

地球是一个漏电的电容器：全球大气电路、雷电与舒曼共振

第 43 届决赛短训讲义组

2026 年 10 月

目录

1 导读	2
2 名词与符号	5
3 前置模块：导电介质中的静电学与导体间的电磁波	5
3.1 漂移、迁移率与电导率	5
3.2 大气为什么导电：离子的产生与复合	7
3.3 电荷弛豫时间	8
3.4 非均匀介质中的稳恒电流会积累电荷	9
3.5 导体表面的电荷与电场；球形电容器	10
3.6 两块导体板之间的电磁波	11
4 晴天电场与地球的电荷	13
4.1 晴天电场	13
4.2 稳恒电流下的电场剖面	13
4.3 柱电阻与全球电阻	15
4.4 自洽检验：三个观测量与边界层	15
5 为什么需要“电池”：全球大气电路	17
5.1 地球-电离层“电容器”与它的放电时间	17
5.2 雷暴：全球电路的发电机	19
5.3 卡内基曲线：全球同步的证据	21
6 闪电与安全	23
6.1 一次闪电的量级	23
6.2 电流在地中的扩散：半球接地模型	24

1 导读	2
6.3 尖端放电与避雷针	26
7 舒曼共振：地球-电离层空腔的本征振动	27
7.1 空腔的两个导体壁	27
7.2 粗估：绕地球一周的驻波	27
7.3 薄球壳上的波动方程	27
7.4 本征频率与勒让德多项式	29
7.5 理想值与观测值：电离层是有损耗的壁	30
7.6 舒曼共振的用途	32
8 决赛风格例题	33
9 实验与数据处理：探空电导率剖面与柱电阻	40
10 小结：推导链	44
A 勒让德方程：本征值为什么是 $n(n+1)$	47
B 一次闪电激发的场：模式求和与共振峰的宽度	48
C 复电高度与电离层下边界的损耗	49
D 加权最小二乘、协方差与误差传递	50
E 名词解释	51

1 导读

晴朗无风的日子，你站在海边的空地上。头顶 1.7 m 处的空气比脚下的地面高出约 200 V 的电势，地面上每平方米带着约 -1.1×10^{-9} C 的电荷。把整个地球表面加起来，地球带着约 -6×10^5 C 的负电。空气并不是完美的绝缘体：宇宙线和地表放射性不断把空气分子电离，离子在电场中漂移，形成从天空流向地面的微弱电流，全球合计约 1–2 kA。按这样的电流，地球的电荷几分钟到十几分钟就会漏光。可是晴天电场千百年来一直存在，并且全世界的晴天电场按同一个世界时钟同步起伏。是谁在给地球持续“充电”？

答案是此刻正在全球各地同时活动的上千个雷暴。它们像电池一样，把正电荷送上约 60 km 以上导电良好的电离层，把负电荷送到地面；晴天区的空气则是电池的负载。地面与电离层这两个同心导体球壳还构成一个巨大的电磁空腔，每秒数十次的闪电不断“敲击”它，使它在 7.8 Hz、14 Hz、21 Hz……上共鸣，这就是舒曼共振。

本讲用普通物理的静电学、稳恒电流和麦克斯韦方程组，一步一步建立这幅图像：导电介质中的电荷弛豫 $\Rightarrow$ 晴天大气的电场剖面与柱电阻 $\Rightarrow$ 全球电路需要发电机 $\Rightarrow$ 雷电的电流怎样在地中

