta} \frac{d}{d\lambda} \left(\Delta \frac{d\Phi}{d\lambda} \right). \quad (5.6)$$

(这与椭球坐标中的式 (4.21) 一致, 因为 $\Gamma = 4H_\lambda^2 = (\lambda - \mu)(\lambda - \nu)/\Delta^2$ 。) 方括号里的系数只依赖 λ , 所以拉普拉斯方程确实可以只靠 λ 的函数满足: $\Delta \Phi' = -K$,

$$\Phi(\mathbf{x}) = K \int_{\lambda(\mathbf{x})}^{\infty} \frac{dt}{\Delta(t)} \equiv K I(\lambda). \quad (5.7)$$

远处 $\lambda \approx r^2$, $\Delta(t) \approx t^{3/2}$, $I(\lambda) \approx \int_{r^2}^{\infty} t^{-3/2} dt = 2/r$ 。与 $Q/(4\pi\epsilon_0 r)$ 比较, $K = Q/(8\pi\epsilon_0)$ 。

要点: 导体椭球的电势与电容

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \int_{\lambda(\mathbf{x})}^{\infty} \frac{dt}{\Delta(t)}, \\ C &= \frac{8\pi\epsilon_0}{I(0)} = \frac{8\pi\epsilon_0}{\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

外部等势面就是共焦椭球族 [3-5]。 $I(0)$ 是一个椭圆积分 (被积函数含三次多项式平方根的积分, 一般不能用初等函数表示, 但已有标准形式与数值算法), 用卡尔松 (Carlson) 对称形式 $R_F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}}$ 写作 $C = 4\pi\epsilon_0 / R_F(a^2, b^2, c^2)$ [6, 7], 数值软件 (如 `scipy.special.elliprf`) 可直接计算。

检验: 与方法 A 对照, 以及三轴椭球的数值核对

- 长椭球 $a = b < c$: 代换 $\tau = \sqrt{c^2 + t}$ ($a^2 + t = \tau^2 - f^2$) 得 $I(\lambda) = \frac{2}{f} \operatorname{artanh} \frac{f}{\sqrt{c^2 + \lambda}}$, 于是 $C = 4\pi\epsilon_0 f / \operatorname{artanh}(f/c)$, 与式 (5.2) 相同; 又 $\sqrt{c^2 + \lambda} = f \cosh \xi$, 两种写法的电势逐点相同。扁椭球同理 (附录 B)。
- 三轴椭球 (半轴 3 m、2 m、1 m): 式 (5.8) 给出 $C = 218.748 \text{ pF}$; 用边界元法 (把表面剖分成小面元、令各面元中心电势相等, 解线性方程组) 独立求解, 外推结果与之相差 1.4×10^{-5} (细节见 `VERIFY.md`)。

注: 推论: 外场只认共焦族 (导体版本; 文献 [1] 称 Ivory 定理)

式 (5.8) 中, 外部电势只通过 Q 和 $\lambda(\mathbf{x})$ 依赖导体, 而 λ 只依赖共焦族。设另有一个与它共焦的较小导体椭球 (参数 $s_0 < 0$), 带同样的电荷 Q 。把积分变量平移 $t \rightarrow t - s_0$ 可以看出, 它在两者外部产生的电势完全相同。共焦族越缩越小, 最终退化为焦椭圆盘 (长椭球是焦线段, 扁椭球是焦圆盘)。所以: 导体椭球外部的场, 等于把同样的电荷按某种方式放在焦面上产生的

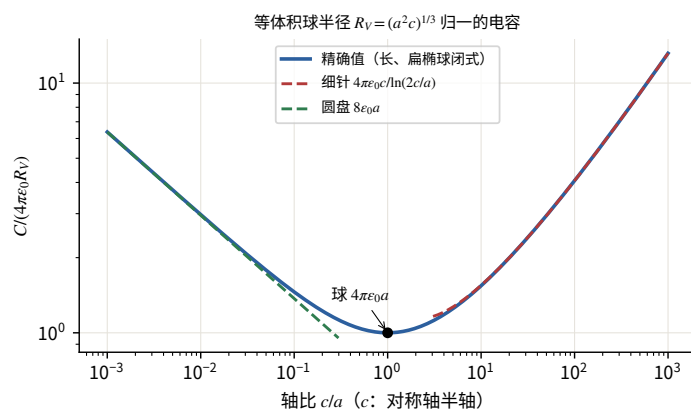


图 4 导体旋转椭球的电容随轴比 c/a 的变化，以等体积球的电容 $4\pi\epsilon_0 R_V$ 归一。左侧为扁椭球 ($c/a \rightarrow 0$ 趋于圆盘 $8\epsilon_0 a$)，右侧为长椭球 ($c/a \rightarrow \infty$ 趋于细针 $4\pi\epsilon_0 c/\ln(2c/a)$)。曲线最低点在球，这是一般定理“同体积的导体中球的电容最小” [8] 的特例。

场。下面的方法 B 就是这一想法对长椭球的具体实现。文献 [1] 把“导体椭球的外部等势面与表面共焦”这一事实与 Ivory (1809) 的名字联系在一起；经典的麦克劳林定理说的是共焦的均匀实心椭球，见第 6.1 节。

5.3 面电荷密度

推导： σ 正比于中心到切平面的距离

导体表面外侧 $\sigma = \epsilon_0 E_n = \epsilon_0 |\nabla\Phi|$ 。由式 (5.8), $|\nabla\Phi| = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{\Delta(\lambda)} |\nabla\lambda|$ ；表面上 $\lambda = 0, \Delta(0) = abc$, $|\nabla\lambda| = 2h$ (式 (3.9)):

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{x}) &= \frac{Q h(\mathbf{x})}{4\pi abc} \\ &= \frac{Q}{4\pi abc} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2}.\end{aligned}\quad (5.9)$$

检验：归一化： $\oint h dS = 3V$

从中心向表面面元 dS 作一个细锥，它的体积是 $\frac{1}{3} \times$ 底面积 $\times$ 高，高就是中心到该面元切平面的距离 h : $dV = \frac{1}{3} h dS$ 。所有细锥拼成整个椭球，所以 $\oint h dS = 3V = 4\pi abc$ ，于是 $\oint \sigma dS = Q$ 。(把式 (5.9) 的面电荷直接做库仑求和，椭球内各点电势都等于 Q/C ，见 VERIFY.md。)

几何上， h 在离中心最远的地方最大：

- **长椭球：** 尖端 $h = c$ ，赤道 $h = a$ ， $\sigma_{\text{尖}}/\sigma_{\text{赤}} = c/a$ 。尖端 $\sigma_{\text{尖}} = Q/(4\pi a^2)$ ，场强 $Q/(4\pi\epsilon_0 a^2)$ ——好像电荷都集中到了半径为 a 的小球上。尖端的曲率半径是 $r_{\text{尖}} = a^2/c$ (例题 1)，所以也可写成 $E_{\text{尖}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c r_{\text{尖}}}$ 。
- **圆盘 (扁椭球 $c \rightarrow 0$):** 表面上 $z^2/c^4 = (1 - \rho^2/a^2)/c^2$ 远大于 ρ^2/a^4 ，所以 $h \approx c/\sqrt{1 - \rho^2/a^2}$ ，

每一面的面电荷

$$\sigma_{\text{盘}}(\rho) = \frac{Q}{4\pi a \sqrt{a^2 - \rho^2}} \quad (5.10)$$

(每一面；两面合计加倍).

中心处的 σ 只有平均值 $Q/(2\pi a^2)$ 的一半，边缘处按 $(a - \rho)^{-1/2}$ 发散（总电荷仍有限）。

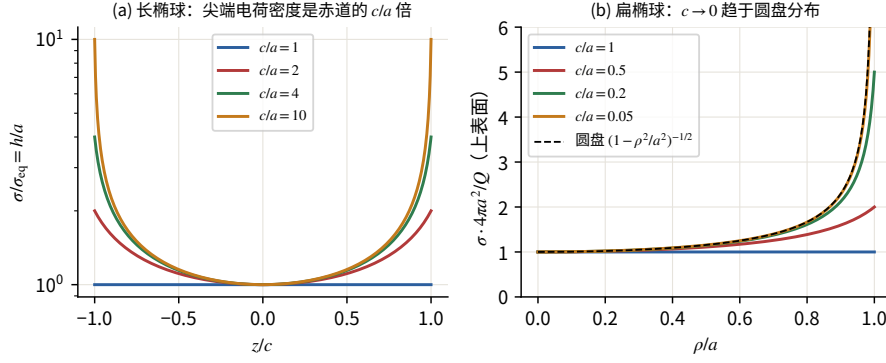


图 5 导体旋转椭球的面电荷密度（式 (5.9)）。(a) 长椭球沿轴的分布，以赤道值归一，尖端值为 c/a ；(b) 扁椭球上表面的分布， $c/a \rightarrow 0$ 时趋于圆盘分布 $(1 - \rho^2/a^2)^{-1/2}$ （虚线）。

5.4 方法 B：焦线上的均匀线电荷（长椭球）

推导：有限长均匀线电荷的等势面是共焦椭球

在 z 轴上 $-f \leq z' \leq f$ 的线段上均匀分布电荷，线密度 $\lambda_\ell = Q/(2f)$ 。场点 (ρ, z) 处的电势（库仑叠加）：

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\lambda_\ell}{4\pi\epsilon_0} \int_{-f}^f \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} \\ &= \frac{\lambda_\ell}{4\pi\epsilon_0} \left[\operatorname{arsinh} \frac{z+f}{\rho} - \operatorname{arsinh} \frac{z-f}{\rho} \right]. \end{aligned}$$

用 $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ，并记 $r_1 = \sqrt{\rho^2 + (z+f)^2}$ 、 $r_2 = \sqrt{\rho^2 + (z-f)^2}$ （到两端点的距离）：

$$\Phi = \frac{\lambda_\ell}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z+f+r_1}{z-f+r_2}.$$

现在证明这个比值只依赖 $r_1 + r_2$ 。令 $S = r_1 + r_2$ ， $D = r_1 - r_2$ 。由 $r_1^2 - r_2^2 = 4fz$ 得 $SD = 4fz$ ，即 $z = SD/(4f)$ 。于是

$$\begin{aligned} z+f+r_1 &= \frac{SD}{4f} + f + \frac{S+D}{2} = \frac{(S+2f)(D+2f)}{4f}, \\ z-f+r_2 &= \frac{SD}{4f} - f + \frac{S-D}{2} = \frac{(S-2f)(D+2f)}{4f}. \end{aligned}$$

（展开右边即可验证。）公因子 $(D+2f)$ 约去：

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\lambda_\ell}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1 + r_2 + 2f}{r_1 + r_2 - 2f} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 f} \operatorname{artanh} \frac{f}{c'}, \\ c' &\equiv \frac{r_1 + r_2}{2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

等势面是 $r_1 + r_2 = \text{常数}$ 的曲面——以线段两端为焦点的长旋转椭球，半长轴 c' 。

要点：方法 B 的结论

用一个以 $\pm f$ 为焦点的导体长椭球面 ($c' = c$) 替换其中一个等势面，并让它带电 Q 。由唯一性定理，导体外的场与线电荷的场完全相同（导体面上电势为常数，外部无电荷，远处 $\rightarrow Q/4\pi\epsilon_0 r$ ）。所以导体电势 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 f} \operatorname{artanh} \frac{f}{c}$ ，电容与式 (5.2) 相同。与方法 A 对照：式 (5.11) 与式 (5.1) 是同一个函数，因为 $c' = f \cosh \xi$ 。

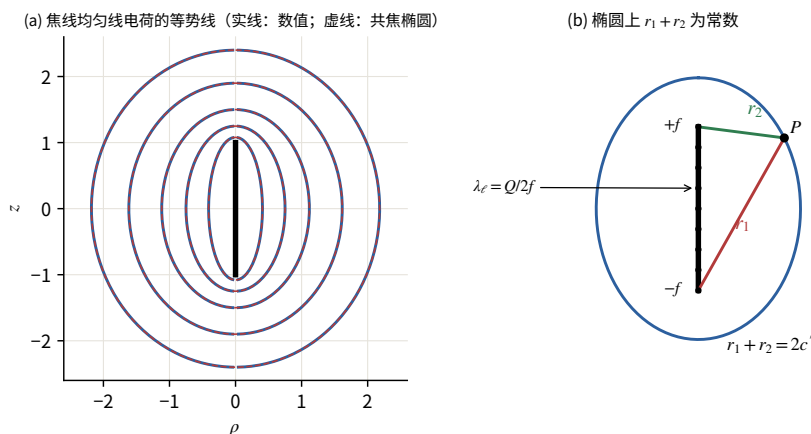


图 6 (a) 焦线段 $|z| \leq f$ 上均匀线电荷的电势等值线（实线，由库仑积分逐点计算）与半长轴 $c' = 1.08f, 1.25f, 1.5f, 1.9f, 2.4f$ 的共焦椭圆（虚线）重合；(b) 椭圆上任一点到两焦点的距离之和 $r_1 + r_2 = 2c'$ 。

注：方法 B 的妙处与局限

方法 B 只用库仑定律和一个积分，是最“初等”的；代价是要事先猜到“焦线”。扁椭球的对应物是焦圆盘上按圆盘导体方式分布的电荷（式 (5.10)，以 f 代替 a ），三轴椭球是焦椭圆盘，都不再均匀，不如线电荷好算。

交互演示：导体旋转椭球（可切换长/扁，调轴比 c/a ）：子午面内画出共焦等势线与面电荷密度沿表面的分布，读出电容并与球、细针、圆盘三个极限比较；长椭球时可叠加显示焦线电荷的等势线，验证两者重合。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 ellipsoid-conductor）。

5.5 方法 C：相似椭球壳与牛顿定理

定义：相似椭球壳（同心相似壳，homoeoid）

椭球 $\mathcal{E}$ ： $\sum x_i^2/a_i^2 \leq 1$ 与把它按比例 $k > 1$ 放大的椭球 $k\mathcal{E}$ ： $\sum x_i^2/a_i^2 \leq k^2$ 之间的区域，叫相似椭球壳或同心相似壳（homoeoid）。“相似”指两个边界椭球同心、同轴向、形状相同（半轴之比相同）。 $k = 1 + \epsilon$ 、 $\epsilon \ll 1$ 时称为薄壳。对照：两个共焦椭球（半轴平方之差相同）之间的壳叫共焦壳（focaloid），它的内部一般有场；两者只在球的情形重合。本讲两族都用：导体外的等势面是共焦族，导体上的电荷是相似薄壳。

推导：薄壳的厚度正比于 h

外表面方程 $G(\mathbf{x}) \equiv \sum x_i^2/a_i^2 = (1 + \epsilon)^2 \approx 1 + 2\epsilon$ 。从内表面一点沿法向走距离 δ ， G 增加 $|\nabla G|\delta$ 。 $|\nabla G| = 2\sqrt{\sum x_i^2/a_i^4} = 2/h$ ，令其等于 2ϵ ：

$$\delta = \epsilon h. \quad (5.12)$$

所以厚度处处与 h 成正比：在离中心远的地方厚，在离中心近的地方薄。

推导：牛顿定理：均匀相似壳内部无场

设相似壳中均匀分布体电荷，取壳内空腔中任意一点 X_0 （位矢 $\mathbf{x}_0$ ）。

1. **弦的中点。**过 X_0 沿单位矢量 $\hat{\mathbf{u}}$ 作直线 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\hat{\mathbf{u}}$ ，代入 $\sum x_i^2/a_i^2 = k^2$ 得关于 t 的二次方程 $\alpha t^2 + 2\beta t + (\gamma - k^2) = 0$ ，其中 $\alpha = \sum u_i^2/a_i^2$ ， $\beta = \sum x_{0i}u_i/a_i^2$ ， $\gamma = \sum x_{0i}^2/a_i^2$ 。两根的中点 $t_{\text{中}} = -\beta/\alpha$ 与 k 无关：同一直线被所有相似同心椭球截出的弦有公共的中点（图 7）。
2. **两侧截段等长。**设内椭球（ $k=1$ ）的两根为 $t_{\text{中}} \pm d_1$ ，外椭球为 $t_{\text{中}} \pm d_k$ （ $d_k > d_1$ ）。直线在 X_0 的正向一侧穿过壳的长度为 $d_k - d_1$ ，反向一侧也是 $d_k - d_1$ ——两段相等。
3. **细锥的贡献相消。**以 X_0 为顶点、沿 $\pm\hat{\mathbf{u}}$ 作立体角 $d\Omega$ 的一对细锥。距 X_0 为 r 处、厚 dr 的一小块体积为 $r^2 d\Omega dr$ ，电荷 $\rho_e r^2 d\Omega dr$ ，在 X_0 处的场强大小 $\frac{\rho_e r^2 d\Omega dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_e}{4\pi\epsilon_0} d\Omega dr$ ——与 r 无关。所以一侧锥内壳层的总场强为 $\frac{\rho_e}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \times (\text{截段长})$ 。两侧截段等长、方向相反，场强相消。
4. 对所有方向求和， X_0 点场强为零。空腔内处处场强为零，电势为常数。