扩散（跨步电压） $\Rightarrow$ 地球-电离层空腔的本征频率。

背景：从富兰克林的风筝到开尔文的验电器

1752 年 5 月 10 日，法国人 Dalibard 按照富兰克林此前提出的“岗亭实验”方案，在巴黎附近的马尔利（Marly-la-Ville）竖起一根用玻璃瓶绝缘的 40 英尺铁杆，雷雨云经过时从杆上引出了火花，证明雷电就是电 [1]。富兰克林自己的风筝实验据 Priestley 1767 年的记述做于同年 6 月；富兰克林在 1752 年 10 月 1 日写给伦敦皇家学会 Collinson 的信中描述了风筝实验的做法，信中还提到费城的学院与州议会大楼尖顶上已经装了避雷尖杆 [2]。同年，法国的 Lemonnier 发现即使在晴朗无云的天气里，空气也带电，这是晴天大气电的最早观测 [3]。一百年后，开尔文（William Thomson）在 1859 年发明了“滴水集电器”（water-dropper）：让绝缘水桶中的水从细嘴不断滴出，水滴带走电荷，直到水桶与喷嘴处的空气等电势，从而测出空中某一点的电势。他在 1860 年 5 月 18 日的皇家研究院讲演中介绍了大气电的测量，并报告了在苏格兰阿伦岛海滩上的晴天测量：每英尺高度的电势差相当于 22–44 个丹聂尔电池，即约 80–160 V/m [4]。那时人们已经知道绝缘导体在空气中会缓慢漏电（库仑时代就有记录）；1900–1901 年，C. T. R. Wilson 与 Elster、Geitel 分别证明漏电来自空气中持续产生的离子，Wilson 在密闭容器中测得每立方厘米每秒约产生 20 对离子 [5, 6]。1912 年赫斯（V. F. Hess）乘气球升到 5 km 以上，发现电离率随高度增加，从而发现了宇宙线 [7]。

背景：威尔逊的全球电路与卡内基号

C. T. R. Wilson（因发明云室获 1927 年诺贝尔物理学奖）在 1920 年前后研究雷暴的电场，提出：雷暴把正电荷送往高空、把负电荷送往地面，全球同时活动的雷暴共同维持着晴天区的电场，晴天区的空地电流则是这个“全球电路”的回路 [8, 9]。验证这一假说的关键数据来自海洋。美国卡内基研究所地磁部建造的无磁性帆船“卡内基号”在 1909–1929 年间进行了七次环球航行，第 IV–VI 航次（1915–1921）的测量已经显示：世界各地海面上测到的电场日变化按世界时同步，约 3 UT 最小、约 19 UT 最大。1929 年 Whipple 把这条曲线与全球雷暴活动的日变化作比较，发现二者形状相似，为 Wilson 的假说提供了有力证据 [10]。第 VII 航次（1928–1929）首次连续自动记录，确认了这一结果，起伏约 $\pm 15\%$ 。这条曲线后来被称为“卡内基曲线”；1929 年 11 月下旬（据 Harrison (2013)，为 28 日），卡内基号在萨摩亚的阿皮亚港因爆炸焚毁，船长遇难 [3]。今天，电离层电势（约 250 kV）的长期测量仍是监测全球电路强度的主要手段 [11]。

背景：舒曼共振与卫星眼中的全球闪电

1952 年，德国物理学家 Schumann 指出：导电的地球与电离层之间的空气层构成一个球壳形的电磁空腔，应当存在频率约 10 Hz 的无辐射本征振荡 [12]。1960 年 Balser 与 Wagner 首次在实验中清楚地观测到这些共振，测得前三个频率为 7.8、14.1、20.3 Hz [13, 14]，比理想空腔的预言低约 20%（第 7.5 节解释原因）。激发舒曼共振的是全球的闪电。卫星上的光学瞬态探测器（OTD）从 1995 年起从太空统计闪电，给出全球平均每秒 44 ± 5 次闪电，陆地上的闪电约为海洋上的 10 倍 [15]；与热带测雨卫星上的闪电成像仪（LIS）合并的气候统计给出每秒约 46 次 [16]。由于共振的强度随全球闪电活动起伏，Williams 在 1992 年提出把舒曼共振用作“全球热带温度计” [17]。

学习目标 学完本讲，应当能够：

1. 从连续性方程与高斯定理推出导电介质中的电荷弛豫时间 $\tau = \varepsilon_0/\sigma$ ，并用它判断什么时候某种介质可以当作“导体”或“绝缘体”；
2. 由离子迁移率与浓度估算空气电导率；对给定的电导率剖面 $\sigma(z)$ 求稳恒电流下的电场、电势、空间电荷与柱电阻，并用三个独立观测量（地面电场、空地电流、电离层电势）做自洽检验；
3. 说明为什么“地球电容器”的放电时间是地面空气的弛豫时间 $\varepsilon_0/\sigma(0)$ ，而不是“几何电容 $\times$ 电阻”，并据此论证全球电路必须有持续工作的发电机；
4. 用半球接地模型计算雷击点附近的地电势与跨步电压，判断模型的适用范围；
5. 从平行板波导的 TEM 波出发，推出球壳空腔中的波动方程与本征频率 $f_n = \frac{c}{2\pi a} \sqrt{n(n+1)}$ ，并解释观测频率偏低、谱峰很宽的原因；
6. 处理探空电导率数据：线性化、加权最小二乘、含协方差的误差传递，以及系统误差分析。