这个论证对任意厚度的相似壳都成立（不需要薄壳近似）。它最早由牛顿对旋转椭球壳给出 [1, 9]。

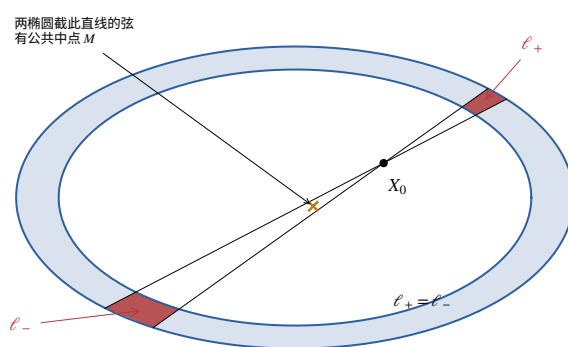


图 7 牛顿定理的证明。过腔内一点 X_0 的直线被两个同心相似椭圆截出的弦有公共中点 M （叉号），所以两侧截下的壳段长度相等， $\ell_+ = \ell_-$ 。以 X_0 为顶点的一对细锥截下的两块壳层（红色）在 X_0 处产生的场强大小相等、方向相反。

交互演示：牛顿定理：调轴比与腔内点 X_0 的位置，看任一方向的直线被相似壳截下的两段等长；读数给出用面元直接库仑求和算得的三维薄壳在 X_0 点的场强——面电荷 $\sigma \propto h$ 时为零（数值误差内），均匀面电荷时一般不为零。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 ellipsoid-homoeoid）。

推导：由牛顿定理得到导体的电荷分布

取薄的相似壳，体电荷密度 ρ_e 。由式 (5.12)，把它压成一层面电荷，面密度 $\sigma = \rho_e \delta = \rho_e \epsilon h \propto h$ 。由牛顿定理，壳内空腔电场为零；令 $\epsilon \rightarrow 0$ ，面电荷 $\sigma \propto h$ 在椭球内部产生零场，椭球内（含表面）电势为常数。这恰是导体静电平衡的条件。由唯一性定理，导体椭球的电荷就是这样分布的；归一化 $\oint \sigma dS = Q$ ($\oint h dS = 4\pi abc$) 给出 $\sigma = Qh/(4\pi abc)$ ，与式 (5.9) 一致——这次没有解任何微分方程。

推导：由电荷分布求电容：中心处的电势

导体是等势体，只需算中心 O 的电势。从 O 出发沿方向 $\hat{u}$ 到表面的距离记为 $L(\hat{u})$ 。上面的细锥论证说明面元满足 $h dS = 3dV = L^3 d\Omega$ ，所以

$$\begin{aligned}\Phi(O) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\sigma dS}{L} = \frac{Q}{16\pi^2\epsilon_0 abc} \oint \frac{h dS}{L} \\ &= \frac{Q}{16\pi^2\epsilon_0 abc} \int L^2 d\Omega.\end{aligned}$$

$L(\hat{u})$ 由 $L^2 \sum u_i^2/a_i^2 = 1$ 给出， $L^2 = 1/(\hat{u} \cdot A \hat{u})$ ， $A = \text{diag}(a^{-2}, b^{-2}, c^{-2})$ 。附录 C 用高斯积分证明角积分恒等式

$$\begin{aligned}\int \frac{d\Omega}{\sum_i u_i^2/a_i^2} &= 2\pi abc \int_0^\infty \frac{dt}{\Delta(t)} \\ &= 2\pi abc I(0).\end{aligned}\tag{5.13}$$

代入得 $\Phi(O) = QI(0)/(8\pi\epsilon_0)$ ，即 $C = 8\pi\epsilon_0/I(0)$ ，与方法 A' 完全一致。（球：左边 = $4\pi a^2$ ，右边 = $2\pi a^3 \cdot 2/a$ ，相等。）

注：推论：沿轴“投影”的电荷是均匀的

旋转椭球 $k\mathcal{E}$ 在 z 到 $z + dz$ 之间的体积是 $\pi a^2(k^2 - z^2/c^2)dz$ ，对 k 求导乘 ϵ 得薄壳体积 $2\pi a^2 \epsilon dz$ ，与 z 无关：导体椭球上的电荷按 z 投影到轴上是均匀的， $dQ/dz = Q/(2c)$ （球面“阿基米德帽盒定理”的推广）。它与方法 B 的焦线电荷不同（焦线长 $2f$ ，投影长 $2c$ ），两者只在外部产生相同的场。

5.6 方法 D：仿射伸缩与投影（依赖方法 C）

推导：由球面均匀电荷得到任意椭球的 $\sigma \propto h$

导体球的电荷均匀分布在球面上，可看成两个同心球（半径 1 与 $1 + \epsilon$ ，取单位球）之间均匀体电荷的极限。作仿射伸缩 $(x, y, z) \rightarrow (ax, by, cz)$ ：

1. 它的雅可比行列式是常数 abc ，所以体积元处处按同一比例 abc 放大，均匀体密度映为均匀体密度，总电荷不变；

2. 同心球 $r = 1$ 、 $r = 1 + \epsilon$ 映为相似椭球 $\mathcal{E}$ 、 $(1 + \epsilon)\mathcal{E}$ ，所以均匀薄球壳映为均匀的相似薄壳；
3. 由牛顿定理（方法 C），这层电荷在椭球内产生零场，所以它就是导体椭球的平衡电荷；它的厚度由式 (5.12) 为 ϵh ，于是 $\sigma \propto h$ 。

伸缩本身不保持库仑定律（不能说“伸缩后的场是原来的场伸缩”）；我们只用了它的两个几何性质（常数雅可比、相似壳映为相似壳），平衡由牛顿定理保证。

推导：压成圆盘：电荷分布与电容

取 $a = b$ 、 $c \rightarrow 0$ ：球面上的电荷被垂直投影到赤道面上的圆盘。半径 a 的球面上面密度 $Q/(4\pi a^2)$ ；赤道面上 ρ 处的面元 dA 对应上、下半球各一块面积 $dA/\cos\theta$ ($\cos\theta = \sqrt{a^2 - \rho^2}/a$)，所以圆盘上的面密度（两面合计）

$$\sigma_{\text{总}}(\rho) = 2 \cdot \frac{Q}{4\pi a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = \frac{Q}{2\pi a \sqrt{a^2 - \rho^2}},$$

与式 (5.10) 一致。圆盘中心的电势

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\sigma_{\text{总}} \cdot 2\pi\rho d\rho}{\rho} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^a \frac{d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = \frac{Q}{8\epsilon_0 a}, \end{aligned}$$

即 $C = 8\epsilon_0 a$ ——得到圆盘电容最快的办法。对一般椭球，中心电势需要第 5.5 节的角积分恒等式。

5.7 几种方法的比较

表 2 导体椭球问题的四类五种解法

方法	出发点	直接得到	妙处 / 代价
A 旋转椭球坐标	拉普拉斯方程 + 正交坐标	$\Phi(\xi) = KQ_0(\cosh\xi)$	一维常微分方程；须先建立坐标与 H_i
A' 椭球参数 λ	$\nabla^2\Phi(\lambda)$ 的链式法则	$\Phi \propto \int_{\lambda}^{\infty} dt/\Delta$	适用于三轴椭球；须算 $\nabla^2\lambda$
B 焦线电荷	库仑积分	长椭球的 Φ 、 C	最初等；须先猜到“焦线”
C 相似薄壳	牛顿定理（几何）	$\sigma \propto h$ ，再积分得 C	不解方程；求 C 要角积分恒等式
D 仿射伸缩	球面均匀电荷 + 伸缩，依赖 C	任意椭球的 $\sigma \propto h$ ；圆盘的 C	最快；求 C 只有圆盘一步可得

6 均匀带电椭球的电势

假设：本节的问题

半轴 a, b, c 的实心椭球内均匀分布体电荷 ρ_e (总电荷 $Q = \rho_e V$)，真空，无其他电荷。求内外电势。所有结论对引力问题同样成立 (把 $1/(4\pi\epsilon_0)$ 换成 $-G$ ， ρ_e 换成质量密度)。

6.1 方法一：叠加相似薄壳

推导：把实心椭球切成相似薄壳

用相似比 $m \in [0, 1]$ 标记椭球 $m\mathcal{E}$ (半轴 ma, mb, mc)。 m 到 $m + dm$ 之间是一个薄相似壳，体积 $d(\frac{4}{3}\pi abc m^3) = 4\pi abc m^2 dm$ ，电荷

$$dq = 4\pi\rho_e abc m^2 dm.$$

第 5.5 节说明：薄相似壳上的电荷分布就是导体椭球 $m\mathcal{E}$ 的平衡分布。所以它在场点 $\mathbf{x}$ 的电势由第 5 节给出：

- 场点在壳外： $d\Phi = \frac{dq}{8\pi\epsilon_0} \int_{\lambda_m}^{\infty} \frac{dt'}{\Delta_m(t')}$ ，其中 $\Delta_m(t') = \sqrt{(m^2 a^2 + t')(m^2 b^2 + t')(m^2 c^2 + t')}$ ， λ_m 是 $\sum x_i^2 / (m^2 a_i^2 + \lambda_m) = 1$ 的根；
- 场点在壳内：电势是常数，等于壳面上的值，即上式取 $\lambda_m = 0$ 。

推导：换元：把 m 从积分里分离出来

令 $t' = m^2 t$ ，则 $\Delta_m(m^2 t) = m^3 \Delta(t)$ ， $dt' = m^2 dt$ ，所以 $\int \frac{dt'}{\Delta_m(t')} = \frac{1}{m} \int \frac{dt}{\Delta(t)}$ ，下限变为 $t_m = \lambda_m / m^2$ 。 t_m 满足

$$\sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2 + t_m} = m^2. \quad (6.1)$$

记 $m(\mathbf{x})^2 \equiv \sum_i x_i^2 / a_i^2$ (场点所在的相似椭球)。场点在 $\mathbf{x}$ 处，比它小的壳 ($m < m(\mathbf{x})$) 在场点“外面”，比它大的壳在场点“里面”。对内部点 ($m(\mathbf{x}) < 1$)，总电势

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{\rho_e abc}{2\epsilon_0} \left[\int_0^{m(\mathbf{x})} m dm \int_{t_m}^{\infty} \frac{dt}{\Delta(t)} + \int_{m(\mathbf{x})}^1 m dm \int_0^{\infty} \frac{dt}{\Delta(t)} \right].$$

(系数： $\frac{4\pi\rho_e abc m^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{m} = \frac{\rho_e abc}{2\epsilon_0} m$ 。)

推导：交换积分次序

第一项是 (m, t) 平面上区域 $\{0 < m < m(\mathbf{x}), t > t_m\}$ 上的二重积分 (图 8)。定义 $m_*(t)^2 \equiv \sum_i x_i^2 / (a_i^2 + t)$ ，它随 t 减小， $m_*(0) = m(\mathbf{x})$ 。由式 (6.1)， $t > t_m$ 等价于 $m_*(t) < m$ 。所以对

固定的 t , m 从 $m_*(t)$ 积到 $m(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \int_0^{m(\mathbf{x})} m \, dm \int_{t_m}^{\infty} \frac{dt}{\Delta} &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{\Delta(t)} \int_{m_*(t)}^{m(\mathbf{x})} m \, dm \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{\Delta(t)} \cdot \frac{m(\mathbf{x})^2 - m_*(t)^2}{2}. \end{aligned}$$

第二项 $= \frac{1-m(\mathbf{x})^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\Delta}$ 。两项相加, $m(\mathbf{x})^2$ 恰好消去:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{in}}(\mathbf{x}) &= \frac{\rho_e abc}{4\epsilon_0} \\ &\times \int_0^{\infty} \left(1 - \sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2 + t} \right) \frac{dt}{\Delta(t)}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

对外部点 ($m(\mathbf{x}) > 1$), 所有壳都在场点“外面”。同样交换次序, 但 m 的上限是 1, 要求 $m_*(t) < 1$, 即 $t > \lambda(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{out}}(\mathbf{x}) &= \frac{\rho_e abc}{4\epsilon_0} \\ &\times \int_{\lambda(\mathbf{x})}^{\infty} \left(1 - \sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2 + t} \right) \frac{dt}{\Delta(t)}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

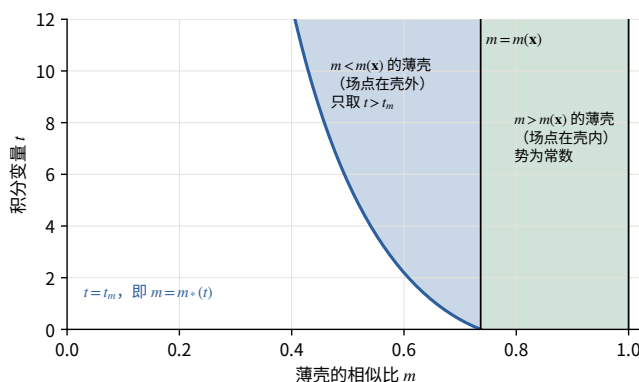


图 8 叠加相似薄壳时的积分区域 ($a : b : c = 3 : 2 : 1$, 场点 $(1.5, 0.9, 0.3)$)。蓝色: 场点在壳外的薄壳, t 从曲线 $m = m_*(t)$ 积到无穷; 绿色: 场点在壳内的薄壳, 贡献常数势。先对 m 积分 (横向) 就把问题化成单重积分。

检验: 球的特例

$a = b = c$: $\Delta = (a^2 + t)^{3/2}$, $\int_0^{\infty} \frac{dt}{(a^2 + t)^{3/2}} = \frac{2}{a}$, $\int_0^{\infty} \frac{dt}{(a^2 + t)^{5/2}} = \frac{2}{3a^3}$ 。式 (6.2) 给出 $\Phi_{\text{in}} = \frac{\rho_e a^3}{4\epsilon_0} \left(\frac{2}{a} - \frac{2r^2}{3a^3} \right) = \frac{\rho_e (3a^2 - r^2)}{6\epsilon_0}$, 正是熟悉的均匀带电球内部电势。

要点: 推论: 麦克劳林定理

设另一个均匀带电实心椭球与之共焦 (半轴平方为 $a_i^2 + s_0$), 总电荷相同 ($\rho'_e a' b' c' = \rho_e abc$)。它的 $\Delta'(t) = \Delta(t + s_0)$, 过场点的参数 $\lambda' = \lambda - s_0$ 。在式 (6.3) 中作平移 $t \rightarrow t - s_0$, 两者的外部电势逐点相同: 共焦的均匀实心椭球, 在两者外部产生的电势只取决于总电荷。这就是经典

的麦克劳林定理 (Maclaurin 1742 对旋转椭球, Laplace 推广到三轴; 据文献 [1, 9] 转述)。它是第 5.2 节导体版本的“实心”对应物。

6.2 方法二：猜解、验证与唯一性

内部电势是二次型这件事，也可以反过来用：猜出答案，再验证它满足全部条件。为此先写成

$$\Phi = \frac{\rho_e abc}{4\epsilon_0} \left[I(\lambda) - \sum_i x_i^2 J_i(\lambda) \right], \quad (6.4)$$

$$J_i(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{dt}{(a_i^2 + t)\Delta(t)}$$

内部取 $\lambda = 0$ ，外部取 $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$ 。

推导：逐条验证

1. 一个关键恒等式。 $\frac{d}{dt} \frac{1}{\Delta(t)} = -\frac{\Delta'}{\Delta^2} = -\frac{1}{2\Delta} \sum_i \frac{1}{a_i^2 + t}$ (式 (3.8) 的最后一步)，从 λ 积到 ∞ ：

$$\sum_i J_i(\lambda) = \frac{2}{\Delta(\lambda)}. \quad (6.5)$$

2. 内部满足泊松方程。内部 $\lambda = 0$ 是常数， $\nabla^2 \Phi_{\text{in}} = -\frac{\rho_e abc}{4\epsilon_0} \cdot 2 \sum_i J_i(0) = -\frac{\rho_e abc}{4\epsilon_0} \cdot \frac{4}{abc} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}$ 。

3. 外部满足拉普拉斯方程。外部 λ 随 $\mathbf{x}$ 变。式 (6.3) 的被积函数在下限 $t = \lambda$ 处等于 $1 - \sum x_i^2 / (a_i^2 + \lambda) = 0$ ，所以对 x_i 求导时下限变化不产生额外项：

$$\frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial x_i} = -\frac{\rho_e abc}{4\epsilon_0} 2x_i J_i(\lambda).$$

再求一次导， J_i 的下限依赖 x_i ， $\partial J_i / \partial x_i = -\frac{1}{A_i \Delta(\lambda)} \partial_i \lambda$ ：

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_{\text{out}} &= -\frac{\rho_e abc}{4\epsilon_0} \left[2 \sum_i J_i(\lambda) - \sum_i \frac{2x_i}{A_i \Delta} \cdot \frac{2x_i}{A_i \Gamma} \right] \\ &= -\frac{\rho_e abc}{4\epsilon_0} \left[\frac{4}{\Delta} - \frac{4}{\Delta} \right] = 0, \end{aligned}$$

第二项用了式 (3.7) 与 $\sum x_i^2 / A_i^2 = \Gamma$ 。

4. 表面上电势与电场都连续。表面 $\lambda(\mathbf{x}) = 0$ ，两式相同；上面第 3 步说明 $\nabla \Phi_{\text{out}}$ 的表达式在 $\lambda = 0$ 时也与 $\nabla \Phi_{\text{in}}$ 相同。体电荷没有面电荷，电场本应连续，相符。

5. 远处。 $\lambda \approx r^2 \rightarrow \infty$ ， $I \approx 2/r$ ， $x_i^2 J_i \sim r^2 \cdot r^{-5}$ 可略： $\Phi \approx \frac{\rho_e abc}{4\epsilon_0} \cdot \frac{2}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 。

满足全部条件，由唯一性定理即为所求。

注：为什么这里离不开第 5 节

泊松方程只约束系数之和：任何 $A - \sum B_i x_i^2$ 只要 $\sum B_i = \rho_e / (2\epsilon_0)$ 都满足它。三个 B_i 各是多少，取决于外部能否接上一个在无穷远衰减、在椭球面上值与法向导数都连续的调和函数——这是

整体条件。“猜”的依据正是第 5 节给出的共焦族调和函数 $I(\lambda)$ 及其衍生的 $I(\lambda) - \sum x_i^2 J_i(\lambda)$ 。

6.3 方法三：射线法（以场点为中心的库仑积分）

前两种方法都借用了导体问题。下面直接从库仑定律出发证明“内部电势是二次型”。

推导：内部点的电势

取椭球内一点 $\mathbf{x}$ ，以它为原点建立球坐标。沿方向 $\hat{\mathbf{u}}$ 到椭球面的距离记为 $L(\hat{\mathbf{u}})$ 。体积元 $r^2 dr d\Omega$ 的电荷在 $\mathbf{x}$ 处的电势为 $\frac{\rho_e r^2 dr d\Omega}{4\pi\epsilon_0 r}$ ，先对 r 从 0 积到 L ：

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{\rho_e}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega \int_0^{L(\hat{\mathbf{u}})} r dr = \frac{\rho_e}{8\pi\epsilon_0} \int L(\hat{\mathbf{u}})^2 d\Omega.$$

L 满足 $(\mathbf{x} + L\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x} + L\hat{\mathbf{u}}) = 1$ ，即 $\alpha L^2 + 2\beta L - (1 - \gamma) = 0$ ，其中（与牛顿定理证明中的记号相同）

$$\alpha = \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}} = \sum_i \frac{u_i^2}{a_i^2}, \quad \beta = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}} = \sum_i \frac{x_i u_i}{a_i^2},$$

$$\gamma = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} < 1.$$

正根 $L(\hat{\mathbf{u}}) = (-\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha(1 - \gamma)})/\alpha$ 。把相反方向 $-\hat{\mathbf{u}}$ ($\beta \rightarrow -\beta$, α 不变) 配成一对，记 $\Sigma \equiv \sqrt{\beta^2 + \alpha(1 - \gamma)}$ ：

$$\begin{aligned} L(\hat{\mathbf{u}})^2 + L(-\hat{\mathbf{u}})^2 &= \frac{(-\beta + \Sigma)^2 + (\beta + \Sigma)^2}{\alpha^2} \\ &= \frac{2[2\beta^2 + \alpha(1 - \gamma)]}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

根号消失了！对全部方向积分时每对方向算了两次，所以

$$\Phi_{\text{in}}(\mathbf{x}) = \frac{\rho_e}{8\pi\epsilon_0} \int d\Omega \left[\frac{1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}}{\alpha} + \frac{2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}})^2}{\alpha^2} \right]. \quad (6.6)$$

α 只依赖方向， γ 和 β^2 都是 $\mathbf{x}$ 的二次多项式：**内部电势是二次型**，内部电场是坐标的线性函数。

要点：推论：牛顿定理的第二个证明

对相似椭球 $m\mathcal{E}$, $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/m^2$: $\alpha \rightarrow \alpha/m^2$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}}/m^2$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}/m^2$ 。代入式 (6.6)，第二项不变，第一项变为 $(m^2 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x})/\alpha$ 。所以对腔内同一点， $\Phi_{m\mathcal{E}} - \Phi_{\mathcal{E}} = \frac{\rho_e(m^2-1)}{8\pi\epsilon_0} \int \frac{d\Omega}{\alpha}$ 与 $\mathbf{x}$ 无关：相似壳（两者之差）在腔内的电势是常数，场为零。

系数的计算 式 (6.6) 中交叉项 $u_i u_j$ ($i \neq j$) 在 $\hat{\mathbf{u}} \rightarrow$ 镜像方向时变号，积分为零，所以 $\int \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}})^2}{\alpha^2} d\Omega = \sum_i \frac{x_i^2}{a_i^4} \int \frac{u_i^2}{\alpha^2} d\Omega$ 。附录 C 用高斯积分证明

$$\int \frac{u_i^2}{\alpha^2} d\Omega = \pi abc a_i^2 [I(0) - a_i^2 J_i(0)]. \quad (6.7)$$

把它和式 (5.13) 代入式 (6.6), $\sum x_i^2/a_i^2$ 的项正好消去, 剩下的就是式 (6.2)。三种方法殊途同归 (三轴椭球上的直接库仑积分核对见 VERIFY.md)。

6.4 退极化因子

定义：退极化因子

$$N_i \equiv \frac{abc}{2} J_i(0) = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{(a_i^2 + t)\Delta(t)} \quad (6.8)$$

($i = 1, 2, 3$)。它们是无量纲的纯几何量, 只依赖于两个轴比。式 (6.2) 写成

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{in}} &= \phi_0 - \frac{\rho_e}{2\varepsilon_0} \sum_i N_i x_i^2, \\ \phi_0 &= \frac{\rho_e abc}{4\varepsilon_0} I(0), \\ \mathbf{E}_{\text{in}} &= \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} (N_1 x, N_2 y, N_3 z). \end{aligned} \quad (6.9)$$

名称的来历见第 7 节: N_i 决定均匀极化椭球内部的“退极化场”。在磁学中同样的量叫退磁因子 [10, 11]。

检验: $\sum N_i = 1$, 及其物理意义

由式 (6.5), $\sum_i N_i = \frac{abc}{2} \cdot \frac{2}{abc} = 1$ 。物理上: $\nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{in}} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \sum N_i$ 必须等于 ρ_e/ε_0 (高斯定理), 所以和必为 1。由定义, a_i 越小 J_i 越大: 越短的轴, N_i 越大。球 $N_i = 1/3$ 。3 : 2 : 1 椭球 $N = (0.1563, 0.2672, 0.5765)$ (数值计算可用卡尔松函数, 见附录 B)。

推导: 旋转椭球的闭式

$a = b$, 求对称轴方向的 $N_z = \frac{a^2 c}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{(a^2 + t)(c^2 + t)^{3/2}}$ 。代换 $\tau = \sqrt{c^2 + t}$, $dt = 2\tau d\tau$:

- 长椭球 ($c > a$): $a^2 + t = \tau^2 - f^2$, $N_z = a^2 c \int_c^\infty \frac{d\tau}{\tau^2(\tau^2 - f^2)}$ 。部分分式 $\frac{1}{\tau^2(\tau^2 - f^2)} = \frac{1}{f^2} \left[\frac{1}{\tau^2 - f^2} - \frac{1}{\tau^2} \right]$, 而 $\int_c^\infty \frac{d\tau}{\tau^2 - f^2} = \frac{1}{f} \operatorname{artanh} \frac{f}{c}$, $\int_c^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} = \frac{1}{c}$:

$$\begin{aligned} N_z &= \frac{a^2}{f^2} \left[\frac{c}{f} \operatorname{artanh} \frac{f}{c} - 1 \right] \\ &= \frac{1 - e^2}{e^3} (\operatorname{artanh} e - e), \quad e = \frac{f}{c}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

(第二步用了 $a^2 = c^2(1 - e^2)$ 。)

- 扁椭球 ($c < a$): $a^2 + t = \tau^2 + f^2$, 同样的部分分式 ($-f^2$ 换成 $+f^2$) 给出

$$\begin{aligned} N_z &= \frac{a^2}{f^2} \left[1 - \frac{c}{f} \arctan \frac{f}{c} \right] \\ &= \frac{1}{e^2} \left[1 - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \arcsin e \right], \\ e &= \frac{f}{a}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

- 两种情形都有 $N_x = N_y = (1 - N_z)/2$ (对称性 + $\sum N_i = 1$)。

检验：极限

- 球 ($e \rightarrow 0$) : $\operatorname{artanh} e - e = \frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{5} + \dots$, $N_z \rightarrow \frac{1}{3}$; 扁椭球一侧 $\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \arcsin e = 1 - \frac{e^2}{3} + \mathcal{O}(e^4)$, 同样 $N_z \rightarrow \frac{1}{3}$ 。

- 细针 (长椭球 $a \ll c$): $1 - e^2 = a^2/c^2$, $\operatorname{artanh} e = \frac{1}{2} \ln \frac{1+e}{1-e} \approx \frac{1}{2} \ln \frac{4c^2}{a^2} = \ln \frac{2c}{a}$, 所以

$$N_z \approx \frac{a^2}{c^2} \left[\ln \frac{2c}{a} - 1 \right] \rightarrow 0, \quad (6.12)$$

$$N_x \rightarrow \frac{1}{2}.$$

- 薄盘 (扁椭球 $c \ll a$) : 小参量 $q = c/a = \sqrt{1-e^2}$, $\arcsin e = \arccos q \approx \frac{\pi}{2} - q$, $N_z \approx (1+q^2) \left[1 - q \left(\frac{\pi}{2} - q \right) \right] \approx 1 - \frac{\pi}{2} \frac{c}{a}$,

$$N_z \rightarrow 1, \quad N_x \approx \frac{\pi}{4} \frac{c}{a} \rightarrow 0. \quad (6.13)$$

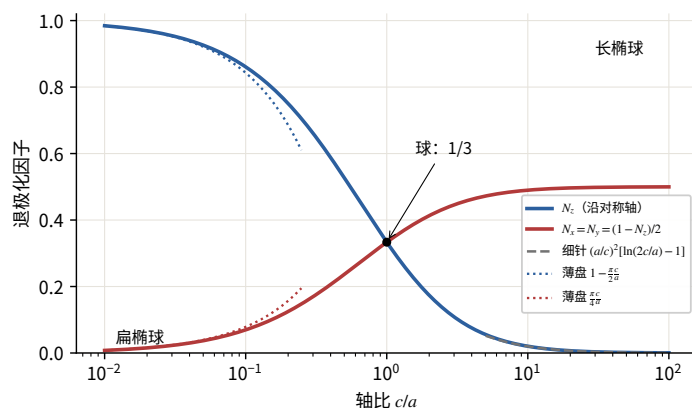


图 9 旋转椭球的退极化因子随轴比的变化 (式 (6.10)、(6.11)), 虚线与点线为式 (6.12)、(6.13) 的渐近式。两条曲线在球 ($N = 1/3$) 处相交。常用值: $c/a = 2$ 时 $N_z = 0.1736$, $c/a = 1/2$ 时 $N_z = 0.5272$ 。

交互演示：退极化因子 N_z 、 N_x 随轴比 c/a 的变化 (对数横轴, 扁、长两侧)。拖动滑块选取轴比, 读出 N_z 、 N_x 、渐近式的误差, 以及给定 ε_r 时两种取向的内部场 E_{in}/E_0 。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 ellipsoid-depol)。

要点：优雅的联系: N_i 、电容与中心电势

- N_i 是电容积分的导数。对 $I(0) = \int_0^\infty dt/\Delta$ 中的 a_i^2 求偏导 (积分号下求导), $\frac{\partial}{\partial(a_i^2)} \frac{1}{\Delta} = -\frac{1}{2(a_i^2+t)\Delta}$, 所以

$$N_i = -abc \frac{\partial I(0)}{\partial(a_i^2)}. \quad (6.14)$$

- 齐次性。**把三个 a_i^2 同乘 s , 代换 $t = st'$ 知 $I \rightarrow s^{-1/2}I$: I 是 a_i^2 的 $-\frac{1}{2}$ 次齐次函数。欧

拉齐次函数定理（对 s 求导后令 $s = 1$ ）给出 $\sum_i a_i^2 \frac{\partial I}{\partial (a_i^2)} = -\frac{1}{2}I$ ，与式 (6.14) 联立：

$$\begin{aligned} \sum_i N_i a_i^2 &= \frac{abc}{2} I(0) \\ \iff C &= \frac{4\pi\epsilon_0 abc}{\sum_i N_i a_i^2}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

核对：球 $4\pi\epsilon_0 a^3/a^2 = 4\pi\epsilon_0 a$ ；薄盘 $\sum N_i a_i^2 \approx 2 \cdot \frac{\pi}{4} \frac{c}{a} \cdot a^2 = \frac{\pi}{2} ac$, $C = 4\pi\epsilon_0 a^2 c / (\frac{\pi}{2} ac) = 8\epsilon_0 a$ 。

由 $C = 8\pi\epsilon_0/I(0)$ 与上两式还得到退极化因子的一个几何意义：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln C}{\partial \ln a_i} &= -2a_i^2 \frac{\partial \ln I}{\partial (a_i^2)} \\ &= \frac{N_i a_i^2}{\sum_j N_j a_j^2}, \\ \sum_i \frac{\partial \ln C}{\partial \ln a_i} &= 1, \end{aligned} \quad (6.16)$$

即把第 i 根半轴拉长 1%，电容增加 $N_i a_i^2 / \sum N_j a_j^2$ 个百分点（三者之和为 1，因为 C 是长度的一次齐次函数）。

3. **中心电势是导体电势的 3/2 倍。**由式 (6.9) 与 $C = 8\pi\epsilon_0/I(0)$ ： $\phi_0 = \frac{\rho_e abc}{4\epsilon_0} \cdot \frac{8\pi\epsilon_0}{C} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{C}$ 。均匀带电椭球中心的电势，恰是同样电荷放在同形导体上时导体电势的 3/2 倍——对任何椭球都对（球的情形是熟知的 $\frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a}$ 与 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$ ）。

6.5 方法四：旋转椭球坐标中直接解（“双曲坐标法”）

前三种方法都没有在坐标系里解边值问题。对长旋转椭球 ($a = b < c$, $u_0 = \cosh \xi_0 = c/f$)，可以像第 5、7 节那样在 (u, v) 坐标中直接解：泊松方程在内部，拉普拉斯方程在外部，界面上 Φ 与 $\partial_u \Phi$ 连续（体电荷没有面电荷）。

推导：内部：泊松方程的二次多项式解

由 $\nabla^2(\rho^2) = 4$ 、 $\nabla^2(z^2) = 2$ ， $-\frac{\rho_e}{6\epsilon_0}(\rho^2 + z^2)$ 是泊松方程的一个特解；对称性允许的二次调和函数只有 $z^2 - \frac{1}{2}\rho^2$ 。所以内部试探解取（它在内部处处正则；若能满足全部条件，由唯一性定理即为解，§7.3 同此）

$$\Phi_{\text{in}} = A - \frac{\rho_e}{6\epsilon_0}(\rho^2 + z^2) + d_2 \left(z^2 - \frac{1}{2}\rho^2 \right),$$

A 、 d_2 待定。用 $\rho^2 = f^2(u^2 - 1)(1 - v^2)$ 、 $z^2 = f^2 u^2 v^2$ 及 $v^2 = \frac{1}{3}[1 + 2P_2(v)]$ ，直接展开得

$$\begin{aligned} \rho^2 + z^2 &= f^2 \left(u^2 - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3} f^2 P_2(v), \\ z^2 - \frac{1}{2}\rho^2 &= \frac{1}{3} f^2 + \frac{2}{3} f^2 P_2(u) P_2(v). \end{aligned}$$