前置知识：本讲需要的普通物理与数学

- 电磁学：库仑定律、高斯定理（积分形式）、电势、导体静电平衡、电容器、欧姆定律与电阻定律 $R = L/(\sigma S)$ 、电荷守恒、安培环路定理、法拉第电磁感应定律、位移电流与电磁波的基本概念；
- 力学与热学：牛顿定律、理想气体、平均自由程的概念；
- 数学：微积分（含简单的常微分方程 $\dot{y} = -y/\tau$ ）、泰勒展开、复数指数、幂级数、对数坐标。

本讲新引入的工具（迁移率、离子复合、电荷弛豫、空间电荷、柱电阻、面电流与磁场切向分量的跃变、TEM 波、传输线、球面上的“拉普拉斯算子”、勒让德方程、品质因数、加权最小二乘与协方差）都在首次使用前给出定义与推导。

建议学时 共 2 学时（约 90 分钟）：前置模块 20 分钟；晴天电场与柱电阻 20 分钟；全球电路与放电时间 15 分钟；闪电与跨步电压 10 分钟；舒曼共振 25 分钟。例题与实验题供课后练习，附录供深入阅读。

推导路线 欧姆定律 + 电荷守恒 + 高斯定理 $\Rightarrow$ 弛豫时间 $\tau = \varepsilon_0/\sigma \Rightarrow$ （稳恒、水平均匀） $E(z) = J/\sigma(z)$ 、柱电阻 $\Rightarrow$ （球对称弛豫）地球电荷放电时间 $\varepsilon_0/\sigma(0)$ ，必须有雷暴发电机 $\Rightarrow$ （半球对称电流）跨步电压；另一条线：高斯定理 + 面电流 + 法拉第定律 $\Rightarrow$ 平行板 TEM 波 $\Rightarrow$ 薄球壳上的波动方程 $\Rightarrow$ 勒让德方程与 $n(n+1) \Rightarrow$ 舒曼共振。

2 名词与符号

方向约定 全讲取 z 轴竖直向上, $z = 0$ 为地面。晴天时电场指向下方, 所以电场的 z 分量 $E_z < 0$; 我们用 $E \equiv |E_z| > 0$ 表示其大小。大气电学文献常用“电位梯度” (potential gradient, PG) $dV/dz = -E_z$, 晴天时为正, 数值等于 E 。地面的电势取为零。电流密度 J 也取大小, 晴天时传导电流向下流。

符号 Q 只用于电荷 (Q_E 等); 品质因数一律带下标写成 Q_n 或在第 7.5 节中写作“品质因数 Q_n ”。 ρ 只表示体电荷密度, 土壤电阻率写作 ρ_s 。

3 前置模块：导电介质中的静电学与导体间的电磁波

普通物理的静电学大多讨论“理想导体”和“理想绝缘体”两种极端。大气恰好介于两者之间：它导电, 但电导率只有铜的 10^{-22} 。本节建立处理这种“弱导电介质”的工具, 最后一小节讨论两块导体板之间能传播什么样的电磁波。

3.1 漂移、迁移率与电导率

空气中导电的是“小离子”：宇宙线或放射性射线把 N_2 、 O_2 分子电离后, 产生的正离子和电子在不到一微秒内各自与水分子等结合, 形成由几个到十几个分子组成的带电团簇, 带电量为 $\pm e$ 。