所以内部势只含 $P_0(v)$ 与 $P_2(v)$ 两个角向分量：

$$\Phi_{\text{in}} = \left[A' - \frac{\rho_e f^2}{6\epsilon_0} u^2 \right] + \frac{2f^2}{3} \left[d_2 P_2(u) - \frac{\rho_e}{6\epsilon_0} \right] P_2(v),$$

A' 是新的常数。

推导：外部与界面条件

外部取衰减的分离解，角向分量与内部相同： $\Phi_{\text{out}} = \alpha_0 Q_0(u) + \beta_2 Q_2(u) P_2(v)$ 。在 $u = u_0$ 上分别对 P_0 、 P_2 分量要求值与 u 导数连续：

1. P_0 导数： $-\frac{\rho_e f^2}{3\epsilon_0} u_0 = \alpha_0 Q'_0(u_0) = -\frac{\alpha_0}{u_0^2 - 1}$ ，故 $\alpha_0 = \frac{\rho_e f^2}{3\epsilon_0} u_0(u_0^2 - 1) = \frac{\rho_e a^2 c}{3\epsilon_0 f} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 f}$ （这就是高斯定理）； P_0 的值条件定出 A' ，换回原来的常数，中心电势 $A = \frac{\rho_e a^2 c}{2\epsilon_0 f} Q_0(u_0) = \phi_0 = \frac{3}{2} \frac{Q}{C}$ ，与第 6.4 节要点第 3 条一致。

2. P_2 的值与导数： $\frac{2f^2}{3} [d_2 P_2 - \frac{\rho_e}{6\epsilon_0}] = \beta_2 Q_2$ ， $\frac{2f^2}{3} d_2 P'_2 = \beta_2 Q'_2$ （都在 u_0 处）。两式相除消去 β_2 ： $d_2(P_2 Q'_2 - P'_2 Q_2) = \frac{\rho_e}{6\epsilon_0} Q'_2$ 。括号正是朗斯基行列式 $W_2 = -1/(u_0^2 - 1)$ ，所以

$$d_2 = -\frac{\rho_e}{6\epsilon_0} (u_0^2 - 1) Q'_2(u_0),$$

$$\beta_2 = \frac{2f^2 d_2 P'_2(u_0)}{3Q'_2(u_0)} = -\alpha_0.$$

要点：结果：再次读出 N_z ，以及外部势的简洁形式

内部 z^2 的系数为 $-\frac{\rho_e}{6\epsilon_0} + d_2 \equiv -\frac{\rho_e}{2\epsilon_0} N_z$ （式 (6.9)），于是

$$N_z = \frac{1}{3} \left[1 + (u_0^2 - 1) Q'_2(u_0) \right] \quad (6.17)$$

$$= (u_0^2 - 1) Q_1(u_0).$$

第一种写法显示 N_z 是球的 $\frac{1}{3}$ 加上 P_2 型（四极）修正；把 $Q'_2 = 3uQ_0 - \frac{3u^2-1}{2(u^2-1)} - \frac{3}{2}$ 代入化简即得第二种写法，与第 7 节由 Q_1 读出的式 (7.4)、与积分算出的式 (6.10) 一致。外部势则是

$$\Phi_{\text{out}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 f} \left[Q_0(u) - Q_2(u) P_2(v) \right], \quad (6.18)$$

只依赖总电荷 Q 与焦距 f ——麦克劳林定理在长椭球上的显式形式。远处 $Q_0 \approx \frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3}$ 、 $Q_2 \approx \frac{2}{15u^3}$ ，单极项之后是四极项（电荷分布偏离球对称引起的、按 $1/r^3$ 衰减、角分布为 $P_2(\cos\theta)$ 的项）。式 (6.18) 与式 (6.3) 在长椭球外逐点一致（数值核对见 VERIFY.md）。

表 3 均匀带电椭球的四种解法

方法	依赖	最强的地方	代价
一叠加相似薄壳	第 5 节的导体解 + 牛顿定理	内外公式一次得到	交换积分次序要画区域
二猜解 + 唯一性	第 5 节的 λ 计算	验证每一步都短	须先知道答案的形式
三射线法	只用库仑定律	直接证明“二次型”与牛顿定理	系数要角积分恒等式
四坐标法	旋转椭球坐标 + $P_2 Q_2$	由朗斯基行列式读出 N_z ；外部势显式	只适用于旋转椭球

7 旋转椭球沿长轴的极化

7.1 前置：极化、束缚电荷与边界条件

前置知识：电介质的宏观描述

- **极化强度 $\mathbf{P}$** ：单位体积内的电偶极矩。均匀极化可以想成：正电荷“果冻”相对负电荷“果冻”整体平移了一小段 δ ，两者体密度 $\pm\rho_+$ ， $\mathbf{P} = \rho_+\delta$ 。
- **束缚电荷**：体内两种电荷重叠处抵消；只在表面留下一层“没被覆盖”的电荷，面密度 $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ ($\hat{\mathbf{n}}$ 为外法向；表面元 dS 处多出的电荷是厚 $\delta \cdot \hat{\mathbf{n}}$ 的薄层)。非均匀极化时体内还有 $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 。极化介质的场就是这些束缚电荷按库仑定律产生的场。
- **线性各向同性介质**： $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$ ， $\chi = \varepsilon_r - 1$ ；电位移 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$ 。
- **边界条件**（无自由面电荷）： Φ 连续（等价于 $\mathbf{E}$ 切向分量连续）； $\mathbf{D}$ 的法向分量连续，即 $\varepsilon_{r,1} \partial_n \Phi_1 = \varepsilon_{r,2} \partial_n \Phi_2$ 。它们来自束缚面电荷： $\varepsilon_0(E_{n,\text{外}} - E_{n,\text{内}}) = \sigma_b = P_{n,\text{内}}$ ，移项即 D_n 连续。
- 唯一性定理对分区均匀的介质同样成立（证明中把 $|\nabla w|^2$ 换成 $\varepsilon_r |\nabla w|^2$ ）[2]。

假设：本节的问题

相对介电常数为 ε_r 的均匀线性介质旋转椭球（以 z 为对称轴，赤道半轴 a ，极半轴 c ；“沿长轴”时 $c > a$ ），放在沿 z 方向的匀强电场 E_0 中。外场由远处的源产生，不受椭球影响。求椭球内的场与外部场。

7.2 方法一：两个错开的均匀带电椭球

推导：均匀极化椭球的内部场是均匀的

设椭球均匀极化，极化强度 $\mathbf{P}$ 沿 z 。把它看成电荷密度 $+\rho_e$ 的椭球中心移到 $+\frac{\delta}{2}\hat{\mathbf{z}}$ 、 $-\rho_e$ 的移到 $-\frac{\delta}{2}\hat{\mathbf{z}}$ ， $\mathbf{P} = \rho_e \delta$ ， $\delta \rightarrow 0$ 而 $\mathbf{P}$ 固定。记均匀带电椭球的势为 $\Phi_\rho(\mathbf{x})$ ，则极化椭球的势

$$\begin{aligned}\Phi_P(\mathbf{x}) &= \Phi_\rho(\mathbf{x} - \frac{\delta}{2}\hat{\mathbf{z}}) - \Phi_\rho(\mathbf{x} + \frac{\delta}{2}\hat{\mathbf{z}}) \\ &\approx -\delta \frac{\partial \Phi_\rho}{\partial z} = -\frac{P}{\rho_e} \frac{\partial \Phi_\rho}{\partial z}.\end{aligned}$$

（一阶泰勒展开，误差 $\mathcal{O}(\delta^2)$ 。）内部用式 (6.9)， $\partial_z \Phi_\rho = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} N_z z$ ：

$$\Phi_{P,\text{in}} = \frac{N_z P}{\varepsilon_0} z, \quad \mathbf{E}_{P,\text{in}} = -\frac{N_z}{\varepsilon_0} P \hat{\mathbf{z}}. \quad (7.1)$$

这就是退极化场：均匀极化椭球内部，束缚电荷产生的场处处相同，方向与 $\mathbf{P}$ 相反，大小为 $N_z P / \varepsilon_0$ 。外部用式 (6.4) (λ 随 $\mathbf{x}$ 变；求导时下限项同样为零)：

$$\begin{aligned}\Phi_{P,\text{out}} &= \frac{abc P}{2\varepsilon_0} z J_3(\lambda(\mathbf{x})) \\ &= \frac{abc P}{2\varepsilon_0} z \int_{\lambda(\mathbf{x})}^{\infty} \frac{dt}{(c^2 + t)\Delta(t)}.\end{aligned} \quad (7.2)$$

远处 $J_3 \approx \int_{r^2}^{\infty} t^{-5/2} dt = \frac{2}{3r^3}$, $\Phi_{P,\text{out}} \approx \frac{abcP}{3\varepsilon_0} \frac{z}{r^3} = \frac{(VP)\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$: 偶极矩 $p = VP$ 的偶极子场, 相符。极化沿 x 、 y 时同理, 把 N_z 、 J_3 换成 N_x 、 J_1 等。

推导: 介质椭球在匀强场中

假设椭球被均匀极化 (下面验证这一假设自洽)。内部总场 = 外场 + 退极化场: $E_{\text{in}} = E_0 - N_z P / \varepsilon_0$, 均匀。线性介质要求 $P = \varepsilon_0 \chi E_{\text{in}}$, 也均匀——与假设一致。联立解出

$$\begin{aligned} E_{\text{in}} &= \frac{E_0}{1 + N_z(\varepsilon_r - 1)}, \\ P &= \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_0}{1 + N_z(\varepsilon_r - 1)}, \\ p = VP &= \varepsilon_0 V \tilde{\alpha}_z E_0, \quad \tilde{\alpha}_z \equiv \frac{\chi}{1 + N_z \chi}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

为什么这就是解: 这个构造给出的总势 $\Phi = -E_0 z + \Phi_P$ 在内外都满足拉普拉斯方程 (内部是 z 的线性函数, 外部是外场加式 (7.2)); Φ 在表面连续 (束缚面电荷的势是连续的); D_n 连续 (前置知识中已说明, 它等价于 $\sigma_b = P_n$, 而我们正是用这层面电荷构造的场); 远处趋于 $-E_0 z$ 。由唯一性定理, 它是唯一解。

检验: 球

$N_z = \frac{1}{3}$: $E_{\text{in}} = \frac{3E_0}{\varepsilon_r + 2}$, 熟知的介质球结果 [2]。

7.3 方法二: 旋转椭球坐标中分离变量

现在不借用第 6 节, 直接在长旋转椭球坐标中解边值问题。设椭球面为 $u = u_0 = \cosh \xi_0 = c/f$ ($f = \sqrt{c^2 - a^2}$)。

推导: 选择解的形式

外场的势 $-E_0 z = -E_0 f uv = -E_0 f P_1(u)P_1(v)$ 是 $n = 1$ 的分离解。边界 $u = u_0$ 上它正比于 $P_1(v)$, 所以试探内外解的角向部分都只取 $P_1(v)$ 。只要这种形式能满足全部边界条件, 由唯一性定理它就是解, 不必再讨论其他的 n 。

- 内部 (含焦线段 $u = 1$): $U(u)$ 只能取在 $u = 1$ 处有限的 $P_1(u) = u$ (Q_1 在 $u \rightarrow 1$ 发散): $\Phi_{\text{in}} = -E_{\text{in}} f uv = -E_{\text{in}} z$ 。
- 外部: 外场加一个在远处衰减的解 $Q_1(u)P_1(v)$: $\Phi_{\text{out}} = -E_0 f uv + B Q_1(u) v$ 。

推导: 边界条件

在 $u = u_0$ 上, 对所有 v :

1. Φ 连续: $-E_{\text{in}} f u_0 = -E_0 f u_0 + B Q_1(u_0)$ 。
2. D_n 连续。法向就是 ξ 方向, $\partial_n = \frac{1}{H_\xi} \partial_\xi = \frac{\sinh \xi}{H_\xi} \partial_u$, 两侧的 $\frac{\sinh \xi_0}{H_\xi}$ 相同, 约去: $\varepsilon_r \partial_u \Phi_{\text{in}} = \partial_u \Phi_{\text{out}}$, 即 $-\varepsilon_r E_{\text{in}} f = -E_0 f + B Q_1'(u_0)$ 。

由第 1 式 $B = fu_0(E_0 - E_{\text{in}})/Q_1(u_0)$, 代入第 2 式, 记 $\Theta \equiv u_0 Q_1'(u_0)/Q_1(u_0)$:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_r E_{\text{in}} &= -E_0 + \Theta(E_0 - E_{\text{in}}) \\ \Rightarrow E_{\text{in}} &= \frac{(1 - \Theta)E_0}{\varepsilon_r - \Theta} = \frac{E_0}{1 + \frac{1}{1-\Theta}(\varepsilon_r - 1)}. \end{aligned}$$

与式 (7.3) 形式完全相同, 并给出 $N_z = \frac{1}{1 - \Theta} = \frac{Q_1(u_0)}{Q_1(u_0) - u_0 Q_1'(u_0)}$ 。分母正是朗斯基行列式 (第 4.3 节): $Q_1 - uQ_1' = -W_1 = \frac{1}{u^2 - 1}$ 。于是

$$\begin{aligned} N_z &= (u_0^2 - 1) Q_1(u_0) \\ &= (u_0^2 - 1) \left[\frac{u_0}{2} \ln \frac{u_0 + 1}{u_0 - 1} - 1 \right], \\ u_0 &= \frac{c}{f} = \frac{1}{e}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

代入 $u_0 = 1/e$: $u_0^2 - 1 = \frac{1-e^2}{e^2}$, $u_0 Q_0(u_0) = \frac{1}{e} \text{artanh } e$, 得 $N_z = \frac{1-e^2}{e^3} (\text{artanh } e - e)$, 与方法一的式 (6.10)、第 6 节方法四的式 (6.17) 一致: 同一个 N_z , 在均匀带电问题里由 $P_2 Q_2$ 的匹配读出, 在极化问题里由 $P_1 Q_1$ 的匹配读出, 两处都靠朗斯基行列式化简。

远处 $BQ_1 v \approx \frac{Bf^2 \cos \theta}{3r^2}$, 由 $B = fu_0(u_0^2 - 1)P/\varepsilon_0$ 得偶极矩 $\frac{4\pi\varepsilon_0 Bf^2}{3} = \frac{4}{3}\pi a^2 c P = VP$, 与方法一一致。

注: 两种方法的对照

方法一说明了为什么内部场均匀 (二次型求一次导数), 且适用于三轴椭球、任意方向, 但依赖第 6 节; 方法二自成一体, 退极化因子以 $(u_0^2 - 1)Q_1(u_0)$ 的形式由朗斯基行列式 “自己跳出来”, 但只适用于旋转椭球 (三轴椭球需要椭球谐函数——在 (λ, μ, ν) 中分离变量得到的乘积解 [12])。扁椭球用 $\tilde{Q}_1$ 同样处理, 得 $N_z = (1 + u_0^2)\tilde{Q}_1(u_0)$, 与式 (6.11) 一致。

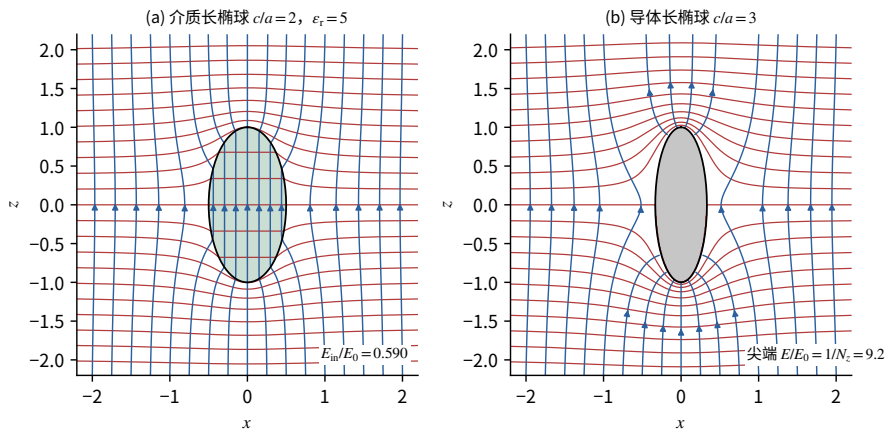


图 10 匀强场 $E_0 \hat{z}$ 中的长椭球 (由式 (7.3) 与分离变量的精确解计算)。蓝: 电场线; 红: 等势线。(a) 介质 $\varepsilon_r = 5$ 、 $c/a = 2$: 内部等势线等间距水平、电场线平行, $E_{\text{in}} = 0.590E_0$ 。(b) 导体 $c/a = 3$: 电场线垂直终止于表面, 尖端场强为 $E_0/N_z = 9.2E_0$ 。

7.4 讨论

- **导体极限** ($\varepsilon_r \rightarrow \infty$): $E_{\text{in}} \rightarrow 0$, $P \rightarrow \varepsilon_0 E_0 / N_z$ 。导体表面感应电荷 $\sigma = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \varepsilon_0 E_0 n_z / N_z$ 。在尖端 $n_z = 1$, 表面场强

$$E_{\text{尖}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{E_0}{N_z}. \quad (7.5)$$

球 $3E_0$ (熟知); 导体 $c/a = 10$ 时 $49E_0$; 细针 $\approx \frac{(c/a)^2}{\ln(2c/a)-1} E_0$ 。式 (7.5) 只对不带净电荷的导体成立; 若导体还带电 Q , 尖端场还要加上第 5.3 节的 $Q/(4\pi\varepsilon_0 a^2)$ 。

- **有限 ε_r 时的尖端场**: 介质尖端外侧的法向场由 D_n 连续得 $E_{\text{尖}} = \varepsilon_r E_{\text{in}} = \frac{\varepsilon_r E_0}{1 + N_z(\varepsilon_r - 1)}$, 只有 $N_z(\varepsilon_r - 1) \gg 1$ 时才趋于 E_0/N_z 。细针 $N_z \rightarrow 0$ 时它的上限是 $\varepsilon_r E_0$: 例如 $c/a = 10$, $\varepsilon_r = 6$ 的玻璃针只有 $6/(1 + 0.0203 \times 5) \approx 5.4$ 倍, 而同形导体针是 49 倍。
- **细针与薄盘**: 沿细针长轴极化, $N_z \rightarrow 0$, 退极化场可忽略, $E_{\text{in}} \rightarrow E_0$ ——针“几乎不退极化”, $\mathbf{P}$ 可以很大。场垂直于薄盘时 $N_z \approx 1 - \frac{\pi c}{2a}$, $1 + N_z \chi = \varepsilon_r - \frac{\pi c}{2a} \chi$, 相对修正 $\frac{\pi c}{2a} \frac{\chi}{\varepsilon_r} < \frac{\pi c}{2a}$; 盘足够薄时 $E_{\text{in}} \rightarrow E_0/\varepsilon_r$, 盘内的 D 等于外面的 $\varepsilon_0 E_0$ (就像平行板电容器中的介质片), 几乎“全退极化”。
- **垂直于对称轴的极化**: 把 N_z 换成 $N_x = (1 - N_z)/2$ 。一般方向的外场分解为沿主轴的分量, 各自用对应的 N_i : $E_{\text{in},i} = E_{0,i}/(1 + N_i \chi)$ 。由于 $N_x \neq N_z$, 内部场与 $\mathbf{P}$ 一般不平行于外场, 椭球受到力矩 (例题 3)。
- **只有椭球如此**: 若一个均匀体对任意方向的均匀极化内部场都均匀, 则它的内部势是二次型 (均匀极化的势是均匀带电势的方向导数), 由导读中的牛顿定理之逆 (Dive–Nikliborc, 据文献 [1] 转述) 它必是椭球。对长方体、圆柱等, 内部场不均匀, “退极化因子”只能定义为某种平均值。
- **磁学类比**: 把 $\mathbf{P}/\varepsilon_0$ 换成磁化强度 $\mathbf{M}$, $\mathbf{E}$ 换成 $\mathbf{H}$, 就得到均匀磁化椭球内部的退磁场 $\mathbf{H}_d = -N\mathbf{M}$, N 就是同一组几何因子 [10, 11]。

交互演示: 匀强场中的介质旋转椭球: 调相对介电常数 ε_r (可设为很大以模拟导体)、轴比 c/a 与外场方向 (与对称轴的夹角 θ)。由精确解画等势线与电场线, 读出内部场的大小与方向、偶极矩、力矩。可以看到任意 θ 下内部等势线都是平行等距直线 (内部场均匀), 但一般不垂直于外场。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 ellipsoid-dielectric)。

8 决赛风格例题

例题中的数值均由 `scripts/verify_examples.py` 计算并用 `assert` 交叉核对。取 $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 。

例题 1: 避雷针为什么要尖

把一根竖立在平坦地面上的避雷针模型化为: 接地导体平面 ($z = 0$) 上竖立的半个导体长旋转椭球, $0 \leq z \leq c$, 高 c , 底面半径 a 。雷雨云在地面附近产生竖直向上的匀强场 E_0 (远离避雷针处的值)。

1. 证明这个问题的解与“孤立导体长椭球（半轴 a, a, c ）放在匀强场 $E_0 \hat{z}$ 中”的解在 $z > 0$ 区域相同。
2. 求针表面的感应电荷面密度与针尖处的场强 $E_{\text{尖}}$ 。证明针尖的曲率半径 $r_{\text{尖}} = a^2/c$ ，并把场强增强因子 $\beta \equiv E_{\text{尖}}/E_0$ 在 $a \ll c$ 时用 c 与 $r_{\text{尖}}$ 表示。
3. 求针上感应电荷沿高度的线密度 $\lambda_{\ell}(z)$ 与针上的总感应电荷。
4. 取 $c = 10 \text{ m}$ 、 $a = 0.20 \text{ m}$ 。求 N_z 、 β 、 $r_{\text{尖}}$ 。雷暴云下地面附近的场强可达约 10 kV/m 量级 [13]，空气在标准状况下的击穿场强约 3 MV/m [14]。估计针尖开始发生电晕放电（尖端附近空气局部电离、发出微弱辉光与噪声的放电）时的 E_0 。

解答

(1) 全空间问题的解为 $\Phi = -E_0 z + \Phi_P$ （第 7 节），导体取电势零（按对称性，孤立导体椭球在匀强场中的电势等于其中心处外场的势，即 0）。外场的势对 $z \rightarrow -z$ 是奇函数；椭球关于 $z = 0$ 对称，感应电荷的分布也是奇的（上正下负），所以总势是 z 的奇函数，在 $z = 0$ 平面上为零。于是全空间解在 $z > 0$ 区域满足： $z = 0$ 平面上 $\Phi = 0$ （接地平面）、导体表面 $\Phi = 0$ （接地针）、导体外无电荷、远处 $\rightarrow -E_0 z$ 。由唯一性定理，它就是半空间问题的解。（这就是镜像法：下半个椭球是上半个的“像”。）

(2) 导体极限下 $P = \varepsilon_0 E_0 / N_z$ （式 (7.3) 令 $\varepsilon_r \rightarrow \infty$ ），感应电荷 $\sigma = P n_z = \varepsilon_0 E_0 n_z / N_z$ ，尖端 $n_z = 1$ ：

$$E_{\text{尖}} = \frac{E_0}{N_z}, \quad \beta = \frac{1}{N_z}.$$

曲率半径：子午截线 $z = c\sqrt{1 - \rho^2/a^2} \approx c - \frac{c}{2a^2}\rho^2$ ，与半径 r 的圆 $z \approx c - \frac{\rho^2}{2r}$ 比较得 $r_{\text{尖}} = a^2/c$ 。细针时用式 (6.12)， $a^2 = cr_{\text{尖}}$ ， $2c/a = 2\sqrt{c/r_{\text{尖}}}$ ：

$$\beta \approx \frac{c^2/a^2}{\ln(2c/a) - 1} = \frac{c/r_{\text{尖}}}{\frac{1}{2}\ln(4c/r_{\text{尖}}) - 1}. \quad (8.1)$$

增强因子大致是“高度 / 尖端曲率半径”，再除以一个变化很慢的对数因子。

(3) 第 5.5 节的投影论证换成极化电荷： $\sigma = P n_z$ ，高度 z 到 $z + dz$ 的一条环带上的电荷为 $P \oint n_z dS$ 。 $n_z dS$ 是面元在 xy 平面上的投影面积，环带的投影是半径从 $\rho(z + dz)$ 到 $\rho(z)$ 的圆环，面积 $-\frac{d}{dz} \left[\pi a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) \right] dz = \frac{2\pi a^2 z}{c^2} dz$ 。所以

$$\lambda_{\ell}(z) = \frac{2\pi a^2 P}{c^2} z = \frac{2\pi \varepsilon_0 E_0 a^2}{N_z c^2} z \quad (\text{线性增长}),$$

$$Q_{\text{针}} = \int_0^c \lambda_{\ell} dz = \pi a^2 P = \frac{\pi \varepsilon_0 E_0 a^2}{N_z} \approx \frac{\pi \varepsilon_0 E_0 c^2}{\ln(2c/a) - 1}.$$

细针上的总感应电荷几乎与粗细无关（只通过对数），正比于 c^2 。

(4) $c/a = 50$ ： $e = \sqrt{1 - 1/2500}$ ，式 (6.10) 给出 $N_z = 1.443 \times 10^{-3}$ （渐近式 1.442×10^{-3} ）， $\beta = 693$ ， $r_{\text{尖}} = 4.0 \text{ mm}$ 。 $E_0 = 10 \text{ kV/m}$ 时 $E_{\text{尖}} = 6.9 \text{ MV/m}$ ，已超过击穿场强，尖端附近会发生电晕放电。电晕开始的外场 $E_0^* = N_z \times 3 \text{ MV/m} \approx 4.3 \text{ kV/m}$ 。（真实电晕起始场强还与尖端半径有关，小半径时更高；这里只作量级估计。） $E_0 = 10 \text{ kV/m}$ 时 $Q_{\text{针}} = 7.7 \text{ pC}$ ，针顶的线电荷密度 $\lambda_{\ell}(c) = 1.5 \text{ pC/m}$ ；在电晕起始的 E_0^* 下两者按比例分别为 3.3 pC 与 0.67 pC/m 。

注意式 (8.1) 可写成 $E_{\text{尖}} = \frac{E_0 c / r_{\text{尖}}}{\ln(2c/a) - 1}$, $E_0 c$ 是没有针时针尖高度处与地面的电势差: 决定尖端场强的主要是“电压/尖端曲率半径”, 针的长度只通过对数起作用 (孤立带电细针同理, $E_{\text{尖}} = \frac{U / r_{\text{尖}}}{\ln(2c/a)}$).

($c/a = 2, 5, 10, 50, 200$ 时 $1/N_z = 5.76, 17.9, 49.3, 693, 8013$, 细针渐近式 (8.1) 给出 10.4, 19.2, 50.1, 693, 8014: $c/a \gtrsim 10$ 后渐近式已很好.)

评分要点: (1) 奇对称 + 唯一性; (2) $\sigma = P n_z$, $\beta = 1/N_z$, $r_{\text{尖}} = a^2/c$; (3) 投影面积求环带电荷; (4) 数值与“电压/曲率半径”的标度。

例题 2: 共焦椭球电容器

两个共焦的导体长旋转椭球面 (公共焦点 $z = \pm f$) 构成电容器, 内、外导体的参数 $u_1 = c_1/f < u_2 = c_2/f$ ($u = \cosh \xi$).

1. 求电容。对一般三轴椭球, 写出由两个共焦椭球 $\lambda = \lambda_1$ 、 $\lambda = \lambda_2$ 构成的电容器的电容。
2. 两椭球靠得很近 ($\lambda_2 = \lambda_1 + \delta\lambda$, $\delta\lambda \rightarrow 0$) 时, 各处间隙不等宽。证明此时电容等于把间隙看成许多小平行板电容器并联的结果。
3. 两椭球都很细长 ($a_1, a_2 \ll f$) 时, 电容趋于什么?
4. 内导体表面上哪里场强最大? 用 Q 、 f 、 u_1 表示这个最大场强。
5. 外导体固定 ($c_2 = 10\text{ cm}$, $a_2 = 4\text{ cm}$), 内导体在同一共焦族中选取。空气击穿场强取 $E_b = 3\text{ MV/m}$ 。 u_1 取何值时电容器能承受的电压最高? 求此时的 a_1 、 c_1 、电容与最高电压。在细长极限下最优比值 a_2/a_1 是多少? 与同轴电缆的经典结论 $b/a = e$ (自然对数的底) 比较。

解答

(1) 两导体间的电势只依赖 ξ (或 λ), 其通解仍是式 (5.1)、(5.7): $\Phi = K Q_0(u) + \text{常数}$ 。由内导体带电 Q 与高斯定理 (包住内导体的任一共焦椭球面上的通量为 Q/ϵ_0), K 与孤立导体时相同, $K = Q/(4\pi\epsilon_0 f)$ 。电势差 $U_{12} = K[Q_0(u_1) - Q_0(u_2)]$:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 f}{Q_0(u_1) - Q_0(u_2)}; \quad \text{三轴: } C = \frac{8\pi\epsilon_0}{I(\lambda_1) - I(\lambda_2)}.$$

$u_2 \rightarrow \infty$ 时回到孤立导体的式 (5.2)。

(2) 不妨取 $\lambda_1 = 0$ (内导体半轴 a_i)。 $I(0) - I(\delta\lambda) \approx \delta\lambda/\Delta(0) = \delta\lambda/(abc)$, 所以 $C \approx 8\pi\epsilon_0 abc/\delta\lambda$ 。另一方面, 表面一点处两椭球的法向间距 $\ell = \delta\lambda/|\nabla\lambda| = \delta\lambda/(2h)$ (式 (3.9))。局部平行板并联:

$$\oint \frac{\epsilon_0 dS}{\ell} = \frac{2\epsilon_0}{\delta\lambda} \oint h dS = \frac{2\epsilon_0}{\delta\lambda} \cdot 4\pi abc = \frac{8\pi\epsilon_0 abc}{\delta\lambda},$$

两者相同。这里又用到了 $\oint h dS = 3V$ 。注意间隙在长轴端最窄 (h 最大处) ——那里的场强最大, 与导体上的 $\sigma \propto h$ 一致。

(3) 细长时 $u_i = \sqrt{1 + a_i^2/f^2} \approx 1 + \frac{a_i^2}{2f^2}$, $Q_0(u_i) = \frac{1}{2} \ln \frac{u_i+1}{u_i-1} \approx \ln \frac{2f}{a_i}$, 所以 $Q_0(u_1) - Q_0(u_2) \approx \ln(a_2/a_1)$:

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon_0 (2f)}{\ln(a_2/a_1)},$$

正是长 $2f$ 、内外半径 a_1, a_2 的同轴电缆的电容。

(4) $\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -KQ'_0(u)\nabla u$, $|Q'_0(u)| = \frac{1}{u^2-1}$, $|\nabla u| = \frac{1}{H_\xi} \frac{du}{d\xi} = \frac{\sinh \xi}{f\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}}$ 。在内导体表面上 $\xi = \xi_1$ 固定, $|\nabla u|$ 在 $\eta = 0$ (尖端) 最大, 等于 $1/f$ 。所以最大场强在两个尖端:

$$E_{\max} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 f^2 (u_1^2 - 1)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a_1^2}.$$

($f^2(u_1^2 - 1) = a_1^2$ 。与孤立导体的尖端场强形式相同。)

(5) 能承受的电压 $U_{\max} = Q_{\max}/C$, $Q_{\max}$ 由 $E_{\max} = E_b$ 定出:

$$U_{\max} = E_b f (u_1^2 - 1) [Q_0(u_1) - Q_0(u_2)] \equiv E_b f \Psi(u_1).$$

$\Psi(1) = 0$ (内导体退化为焦线段, $a_1 = 0$), $\Psi(u_2) = 0$ (两导体重合), 中间有极大。 $\Psi'(u_1) = 2u_1[Q_0(u_1) - Q_0(u_2)] + (u_1^2 - 1)Q'_0(u_1) = 2u_1[Q_0(u_1) - Q_0(u_2)] - 1$, 极值条件

$$Q_0(u_1) - Q_0(u_2) = \frac{1}{2u_1}. \quad (8.2)$$

数值: $f = \sqrt{10^2 - 4^2} = 9.165 \text{ cm}$, $u_2 = 1.0911$, 解式 (8.2) 得 $u_1 = 1.0337$, 即 $c_1 = 9.47 \text{ cm}$, $a_1 = f\sqrt{u_1^2 - 1} = 2.40 \text{ cm}$ (尖端曲率半径 $a_1^2/c_1 = 6.1 \text{ mm}$), $C = 21.1 \text{ pF}$, $U_{\max} = 9.1 \text{ kV}$ 。细长极限下 $u_1 \approx 1$, 式 (8.2) 化为 $\ln(a_2/a_1) = \frac{1}{2}$, $a_2/a_1 = e^{1/2} \approx 1.649$ (本题 1.668, 已接近)。同轴电缆的场强最大处在整个内表面, $E_{\max} = U/[a_1 \ln(a_2/a_1)]$, 最优 $\ln(a_2/a_1) = 1$; 共焦椭圆的最大场在尖端, $E_{\max} \approx U/[r_{\text{尖}} \ln(a_2/a_1)]$ 而 $r_{\text{尖}} \propto a_1^2$, 所以最优比值变成 $e^{1/2}$ 。

评分要点: (1) K 由高斯定理定出; (2) $\ell = \delta\lambda/2h$ 与 $\oint \mathbf{h} d\mathbf{S} = 3V$; (3) 对数渐近; (4) $|\nabla u|$ 在尖端最大; (5) 极值条件 (8.2) 与 $e^{1/2}$ 。

例题 3: 倾斜的介质针

一根玻璃针可视为长旋转椭球, $c = 5.0 \text{ mm}$, $a = 0.50 \text{ mm}$, $\epsilon_r = 6.0$, 密度 $\rho_m = 2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。针的中心固定, 可绕中心自由转动, 放在匀强场 $E_0 = 1.0 \text{ MV/m}$ 中, 对称轴与 $\mathbf{E}_0$ 的夹角为 θ 。忽略重力。

1. 求针的电偶极矩 (沿对称轴与垂直对称轴的分量), 以及 $\theta = 45^\circ$ 时 $\mathbf{p}$ 与对称轴的夹角。
2. 求针所受的力矩 $\tau(\theta)$ 。哪个取向稳定? 写出一个势能函数 $W(\theta)$ 使 $\tau = -dW/d\theta$ 。
3. 证明 $\chi = \epsilon_r - 1 \ll 1$ 时力矩正比于 χ^2 , 并解释为什么不是 χ 的一次方。
4. 求针在稳定取向附近小角度摆动的周期 (椭球绕过中心、垂直于对称轴的轴的转动惯量为 $\frac{1}{5}m_n(a^2 + c^2)$, m_n 为针的质量)。若换成同样形状、同样密度的金属针, 周期是多少? 稳定取向向下针尖外侧的场强各是 E_0 的多少倍?
5. 同体积、同材料的介质圆片 (扁椭球, $c/a = 0.1$) 放在同样的场中, 哪个取向稳定? 最大力矩与上面的针相比如何?