定义：漂移速度与迁移率

在电场 $\mathbf{E}$ 中, 离子一方面受电场力加速, 一方面不断与中性分子碰撞而“忘记”原来的速度。大量离子的平均速度称为漂移速度 $\mathbf{v}_d$ 。实验表明在弱场下

$$\mathbf{v}_d = \pm \mu_{\pm} \mathbf{E}, \quad (3.1)$$

比例系数 $\mu_{\pm} > 0$ 称为正、负离子的迁移率 (mobility), 单位 $\text{m}^2/(\text{V s})$; 正离子沿 $\mathbf{E}$ 方向漂移, 负离子逆着 $\mathbf{E}$ 漂移。

为什么漂移速度正比于 E ? 设离子质量 m 、两次碰撞的平均间隔为 t_c 。每次碰撞后离子的速度方向随机, 平均为零; 在接下来的时间里电场使它获得速度 eEt/m 。对一个间隔平均, 得到 $v_d \sim eEt_c/m$, 于是 $\mu \sim et_c/m$ 与 E 无关。这个粗略论证还告诉我们 $t_c \propto 1/N$ (N 为空气分子数密度, 分子越密碰得越勤), 所以

$$\mu \propto \frac{1}{N}. \quad (3.2)$$

高空空气稀薄, 离子迁移率更大, 这是大气电导率随高度增大的原因之一。海平面附近正、负小离子的迁移率分别约为 $1.4 \times 10^{-4} \text{ m}^2/(\text{V s})$ 与 $1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2/(\text{V s})$ [18], 在 130 V/m 的晴天电场中漂移速度只有约 2 cm/s 。

推导：由迁移率得到电导率

取一个垂直于 $\mathbf{E}$ 的面积 S 。时间 dt 内, 正离子沿 $\mathbf{E}$ 方向穿过它的是底面积 S 、高 $v_{d+}dt$ 的柱体中的离子, 数目 $n_+Sv_{d+}dt$, 带电量 $en_+S\mu_+E dt$ 。负离子逆着 $\mathbf{E}$ 穿过, 携带负电荷 $-e$, 等效于

表 1 本讲符号表

符号	含义	单位
ε_0, μ_0, c	真空介电常量、真空磁导率、光速	F/m, H/m, m/s
a	地球半径 (取 6371 km)	m
$\sigma, \sigma_{\pm}$	电导率; 正/负离子贡献的“极性电导率”	S/m
$\mu_{\pm}, n_{\pm}$	正/负小离子的迁移率、数密度	$\text{m}^2/(\text{V s}), \text{m}^{-3}$
q_{ion}, α	离子对产生率、复合系数	$\text{m}^{-3}\text{s}^{-1}, \text{m}^3/\text{s}$
τ, τ_0	电荷弛豫时间 ε_0/σ ; 地面空气的弛豫时间 $\varepsilon_0/\sigma(0)$	s
E_z, E	电场竖直分量、大小 (晴天 $E = -E_z > 0$)	V/m
E_0	地面晴天电场大小	V/m
J	空地传导电流密度大小	A/m ²
q_s	导体表面的面电荷密度	C/m ²
ρ	空间 (体) 净电荷密度	C/m ³
Q_E	地球表面总电荷	C
H	电导率标高: $\sigma \propto e^{z/H}$	m
σ_{∞}	自由大气指数律外推到地面的电导率	S/m
$V(z), V_1$	高度 z 处电势; 电离层电势	V
R_c	柱电阻 (单位面积的竖直气柱从地面到电离层的电阻)	$\Omega \cdot \text{m}^2$
R, I, C	全球晴天区电阻、全球电流、有效电容	$\Omega, \text{A}, \text{F}$
$\mathcal{E}, R_g$	雷暴发电机的等效电动势、内阻 (第 5.2 节)	V, Ω
σ_s, ρ_s	土壤电导率、电阻率 $1/\sigma_s$	S/m, $\Omega \cdot \text{m}$
I (第 6 节)	雷电流 (峰值)	A
U, s	跨步电压、步距	V, m
E_c, r_i	土壤击穿场强、土壤电离区半径	V/m, m
R_b, R_f, R_{gnd}	人体电阻、单脚接地电阻、接地体电阻	Ω
K	面电流密度 (单位宽度上的电流)	A/m
z_1	电离层下边界高度 (直流问题)	m
h	两导体板 (地面-电离层) 的间距	m
λ, λ_w	本征值 $\omega^2 a^2 / c^2$; 波长	1, m
h_e, h_m	电离层的“电高度”“磁高度” (第 7.5 节)	m
θ	球面上到源点的角距离 (余纬)	rad
P_n	第 n 阶勒让德多项式	1
f_n, ω_n, Q_n	第 n 个舒曼共振的频率、角频率、品质因数	Hz, $\text{s}^{-1}, 1$
I_g, J_g	全球雷暴电流; $J_g = I_g / (4\pi a^2)$	A, A/m ²
τ_V	电离层电势的低频滞后时间 (按电阻加权的平均弛豫时间)	s
ϵ, Ω, η	雷暴电流日变化的相对振幅; 日变化角频率; $\eta = \Omega\tau_0$	1, $\text{s}^{-1}, 1$
κ_1, ϕ_1	日变化曲线一次谐波的相对振幅、相位	1, rad
f_L	全球电流中随陆地雷暴面积变化的份额	1
$G(x)$	$\int_1^{\infty} s^{-2} e^{-xs} ds$ (二阶指数积分)	1
$\tilde{h}_e$	复数的等效电高度 (附录 C)	m
D_n	$\omega_n^2 - \omega^2 + i\omega\omega_n/Q_n$ (附录 B)	s^{-2}
$C_G, I_{\pm}$	格迪恩电容器的电容、收集到的正/负离子电流 (第 9 节)	F, A