解答

(1) 取对称轴为 z , $\mathbf{E}_0 = E_0(\sin \theta, 0, \cos \theta)$ 。由线性, 把外场分解为沿主轴的分量, 各自用第 7 节的结果:

$$p_z = \varepsilon_0 V \tilde{\alpha}_z E_0 \cos \theta, \quad p_x = \varepsilon_0 V \tilde{\alpha}_x E_0 \sin \theta,$$

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{\chi}{1 + N_i \chi}.$$

$c/a = 10$: $N_z = 0.02029$, $N_x = 0.4899$; $\chi = 5$: $\tilde{\alpha}_z = 4.540$, $\tilde{\alpha}_x = 1.450$ 。 $V = \frac{4}{3}\pi a^2 c = 5.24 \text{ mm}^3$ 。 $\mathbf{p}$ 与对称轴的夹角 ψ 满足 $\tan \psi = \frac{\tilde{\alpha}_x}{\tilde{\alpha}_z} \tan \theta$, $\theta = 45^\circ$ 时 $\psi = 17.7^\circ$: 偶极矩比外场更靠近长轴。

(2) 外场对束缚电荷的总力矩是 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_0$ (匀强场中任意电荷分布所受力矩; 束缚电荷自身的场对物体的力矩之和为零)。沿 y 轴的分量:

$$\tau_y = p_z E_{0x} - p_x E_{0z} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 V E_0^2 (\tilde{\alpha}_z - \tilde{\alpha}_x) \sin 2\theta.$$

$\tau_y > 0$ 表示绕 $+y$ 轴转动, 即对称轴 (在 xz 平面内, 与 z 轴同向) 向外场方向转 (θ 减小)。 $\tilde{\alpha}_z > \tilde{\alpha}_x$ ($N_z < N_x$), 所以长轴转向外场, $\theta = 0$ 稳定, $\theta = 90^\circ$ 不稳定。以 θ 为转角, 力矩 $\tau_\theta = -\tau_y$, 取

$$W(\theta) = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 V E_0^2 (\tilde{\alpha}_z \cos^2 \theta + \tilde{\alpha}_x \sin^2 \theta) = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0,$$

则 $-dW/d\theta = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 V E_0^2 (\tilde{\alpha}_z - \tilde{\alpha}_x) \sin 2\theta = \tau_\theta$ 。(因子 $\frac{1}{2}$ 的来源: 外源固定时, 把感应偶极从零建立起来, $W = -\int_0^{E_0} \mathbf{p}(E') \cdot d\mathbf{E}' = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0$; 它等于与外场的相互作用能 $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0$ 加上介质内部储存的极化能 $+\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0$ 。) 最大力矩 $\tau_{\max} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 V E_0^2 (\tilde{\alpha}_z - \tilde{\alpha}_x) = 7.2 \times 10^{-8} \text{ N m}$ 。

(3) 展开到 χ^2 : $\tilde{\alpha}_i = \chi - N_i \chi^2 + \mathcal{O}(\chi^3)$, $\tilde{\alpha}_z - \tilde{\alpha}_x \approx (N_x - N_z) \chi^2$ 。一阶项相消, 因为在 χ 的一阶近似下每一小块介质只受外场极化, $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}_0$ 平行于外场, 力矩为零; 形状的各向异性来自极化电荷自身产生的退极化场 (它本身已是 χ 的一阶量), 再作用于极化 (又一个 χ), 所以力矩是 χ^2 量级。

(4) 小角度时 $W \approx \text{常数} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 V E_0^2 (\tilde{\alpha}_z - \tilde{\alpha}_x) \theta^2$, “扭转刚度” $\kappa_\theta = \varepsilon_0 V E_0^2 (\tilde{\alpha}_z - \tilde{\alpha}_x)$ 。转动惯量 $I = \frac{1}{5} \rho_m V (a^2 + c^2)$, V 约去:

$$\omega^2 = \frac{\kappa_\theta}{I} = \frac{5 \varepsilon_0 E_0^2 (\tilde{\alpha}_z - \tilde{\alpha}_x)}{\rho_m (a^2 + c^2)},$$

$$\omega = 46.6 \text{ s}^{-1}, \quad T = 0.135 \text{ s}.$$

金属针: $\tilde{\alpha}_i \rightarrow 1/N_i$ ($\chi \rightarrow \infty$), $\tilde{\alpha}_z - \tilde{\alpha}_x = 49.3 - 2.04$, $T = 0.035 \text{ s}$ 。金属针的“抓场”能力强得多, 主要是因为 $1/N_z$ 很大。针尖外侧场强 (第 7.4 节): 玻璃针 $\varepsilon_r/(1 + N_z \chi) = 6/1.101 = 5.4$ 倍, 金属针 $1/N_z = 49$ 倍。

(5) 扁椭球 $N_z > N_x$, $\tilde{\alpha}_x > \tilde{\alpha}_z$, 力矩使对称轴转到垂直于外场: 稳定时圆片的盘面平行于外场。统一的说法是: 介质体总是把它“最长”的方向转向外场。力矩公式不变, $|\tau|_{\max} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 V E_0^2 |\tilde{\alpha}_z - \tilde{\alpha}_x|$ 。 $c/a = 0.1$: $N_z = 0.8608$, $N_x = 0.0696$, $\tilde{\alpha}_z = 0.943$, $\tilde{\alpha}_x = 3.709$, $|\tilde{\alpha}_z - \tilde{\alpha}_x| = 2.77$, 比针的 3.09 小约 10%: 同体积时, 轴比互为倒数的针与圆片受到的最大力矩相近, 针略大。

评分要点: (1) 分解到主轴、两个 N ; (2) $\mathbf{p} \times \mathbf{E}_0$ 与 $W = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0$; (3) χ^2 的物理解释; (4) V 约去的周期公式、介质与导体尖端场的区别; (5) 扁椭球的取向与力矩比较。

例题 4: 导体屏上的圆孔——电场如何“漏”过小孔

一块无限大、无限薄的接地导体平板位于 $z = 0$, 上面开一个半径 R 的圆孔 (圆心在原点)。板下方远处是匀强场: $z \rightarrow -\infty$ 时 $\Phi \rightarrow E_0 z$ (场强 E_0 , 垂直于板); 板上方远处没有外加场, $\Phi \rightarrow 0$ 。

1. 证明可以把解写成 $\Phi = \frac{1}{2}E_0 z + \Phi_e$, 其中 Φ_e 关于 $z \rightarrow -z$ 为偶函数, 在板上为零, 远处 $\rightarrow -\frac{1}{2}E_0|z|$ 。
2. 取扁旋转椭球坐标 ($f = R$, $u = \sinh \xi$, $v = \cos \eta$)。证明: 导体板 (孔外) 恰是坐标面 $\eta = \pi/2$, 孔是 $\xi = 0$ 的焦圆盘, 且 $|z| = Ru|v|$ 。试探 $\Phi_e = -\frac{1}{2}E_0 R|v|U(u)$, 写出 U 满足的方程与通解, 并由远处条件定出一个常数。
3. $|v|$ 在孔面上有“折角”。要求 Φ 及 $\partial_z \Phi$ 穿过孔连续, 定出 $U(u)$ 。
4. 求孔中的电势与电场。孔中的场与入射场 E_0 是什么关系?
5. 求板上方远处的电势, 说明它是一个电偶极子与其在板中的像共同产生的, 求孔的等效偶极矩 p 。
6. 屏蔽盒壁上开一个 $R = 2 \text{ mm}$ 的小孔, 外面 $E_0 = 10 \text{ kV/m}$ 。估计盒内孔轴线上距孔 10 cm 处的场强。

解答

(1) 把边界条件分成奇、偶两部分: $\frac{1}{2}E_0 z$ 在两侧远处分别给出 $\frac{1}{2}E_0 z$, 它关于 $z \rightarrow -z$ 是奇的, 在板上为零, 处处调和, 且自然穿过孔。剩下的 $\Phi_e = \Phi - \frac{1}{2}E_0 z$ 在下方远处 $\rightarrow \frac{1}{2}E_0 z = -\frac{1}{2}E_0|z|$, 上方远处 $\rightarrow -\frac{1}{2}E_0 z = -\frac{1}{2}E_0|z|$, 板上为零。问题对板面镜像对称, Φ_e 是偶函数。

(2) 扁椭球坐标 $z = Ru \cos \eta$, $\rho = R\sqrt{1+u^2} \sin \eta$ 。 $\eta = \pi/2$ 给出 $z = 0$ 、 $\rho = R\sqrt{1+u^2} \geq R$ ——孔外的板; $u = 0$ 给出 $z = 0$ 、 $\rho = R \sin \eta \leq R$ ——孔 (上、下两面分别对应 $v > 0$ 、 $v < 0$)。 $|z| = Ru|v|$ 。在 $z > 0$ 一侧 $\Phi_e = -\frac{1}{2}E_0 R v U(u)$ 是 $P_1(v)$ 型的分离解, 代入式 (4.12) 得 $[(1+u^2)U']' - 2U = 0$, 通解 $U = Au + B\tilde{Q}_1(u)$, $\tilde{Q}_1 = 1 - u \operatorname{arccot} u$ (第 4.3 节注)。远处 $\Phi_e \rightarrow -\frac{1}{2}E_0|z| = -\frac{1}{2}E_0 Ru|v|$ 要求 $A = 1$ 。 Φ_e 在板上 ($v = 0$) 自动为零。

(3) Φ_e 含 $|v|$, 在孔面两侧取值相同 (连续)。孔面上 $u = 0$, $z = Ruv$, 所以 $\partial_z = \frac{1}{Rv}\partial_u$ 。上侧 ($v > 0$) $\partial_z \Phi_e = -\frac{1}{2}E_0 U'(0)$, 下侧 ($v < 0$, $|v| = -v$) $\partial_z \Phi_e = +\frac{1}{2}E_0 U'(0)$ 。两侧相等要求 $U'(0) = 0$ 。 $\tilde{Q}_1'(0) = -\operatorname{arccot} 0 = -\frac{\pi}{2}$, 所以 $1 - \frac{\pi}{2}B = 0$, $B = \frac{2}{\pi}$:

$$\begin{aligned} U(u) &= u + \frac{2}{\pi}(1 - u \operatorname{arccot} u) \\ &= \frac{2}{\pi}(1 + u \arctan u). \end{aligned} \quad (8.3)$$

(4) 孔中 $u = 0$ 、 $U(0) = \frac{2}{\pi}$ 、 $|v| = \sqrt{1 - \rho^2/R^2}$, 所以

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{孔}}(\rho) &= -\frac{E_0}{\pi}\sqrt{R^2 - \rho^2}, \\ E_z &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{2}E_0 + \frac{1}{2}E_0 U'(0) = -\frac{1}{2}E_0. \end{aligned}$$

孔中的电场处处均匀，恰为入射场（下方远处 $E_z = -E_0$ ）的一半，方向相同。孔中心的电势 $-E_0 R/\pi$ 。

(5) 上方远处 $u \approx r/R \rightarrow \infty$, $\tilde{Q}_1 \approx \frac{1}{3u^2}$, $U \approx u + \frac{2}{3\pi u^2}$ 。于是

$$\Phi \approx \frac{1}{2}E_0 z - \frac{1}{2}E_0 z - \frac{E_0 R}{3\pi} \frac{v}{u^2} \approx -\frac{E_0 R^3}{3\pi} \frac{\cos \theta}{r^2}.$$

这是偶极子势 $\frac{p_{\text{总}} \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, $p_{\text{总}} = -\frac{4}{3}\epsilon_0 E_0 R^3$ (沿 z)。下方入射场的矢量是 $\mathbf{E}_\lambda = -E_0 \hat{z}$, 所以写成矢量：远场相当于偶极 $\frac{4}{3}\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_\lambda$, 与入射场同向。通常把孔等效为放在关闭的屏面上的偶极 $\mathbf{p}$ ：垂直于接地平面的偶极，其像与它同向，上半空间的场相当于 $2\mathbf{p}$ 产生的，于是

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3}\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_\lambda \quad (\text{与入射场同向}).$$

系数 $\frac{2}{3}$ 是“偶极放在关闭屏面上、另计镜像”的约定，即小孔理论中常写的圆孔电极化率 $\alpha_e = \frac{2}{3}R^3$ (正负号随法向取向的约定而定)；Jackson §3.13 直接给出远场等效偶极 $\frac{4}{3}\epsilon_0 a^3 E_0$, 即这里的 $2\mathbf{p}$ (据文献 [2] 及小孔理论的标准叙述转述，未核对 Bethe 原文 [15] 的约定)。漏过小孔的场等效于一个大小 $\propto R^3$ 的偶极子。

(6) 轴上 $\Phi \approx -\frac{E_0 R^3}{3\pi z^2}$, $|E_z| = \frac{2E_0 R^3}{3\pi z^3} = \frac{2 \times 10^4 \times (2 \times 10^{-3})^3}{3\pi \times 0.1^3} \text{ V/m} = 0.017 \text{ V/m}$, 只有外场的 1.7×10^{-6} 。屏蔽效果按 $(R/z)^3$ 变化：孔径加倍，漏场增大 8 倍。(以上假定屏无限薄。真实壁厚为 t 时，孔道内静电势的最低模按 $J_0(2.405\rho/R)e^{-2.405z/R}$ 衰减，漏场还要再乘约 $e^{-2.405t/R}$ ； $t = 1 \text{ mm}$ 、 $R = 2 \text{ mm}$ 时约 0.3。)

评分要点：(1) 奇偶分解；(2) 坐标面的识别与 $\tilde{Q}_1$ ；(3) 穿过孔的光滑条件定出 $B = 2/\pi$ ；(4) 孔中场为 $\frac{1}{2}E_0$ ；(5) 远场偶极与像， $\mathbf{p} = \frac{2}{3}\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_\lambda$ ；(6) 数值与 R^3 标度。

9 实验与数据处理：用平行板电容器测退极化因子

例题：实验题：形状决定的极化（本题使用模拟数据）

装置：两块大圆形平行金属板水平放置，板距标称 $d \approx 12.0 \text{ cm}$ （未精确测量）。下板接零内阻交流电源 U_0 ；上板中央是被测电极，四周有与它同电势的保护环（不计入测量，使被测电极下方的场均匀、没有边缘效应），被测电极接到电容电桥（把待测电容与标准电容比较、读出差值的仪器），电桥使它保持在“虚地”电势。电桥读出放入样品引起的电容增量 δC ，读数的标准不确定度 $\sigma_{\delta C} = 0.02 \text{ fF}$ ($1 \text{ fF} = 10^{-15} \text{ F}$)。样品用极细的尼龙丝悬挂在两板正中、保护环以内的均匀场区（尼龙丝的影响已扣除），板间场 $E_0 = U_0/d$ 沿竖直方向。