沿 $\mathbf{E}$ 方向输运正电荷 $en_+S\mu_+E dt$ 。两者相加除以 $S dt$ ，电流密度为 $J = e(n_+\mu_+ + n_-\mu_-)E$ 。这正是欧姆定律的局域形式

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E}, \\ \sigma &= \sigma_+ + \sigma_-, \\ \sigma_{\pm} &= e n_{\pm} \mu_{\pm}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

$\sigma_{\pm}$ 分别称为正、负极性电导率。

检验：与普通物理的电阻定律对照

一段长 L 、截面积 S 的均匀导体两端加电压 U ，内部场强 $E = U/L$ ，电流 $I = JS = \sigma SU/L$ ，即 $R = L/(\sigma S)$ 。式 (3.3) 就是电阻定律在一个小体积元上的写法。量纲： $[en\mu E] = \text{C} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1} \cdot \text{V m}^{-1} = \text{A/m}^2$ 。

3.2 大气为什么导电：离子的产生与复合

空气中的离子对由两类电离源产生：(1) 宇宙线（来自太阳系外的高能质子与核，进入大气后产生的次级粒子簇射），在所有高度起作用，海面附近每立方厘米每秒产生约 2 对离子，随高度增加，在约 15 km 处达到每立方厘米每秒 35-50 对的极大（称为 Pfozter 极大）；(2) 地表放射性：陆地土壤中的铀、钍衰变产生的氡气及其子体放出的 α 、 β 粒子，以及岩石发出的 γ 射线，主要作用于陆地上最低的约 1 km 空气，使陆面附近的总产生率达到每立方厘米每秒约 10 对（宇宙线只占约五分之一）[18, 19]。

假设：离子平衡的最简模型

1. 正负小离子数密度相等， $n_+ = n_- = n$ （空气整体近似电中性，第 4.1 节将看到净电荷只占离子总数的千分之几到百分之几）；
2. 离子只因正负离子相遇复合而消失，复合速率为 αn^2 （一个正离子单位时间遇到负离子的概率正比于 n ，正离子数又是 n ）；
3. 暂不考虑离子附着到气溶胶粒子（灰尘、盐粒、污染物）上的损失，这一项在边界层很重要，见下文。

在这些假设下，单位体积离子数的变化率等于产生率减去复合率：

$$\frac{dn}{dt} = q_{\text{ion}} - \alpha n^2. \quad (3.4)$$

稳态 $\dot{n} = 0$ 给出

$$n = \sqrt{q_{\text{ion}}/\alpha}. \quad (3.5)$$

取陆面 $q_{\text{ion}} \approx 10 \text{ cm}^{-3} \text{s}^{-1}$ 、 $\alpha \approx 1.6 \times 10^{-6} \text{ cm}^3/\text{s}$ [18]，得 $n \approx 2.5 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$ 。实测小离子浓度通常为每立方厘米 200-2500 个，多数情况下低于这个估计，差别来自上面假设 3 忽略的气溶胶附着：离子撞上比它大得多的气溶胶粒子后就失去了迁移能力。污染越重，小离子越少，电导率越低。