- **介质样品：**同一批陶瓷 (ϵ_r 未知) 烧制的 7 个旋转椭球，体积都等于 $V = \frac{4}{3}\pi \times 1.000 \text{ cm}^3$ ($a^2 c = 1.000 \text{ cm}^3$)，轴比 c/a 见表 4。每个样品分别以对称轴平行于场 ($\parallel$) 和垂直于场 ($\perp$) 两种取向测量。表中同时给出由式 (6.10)、(6.11) 算出的 N_z 、 N_x 。
- **金属标定样品：**同体积的黄铜球 (半径 1.000 cm)， $\delta C = 7.77 \text{ fF}$ ；同体积、 $c/a = 4.00$ 的黄铜长椭球 (对称轴平行于场)， $\delta C = 34.58 \text{ fF}$ 。

说明：本题数据由 `scripts/exp_data.py` 生成：按第 (2) 问的公式，计入两极板对样品感应偶极的镜像作用（第 (7) 问），再加标准差 0.02 fF 的高斯随机误差并保留两位小数；随机数种

子事先固定为 20261026。

1. 格林互易定理：同一组导体、两种电荷分布 A、B，有 $\sum_k Q_k^A \Phi_k^B + \int \rho^A \Phi^B dV = \sum_k Q_k^B \Phi_k^A + \int \rho^B \Phi^A dV$ (k 标记导体， Q_k 、 Φ_k 为其电荷与电势)。用它证明：两极板电势保持不变时，板间一个总电荷为零、偶极矩为 p （沿场方向）的电荷分布使被测电极（上板）多带电荷 $-p/d$ （下板多带 $+p/d$ ），因而电桥测得 $\delta C = p/(U_0 d)$ 。这一结论对样品的大小与形状有无要求？
2. 忽略镜像作用，证明介质样品满足 $y \equiv K/\delta C = N + 1/\chi$ ，其中 $K \equiv \varepsilon_0 V/d^2$ ， N 为沿场方向的退极化因子；金属样品 $y = N$ 。
3. 由金属球求 K 及其不确定度，并由此求板距 d 。
4. 计算 14 个介质数据点的 y 及其不确定度。以 N 为横坐标作图，用加权最小二乘拟合 $y = \mathcal{S}N + \mathcal{B}$ 。求斜率 $\mathcal{S}$ 、截距 $\mathcal{B}$ 及其不确定度。 $\mathcal{S}$ 与理论值 1 相符吗？求 χ 与 ε_r 。为什么 $\chi = \mathcal{S}/\mathcal{B}$ 与标定无关？
5. 不用 N 的公式，只用旋转对称性和 $\sum N_i = 1$ ，证明对每个形状 $Y \equiv y_{\parallel} + 2y_{\perp}$ 都应等于同一个数。检验数据是否支持这一点，并由此求 χ 。
6. 用 K 求金属长椭球的 y ，与 $N_z(c/a = 4) = 0.0754$ 比较。差别显著吗？
7. 两板的电势都由零内阻电源与电桥的虚地固定，所以对样品电荷产生的附加场而言，两板都相当于接地导体，样品的感应偶极会在两板中成像。证明镜像使样品处多出一个与 p 成正比的场，从而 $1/\tilde{\alpha}_{\text{有效}} = 1/\tilde{\alpha} - \kappa$ ， $\kappa = \zeta(3)V/(\pi d^3)$ ， $\zeta(3) = \sum_{n \geq 1} n^{-3} = 1.202$ 。估计 κ ，修正第 (3)–(6) 问的结果，并讨论其他系统误差。

表 4 介质旋转椭球的电容增量（模拟数据， $a^2 c = 1.000 \text{ cm}^3$ ）

c/a	a/mm	c/mm	N_z	N_x	$\delta C_{\parallel}/\text{fF}$	$\delta C_{\perp}/\text{fF}$
0.25	15.87	3.97	0.7036	0.1482	3.13	9.67
0.40	13.57	5.43	0.5882	0.2059	3.65	7.97
0.63	11.67	7.35	0.4620	0.2690	4.44	6.66
1.00	10.00	10.00	0.3333	0.3333	5.71	5.69
1.60	8.55	13.68	0.2187	0.3906	7.64	5.10
2.50	7.37	18.42	0.1351	0.4324	10.17	4.71
4.00	6.30	25.20	0.0754	0.4623	13.34	4.43

解答

(1) z 从下板量起。由叠加原理，实际情形 = “无样品、下板接 U_0 ” + A：两板都接地，板间只有样品的电荷 ρ_s ，两板上的感应电荷 $Q_{\text{下}}$ 、 $Q_{\text{上}}$ 。为求被测的 $Q_{\text{上}}$ ，取 B：没有样品，上板电势 U' 、下板接地，板间电势 $\Phi^B = U'z/d$ （保护环以内的均匀场区）。代入互易定理：左边

$= Q_{\perp}U' + \int \rho_s U' z/d dV = Q_{\perp}U' + U'p/d$ ($\int \rho_s dV = 0$, $\int \rho_s z dV = p$); 右边: B 中电荷只在板上, 而 A 中两板电势为零, 右边 $= 0$ 。所以 $Q_{\perp} = -p/d$ (同理 $Q_{\parallel} = +p/d$)。无样品时上板带 $-C_0U_0$, 样品使它的电荷绝对值增加 p/d , 电桥测得 $\delta C = p/(U_0d)$ 。推导只用到 B 中样品所在处的场是均匀的, 对样品的大小、形状、内部分布没有要求, 也不需要偶极近似; p 是样品真实的总偶极矩 (含镜像引起的变化)。

(2) 忽略镜像, 样品处在匀强场 E_0 中, 由式 (7.3), $p = \varepsilon_0 V \tilde{\alpha} E_0$, $\tilde{\alpha} = \chi/(1 + N\chi)$ 。于是 $\delta C = \varepsilon_0 V \tilde{\alpha}/d^2 = K \tilde{\alpha}$, $y = K/\delta C = 1/\tilde{\alpha} = N + 1/\chi$ 。金属 $\chi \rightarrow \infty$, $y = N$ 。

(3) 金属球 $N = 1/3$: $K = \delta C_{\text{球}}/3 = 2.590 \text{ fF}$, $\sigma_K = 0.0067 \text{ fF}$ (0.26%)。 $d = \sqrt{\varepsilon_0 V/K} = (11.967 \pm 0.015) \text{ cm}$, 比标称值小 0.3 mm (第 (7) 问会看到这主要是镜像效应造成的标定偏差)。

(4) $y_i = K/\delta C_i$, 统计不确定度 $\sigma_{y_i} = y_i \sigma_{\delta C}/\delta C_i$ (K 的误差是所有点的公共比例因子, 单独处理)。各点的 y 见图 11 (例如 $c/a = 4$: $y_{\parallel} = 0.1942$, $y_{\perp} = 0.5847$)。

加权最小二乘 (附录 D):

$$S = 1.0051 \pm 0.0023_{\text{统计}}, \quad B = 0.11853 \pm 0.00038_{\text{统计}},$$

$$r(S, B) = -0.84, \quad \chi^2/\nu = 8.3/12.$$

$\chi^2/\nu < 1$, 残差与读数误差相称 (图 11), 线性模型成立。计入 K 的 0.26% 公共比例误差 (S 、 B 都正比于 K): $S = 1.0051 \pm 0.0035$, 与 1 相差 1.5σ , 相符。由模型 $y = (K_{\text{估}}/K_{\text{真}})(N + 1/\chi)$, $S = K_{\text{估}}/K_{\text{真}}$, $B = S/\chi$, 所以

$$\chi = \frac{S}{B} = 8.48 \pm 0.04, \quad \varepsilon_r = 9.48 \pm 0.04.$$

比值中 K 消去: χ 只依赖于“截距与斜率之比”, 即平行与垂直两种取向之间、不同形状之间的相对变化, 与绝对标定无关。误差传递必须用协方差: $\sigma_{\chi}^2 = \left(\frac{1}{B}\right)^2 \sigma_S^2 + \left(\frac{S}{B^2}\right)^2 \sigma_B^2 - 2 \frac{S}{B^3} \text{cov}(S, B)$; S 、 B 强负相关 ($r = -0.84$), 忽略相关项会把 σ_{χ} 从 0.044 低估为 0.033。(若把斜率固定为理论值 1 再拟合, 得 $B = 0.1192 \pm 0.0005$ 、 $\chi = 8.39 \pm 0.04$, 但这时 χ 依赖于标定。)

(5) 旋转对称: $N_x = N_y$; $\sum N_i = 1$: $N_z + 2N_x = 1$ 。所以 $Y = y_{\parallel} + 2y_{\perp} = (N_z + 2N_x) + 3/\chi = 1 + 3/\chi$, 与形状无关——这只用了对称性与高斯定理 ($\sum N_i = 1$ 的物理来源), 不用 N 的具体公式。7 个形状的 Y 加权平均 $\bar{Y} = 1.3601 \pm 0.0038$ (含 K 误差), 对常数的 $\chi^2 = 5.2/6$, 数据支持“ Y 与形状无关”。 $\chi = 3/(\bar{Y} - 1) = 8.33 \pm 0.09$, 与第 (4) 问相差约 1.5σ ; 注意两者来自同一组数据、并不独立, 这只是自洽性检验 (第 (5) 问依赖标定, 误差更大)。

(6) $y_4 = K/\delta C = 2.590/34.58 = 0.07490 \pm 0.00020$ (含 K 误差), 比 $N_z = 0.07541$ 小 2.6σ 。金属样品的 $y = N$ 不含 $1/\chi$, 对 N 本身最敏感, 这一偏差值得追究。

(7) 镜像: 按题设, 对样品电荷的附加场两板都相当于接地平面, 可用镜像法: 沿场方向 (垂直于板) 的偶极子 p 在平面中的像是同方向的偶极子; 在两平面间反复成像, 得到位于 $z = nd$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$, 从样品中心量起) 的一系列同向偶极子。它们在样品中心产生的场 (轴上偶极场 $2p/(4\pi\varepsilon_0 r^3)$) 之和

$$E_{\text{像}} = \sum_{n \neq 0} \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 |n|^3 d^3} = \frac{\zeta(3)p}{\pi\varepsilon_0 d^3} = \frac{\kappa P}{\varepsilon_0}, \quad \kappa \equiv \frac{\zeta(3)V}{\pi d^3}.$$

它与外场同向, 于是自洽条件变为 $P = \varepsilon_0 \chi (E_0 + \kappa P/\varepsilon_0 - NP/\varepsilon_0)$, 即 $1/\tilde{\alpha}_{\text{有效}} = N + 1/\chi - \kappa$ (金属: $N - \kappa$)。 $d \approx 11.97 \text{ cm}$: $\kappa = 9.35 \times 10^{-4}$ 。效果: (i) 所有 y 下移一个常数 κ ; (ii) 标定应为

$K = \delta C_{\text{球}}(1/3 - \kappa)$, 即 K 偏大了 $3\kappa = 0.28\%$ 。按 $y_{\text{修}} = K_{\text{修}}/\delta C + \kappa$ 重新处理: $K_{\text{修}} = 2.583 \text{ fF}$, 板距 $d = (11.983 \pm 0.015) \text{ cm}$ (与生成值 12.00 cm 相符, 第 (3) 问的“小 0.3 mm ”主要来自镜像), $S = 1.0023$, $\chi = 8.41 \pm 0.04$ (变化 -0.8% , 约 1.5σ); 金属长椭球 $y_{\text{修}} = 0.07562$, 与 $N_z = 0.07541$ 的差变为 $+1.1\sigma$ ——第 (6) 问的“反常”被镜像效应解释了。(生成数据所用的真值是 $\chi = 8.40$ 。)

其他系统误差: 镜像场在样品范围内不均匀 (约 $(\ell_s/d)^2 \kappa \sim 10^{-4}$, $\ell_s = 5 \text{ cm}$); 有限极板与保护环间隙; 轴比加工误差 ($c/a = 4$ 时轴比误差 1% 使 N_z 变 1.3%); 陶瓷的频率依赖与损耗 (电桥应同时测损耗角); 悬丝与湿度。改进: 增大板距或减小样品; 用两种板距测量把 $\kappa \propto d^{-3}$ 外推掉; 用多个不同 N 的金属样品同时拟合 K 与 κ 。

评分要点: (1) 互易定理的两种配置与结论的普遍性; (2) 线性化; (3) 标定; (4) 加权拟合、公共比例误差、 $\chi = S/B$ 与协方差; (5) 求和规则; (6) 显著性判断; (7) 镜像偶极列、 $\zeta(3)$ 、修正后的一致性。

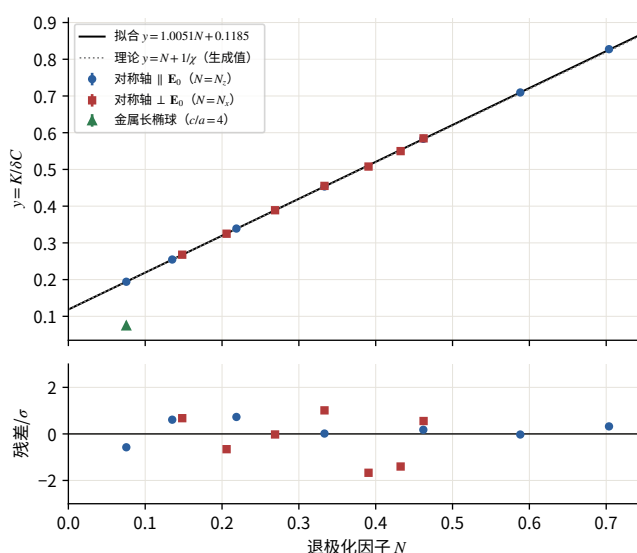


图 11 实验题的拟合 (scripts/exp_fit.py)。上: $y = K/\delta C$ 对退极化因子 N , 圆点与方点分别为平行、垂直取向, 实线为加权拟合, 点线为生成数据所用的理论线 $y = N + 1/\chi$ (未计镜像), 三角为金属长椭球。下: 归一化残差。

10 小结：推导链

- 几何:** 共焦族 $\sum x_i^2/(a_i^2 + s) = 1$ 过每点三张、两两正交 (部分分式 (3.4)) $\Rightarrow$ 椭球坐标; 隐函数求导给出 $|\nabla\lambda|^2 = 4/\Gamma$ 、 $\nabla^2\lambda/|\nabla\lambda|^2 = \Delta'/\Delta$; 表面上 $|\nabla\lambda| = 2h$ 。
- 坐标:** $z + i\rho = f \cosh(\xi + i\eta) \Rightarrow H_\xi = H_\eta$ 、正交 (复映射) $\Rightarrow$ 拉普拉斯算子 (4.9) $\Rightarrow$ 勒让德方程 $\Rightarrow$ 降阶法给出 Q_0, Q_1, Q_2 与朗斯基行列式 $W_n = -1/(u^2 - 1)$ 。
- 导体:** $\Phi = \Phi(\lambda)$ 满足 $(\Delta\Phi)' = 0 \Rightarrow \Phi = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} I(\lambda)$, $C = 8\pi\epsilon_0/I(0)$; 旁证: 焦线电荷 ($r_1 + r_2$ 恒定)、牛顿定理 (弦中点) + 角积分恒等式、仿射伸缩 (圆盘)。面电荷 $\sigma = Qh/(4\pi abc)$ 是一层相似椭球壳。

4. **均匀带电椭球**: 相似薄壳 = 导体电荷分布 $\Rightarrow$ 叠加 + 交换积分次序 $\Rightarrow \Phi_{\text{in}} = \phi_0 - \frac{\rho_e}{2\epsilon_0} \sum N_i x_i^2$, 平移 $t \rightarrow t - s_0$ 得麦克劳林定理; 旁证: 猜解验证 ($\sum J_i = 2/\Delta$)、射线法 (根号相消)、 $P_2 Q_2$ 分离变量 ($N_z = \frac{1}{3}[1 + (u_0^2 - 1)Q_2'(u_0)]$)。 $\sum N_i = 1$, $\partial \ln C / \partial \ln a_i = N_i a_i^2 / \sum N_j a_j^2$ 。
5. **极化**: 两个错开的带电椭球 $\Rightarrow$ 退极化场 $-N_i P_i / \epsilon_0$ (均匀) $\Rightarrow E_{\text{in}} = E_0 / [1 + N(\epsilon_r - 1)]$; 旁证: $P_1 Q_1$ 分离变量, $N_z = (u_0^2 - 1)Q_1(u_0)$ 。不带电导体尖端增强 $1/N_z$, 介质尖端 $\epsilon_r / (1 + N_z \chi)$ 。
6. **应用**: 避雷针 $\beta \approx (c/r_{\text{尖}}) / [\ln(2c/a) - 1]$; 共焦电容器最优 $a_2/a_1 \rightarrow e^{1/2}$; 介质针力矩 $\propto (\tilde{\alpha}_z - \tilde{\alpha}_x)$ ($\chi \ll 1$ 时 $\approx \chi^2(N_x - N_z)$); 屏上圆孔的漏场等效偶极 $\frac{2}{3}\epsilon_0 R^3 E_0$ (与入射场同向, 放在关闭屏面上计入镜像); 用 $\delta C = p/(U_0 d)$ 测 N 与 χ 。

参考文献

- [1] Dmitry Khavinson and Erik Lundberg. A tale of ellipsoids in potential theory. *Notices of the American Mathematical Society*, 61(2):148–156, 2014. doi: 10.1090/noti1082. URL <https://arxiv.org/abs/1309.2042>.
- [2] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, New York, 3rd edition, 1999. Sec. 1.9 (uniqueness), Problem 1.12 (Green reciprocity), Sec. 4.4 (dielectric sphere).
- [3] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii. *Electrodynamics of Continuous Media*. Course of Theoretical Physics, Vol. 8. Pergamon Press, Oxford, 2nd edition, 1984. Sec. 4 “A conducting ellipsoid” and Sec. 8 (dielectric ellipsoid).
- [4] Oliver Dimon Kellogg. *Foundations of Potential Theory*. Springer, Berlin, 1929. doi: 10.1007/978-3-642-86748-4. Chapter VII, sections “Ellipsoidal coordinates” and “The potential of the solid homogeneous ellipsoid”; Dover reprint 1953.
- [5] James Clerk Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, volume 1. Clarendon Press, Oxford, 3rd edition, 1891. Chapter X: Confocal Surfaces of the Second Degree.
- [6] NIST Digital Library of Mathematical Functions. Chapter 14 (legendre and related functions) and chapter 19 (elliptic integrals, sec. 19.16 symmetric integrals). Release 1.2.x. URL <https://dlmf.nist.gov/>.
- [7] B. C. Carlson. Numerical computation of real or complex elliptic integrals. *Numerical Algorithms*, 10:13–26, 1995. doi: 10.1007/BF02198293.
- [8] G. Pólya and G. Szegő. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Annals of Mathematics Studies 27. Princeton University Press, Princeton, 1951.
- [9] S. Chandrasekhar. *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*. Yale University Press, New Haven, 1969. Chapter 3: The potentials of homogeneous and heterogeneous ellipsoids.
- [10] J. A. Osborn. Demagnetizing factors of the general ellipsoid. *Physical Review*, 67(11–12): 351–357, 1945. doi: 10.1103/PhysRev.67.351.

- [11] Edmund C. Stoner. The demagnetizing factors for ellipsoids. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 36(263):803–821, 1945. doi: 10.1080/14786444508521510.
- [12] Julius Adams Stratton. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, New York, 1941. Chapter III (ellipsoidal coordinates, conducting and dielectric ellipsoids).
- [13] Vladimir A. Rakov and Martin A. Uman. *Lightning: Physics and Effects*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. doi: 10.1017/CBO9781107340886.
- [14] Yuri P. Raizer. *Gas Discharge Physics*. Springer, Berlin, 1991. doi: 10.1007/978-3-642-61247-3.
- [15] H. A. Bethe. Theory of diffraction by small holes. *Physical Review*, 66(7–8):163–182, 1944. doi: 10.1103/PhysRev.66.163.

A 椭球坐标的推导

推导：恒等式 (4.19)

固定一点 $\mathbf{x}$ ($a > b > c$, 三个坐标都不为零), 把 $F(s) = \sum_i x_i^2/(a_i^2 + s) - 1$ 通分: $F(s) = \frac{N(s)}{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}$. 分子 $N(s) = x^2(b^2 + s)(c^2 + s) + y^2(a^2 + s)(c^2 + s) + z^2(a^2 + s)(b^2 + s) - (a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)$ 是 s 的三次多项式, s^3 的系数为 -1 , 而它的三个根就是 λ, μ, ν . 所以 $N(s) = -(s - \lambda)(s - \mu)(s - \nu)$, 即式 (4.19)。

推导：用 (λ, μ, ν) 表示直角坐标

式 (4.19) 两边乘以 $(a^2 + s)$ 再令 $s \rightarrow -a^2$, 左边只剩 x^2 :

$$x^2 = -\frac{(-a^2 - \lambda)(-a^2 - \mu)(-a^2 - \nu)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}.$$

整理并对 y, z 同样处理:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \\ y^2 &= \frac{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)(b^2 + \nu)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}, \\ z^2 &= \frac{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)(c^2 + \nu)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}. \end{aligned}$$

(由 $\lambda > -c^2 > \mu > -b^2 > \nu > -a^2$ 可以逐个验证三式右边为正。) 一组 (λ, μ, ν) 对应 8 个关于坐标平面对称的点, 与球坐标中 r 对应整个球面类似。

推导：拉梅系数 (4.20)

对 $\ln x_i^2$ 求 λ 的偏导： $\frac{2}{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda} = \frac{1}{a_i^2 + \lambda}$ ，所以 $\frac{\partial x_i}{\partial \lambda} = \frac{x_i}{2(a_i^2 + \lambda)}$ 。于是

$$H_\lambda^2 = \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \lambda} \right)^2 = \frac{1}{4} \sum_i \frac{x_i^2}{(a_i^2 + \lambda)^2} = \frac{\Gamma}{4},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} = \frac{1}{4} \sum_i \frac{x_i^2}{(a_i^2 + \lambda)(a_i^2 + \mu)} = 0$$

(后者即式 (3.4))。 Γ 可由式 (4.19) 对 s 求导得到： $-F'(s) = \sum x_i^2 / (a_i^2 + s)^2$ ，在 $s = \lambda$ 处，右边 $\frac{(s-\lambda)g(s)}{\prod(a_i^2+s)}$ ($g = (s-\mu)(s-\nu)$) 的导数只剩 $g(\lambda) / \prod(a_i^2 + \lambda)$ ：

$$\Gamma = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{\Delta(\lambda)^2},$$

这就是式 (4.20)。 H_μ, H_ν 同理 (取绝对值, 因为 $(\mu - \lambda)(\mu - \nu) < 0$ 而 $(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)(c^2 + \mu) < 0$)。

式 (4.21) 的来历 记 $\Delta_s \equiv \sqrt{|(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)|}$ 。由上面的结果，

$$\frac{H_\lambda H_\mu H_\nu}{H_\lambda^2} = \frac{H_\mu H_\nu}{H_\lambda} = \frac{(\mu - \nu)\Delta_\lambda}{2\Delta_\mu \Delta_\nu},$$

其中只有 Δ_λ 依赖 λ ；代入式 (4.4) 即得式 (4.21)，与第 5.2 节的直角坐标计算一致。

B 旋转椭球的积分与渐近式

扁椭球的 $I(\lambda)$ $a = b > c$, $\Delta = (a^2 + t)\sqrt{c^2 + t}$ 。代换 $\tau = \sqrt{c^2 + t}$, $a^2 + t = \tau^2 + f^2$, $f^2 = a^2 - c^2$ ：

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\sqrt{c^2 + \lambda}}^{\infty} \frac{2 d\tau}{\tau^2 + f^2} \\ &= \frac{2}{f} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\sqrt{c^2 + \lambda}}{f} \right] \\ &= \frac{2}{f} \arctan \frac{f}{\sqrt{c^2 + \lambda}}. \end{aligned}$$

$\lambda = 0$ 时 $C = 8\pi\epsilon_0 / I(0) = 4\pi\epsilon_0 f / \arctan(f/c)$ ，即式 (5.3)。过场点的共焦扁椭球极半轴 $\sqrt{c^2 + \lambda} = f \sinh \xi$ ，所以 $\Phi \propto \arctan(1 / \sinh \xi) = \operatorname{arccot}(\sinh \xi)$ ，与第 5.1 节一致。

卡尔松对称椭圆积分 定义 [6, 7]

$$R_F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}},$$

$$R_D(x, y, z) = \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{(t+z)\sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}}.$$

于是 (j, k 为另外两个指标)

$$I(0) = 2R_F(a^2, b^2, c^2), \quad C = \frac{4\pi\epsilon_0}{R_F(a^2, b^2, c^2)},$$

$$J_i(0) = \frac{2}{3} R_D(a_j^2, a_k^2, a_i^2), \quad N_i = \frac{abc}{3} R_D(a_j^2, a_k^2, a_i^2).$$

这是三轴椭球数值计算最方便的形式 (Python 中为 `scipy.special` 的 `elliprf` 与 `elliprd`)。Osborn 与 Stoner 1945 年用勒让德标准形式的椭圆积分给出了三轴椭球退磁因子的公式与数表 [10, 11]。

渐近式的误差 细针 N_z 的展开: $\operatorname{artanh} e = \ln \frac{2c}{a} - \frac{a^2}{4c^2} + \mathcal{O}(a^4/c^4)$ (与第 5.1 节电容的展开同理), $\frac{1-e^2}{e^3} = \frac{a^2}{c^2} \left(1 + \frac{3a^2}{2c^2} + \cdots\right)$, 又 $e \approx 1 - \frac{a^2}{2c^2}$, 所以 $\operatorname{artanh} e - e = (L-1) + \frac{a^2}{4c^2} + \cdots$ ($L \equiv \ln \frac{2c}{a}$),

$$N_z = \frac{a^2}{c^2}(L-1) \left[1 + \frac{a^2}{c^2} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4(L-1)}\right) + \cdots\right].$$

式 (6.12) 的相对误差约为 $-\frac{a^2}{c^2} \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{4(L-1)}\right]$, 是 $\mathcal{O}((a/c)^2)$: $c/a = 10$ 时约 1.6%, $c/a = 50$ 时 0.06% (见例题 1 的数值)。薄盘的式 (6.13) 相对误差 $\mathcal{O}(c/a)$ 。

C 角积分恒等式与射线法的系数

记 $g_i = 1/a_i^2$, $\alpha(\hat{\mathbf{u}}) = \sum_i g_i u_i^2$ (与正文第 6.3 节相同)。

推导: 恒等式 (5.13): 同一个高斯积分算两遍

考虑 $G \equiv \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\sum g_i x_i^2}}{|\mathbf{x}|} d^3x$ 。

1. 球坐标: $\mathbf{x} = r\hat{\mathbf{u}}$, $d^3x = r^2 dr d\Omega$, $\sum g_i x_i^2 = r^2 \alpha$: $G = \int d\Omega \int_0^\infty r e^{-r^2 \alpha} dr = \int \frac{d\Omega}{2\alpha}$ 。
2. 用 $\frac{1}{r} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\tau^2 r^2} d\tau$ (右边代换 $\tau' = \tau r$ 即得)。交换积分次序后, x, y, z 三个方向的高斯积分分离: $\int e^{-(g_i + \tau^2)x_i^2} dx_i = \sqrt{\pi/(g_i + \tau^2)}$, 所以 $G = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\pi^{3/2} d\tau}{\sqrt{\prod_i (g_i + \tau^2)}} = 2\pi \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{\prod_i (g_i + \tau^2)}}$ 。
3. 两式相等: $\int \frac{d\Omega}{\alpha} = 4\pi \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{\prod_i (g_i + \tau^2)}}$ 。代换 $\tau = t^{-1/2}$: $g_i + \tau^2 = \frac{a_i^2 + t}{a_i^2 t}$, $\sqrt{\prod_i (g_i + \tau^2)} = \frac{\Delta(t)}{abc t^{3/2}}$, $|d\tau| = \frac{1}{2} t^{-3/2} dt$, 所以 $\frac{d\tau}{\sqrt{\prod_i (g_i + \tau^2)}} = \frac{abc}{2} \frac{dt}{\Delta(t)}$,

$$\int \frac{d\Omega}{\alpha} = 2\pi abc \int_0^\infty \frac{dt}{\Delta(t)} = 2\pi abc I(0).$$

推导: 恒等式 (6.7): 对 g_i 求导

把上面第 3 步的中间结果看成三个独立参数 g_i 的函数, 对 g_i 求偏导: 左边 $\frac{\partial}{\partial g_i} \frac{1}{\alpha} = -\frac{u_i^2}{\alpha^2}$; 右边 $\frac{\partial}{\partial g_i} \Pi^{-1/2} = -\frac{1}{2(g_i + \tau^2)} \Pi^{-1/2}$ 。所以

$$\begin{aligned} \int \frac{u_i^2}{\alpha^2} d\Omega &= 2\pi \int_0^\infty \frac{d\tau}{(g_i + \tau^2) \sqrt{\prod_j (g_j + \tau^2)}} \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{\frac{a_i^2 t}{a_i^2 + t}}{\frac{a_i^2 + t}{a_i^2 t} \cdot \frac{abc}{2} \frac{dt}{\Delta(t)}} \\ &= \pi abc a_i^2 \int_0^\infty \frac{t dt}{(a_i^2 + t) \Delta(t)}. \end{aligned}$$

用 $\frac{t}{a_i^2 + t} = 1 - \frac{a_i^2}{a_i^2 + t}$ 即得 $\pi abc a_i^2 [I(0) - a_i^2 J_i(0)]$ 。

推导：射线法的系数

把两个恒等式代入式 (6.6) (交叉项为零, $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}})^2 \rightarrow \sum_i g_i^2 x_i^2 u_i^2$):

$$\Phi_{\text{in}} = \frac{\rho_e}{8\pi\epsilon_0} \left[\left(1 - \sum_i g_i x_i^2 \right) 2\pi abc I + 2 \sum_i g_i^2 x_i^2 \pi abc a_i^2 (I - a_i^2 J_i) \right].$$

由 $g_i^2 a_i^2 = g_i$ 、 $g_i^2 a_i^4 = 1$, 方括号 $= 2\pi abc [I - \sum g_i x_i^2 I + \sum g_i x_i^2 I - \sum x_i^2 J_i] = 2\pi abc [I - \sum x_i^2 J_i]$, 于是 $\Phi_{\text{in}} = \frac{\rho_e abc}{4\epsilon_0} [I(0) - \sum x_i^2 J_i(0)]$, 与式 (6.4) 相同。

D 加权最小二乘与格林互易定理

加权最小二乘 数据 (x_k, y_k) , y_k 的标准不确定度 σ_k , 模型 $y = \mathcal{S}x + \mathcal{B}$. 使 $\chi^2 = \sum_k w_k (y_k - \mathcal{S}x_k - \mathcal{B})^2$ ($w_k = 1/\sigma_k^2$) 最小。对 $\mathcal{S}$ 、 $\mathcal{B}$ 求偏导令其为零, 得线性方程组; 记 $W = \sum w_k$, $W_x = \sum w_k x_k$, $W_y = \sum w_k y_k$, $W_{xx} = \sum w_k x_k^2$, $W_{xy} = \sum w_k x_k y_k$, $\Delta_w = WW_{xx} - W_x^2$:

$$\mathcal{S} = \frac{WW_{xy} - W_x W_y}{\Delta_w}, \quad \mathcal{B} = \frac{W_{xx} W_y - W_x W_{xy}}{\Delta_w},$$

$$\sigma_{\mathcal{S}}^2 = \frac{W}{\Delta_w}, \quad \sigma_{\mathcal{B}}^2 = \frac{W_{xx}}{\Delta_w}, \quad \text{cov}(\mathcal{S}, \mathcal{B}) = -\frac{W_x}{\Delta_w}.$$

($\mathcal{S}$ 、 $\mathcal{B}$ 是 y_k 的线性组合, 按误差传递即得。) 若模型正确且 σ_k 估计合理, χ^2 的期望为自由度 $\nu = n - 2$ 。导出量 $F(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ 的方差为 $\sigma_F^2 = F_{\mathcal{S}}^2 \sigma_{\mathcal{S}}^2 + F_{\mathcal{B}}^2 \sigma_{\mathcal{B}}^2 + 2F_{\mathcal{S}} F_{\mathcal{B}} \text{cov}(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ ($F_{\mathcal{S}} = \partial F / \partial \mathcal{S}$ 等)。

格林互易定理 设所有电荷 (含导体表面电荷) 在真空中, 配置 A 的电荷密度 ρ^A 、电势 Φ^A , 配置 B 同理。由库仑定律

$$\begin{aligned} \int \rho^A \Phi^B dV &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\rho^A(\mathbf{x}) \rho^B(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV dV' \\ &= \int \rho^B \Phi^A dV, \end{aligned}$$

因为积分核对 $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ 对称。把导体上的面电荷单独写出, 并利用每个导体是等势体 ($\oint \sigma_k \Phi_k dS = Q_k \Phi_k$), 就得到实验题第 (1) 问中的形式 [2]。