式 (3.4) 线性化后可以看出稳态是稳定的：令 $n = n^* + \delta n$ ，得 $\dot{\delta n} = -2\alpha n^* \delta n$ ，扰动以时间常数 $1/(2\sqrt{q_{\text{ion}}\alpha}) \approx 125 \text{ s}$ 衰减，所以离子浓度能在几分钟内跟上电离源的变化。

检验：地面电导率的量级

取 $n_{\pm} = 500 \text{ cm}^{-3} = 5 \times 10^8 \text{ m}^{-3}$ ， $\mu_{\pm} = 1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2/(\text{Vs})$ ，由式 (3.3)

$$\begin{aligned}\sigma &= 2en\mu = 2 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 5 \times 10^8 \text{ m}^{-3} \\ &\quad \times 1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2/(\text{Vs}) \\ &\approx 2.4 \times 10^{-14} \text{ S/m},\end{aligned}$$

与实测海平面晴天电导率（约 $2 \times 10^{-14} \text{ S/m}$ ）相符 [19]。作为对比，铜的电导率为 $6 \times 10^7 \text{ S/m}$ ，海水约 4 S/m ，潮湿土壤约 $10^{-3} \sim 10^{-1} \text{ S/m}$ 。

随高度增加，宇宙线电离增强（直到 Pfotzer 极大），式 (3.2) 又使迁移率随空气密度减小而增大，两者共同使电导率在对流层和平流层中大致按指数增长：

$$\sigma(z) \approx \sigma_{\infty} e^{z/H}, \quad (3.6)$$

标高 H 在对流层中上部到平流层下部约为 4–6 km [20, 21]；从地面的约 10^{-14} S/m 到 80 km 处的约 10^{-7} S/m ，平均标高约 5 km [21]。这是一个经验拟合式，不是由上面的微观模型严格推出的；在最低约 1–2 km 的大气边界层中，气溶胶使电导率明显低于指数律的外推值（第 4.4 节）。

3.3 电荷弛豫时间

把一团多余电荷放进导电介质，它会怎样消失？

假设：均匀欧姆介质

介质的电导率 σ 处处相同、与场强无关（欧姆定律 (3.3) 成立）；介电性质与真空相同（空气的相对介电常量 1.0006）；不考虑离子的扩散（在大气电场中扩散电流远小于漂移电流）。

推导：弛豫时间 $\tau = \varepsilon_0/\sigma$

在介质中任取一个闭合曲面 Σ ，其中包含的净电荷为 Q_{in} 。

1. 电荷守恒： Q_{in} 的减少率等于穿出 Σ 的电流，

$$\frac{dQ_{\text{in}}}{dt} = - \oint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}.$$

2. 欧姆定律 (3.3)， σ 为常数可提到积分号外： $\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \sigma \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ 。

3. 高斯定理： $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{in}}/\varepsilon_0$ 。

三式联立，

$$\begin{aligned}\frac{dQ_{\text{in}}}{dt} &= -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} Q_{\text{in}} \\ \Rightarrow Q_{\text{in}}(t) &= Q_{\text{in}}(0) e^{-t/\tau}, \\ \tau &\equiv \frac{\varepsilon_0}{\sigma}.\end{aligned} \quad (3.7)$$

这里的 Σ 是任意的，可以取得很小，所以结论是：均匀欧姆介质内部任何一点的净电荷密度都按 $e^{-t/\tau}$ 衰减。电荷并没有被“消灭”，而是被电场推到了介质的边界上。 τ 称为电荷弛豫时间 (Maxwell 弛豫时间)。

检验：量纲与数值

$[\varepsilon_0/\sigma] = (C/(V\cdot m))/(A/(V\cdot m)) = C/A = s$ 。数值：

介质	$\sigma / (S/m)$	$\tau = \varepsilon_0/\sigma$
铜	6×10^7	$1.5 \times 10^{-19} s$
海水	4	$2 \times 10^{-12} s$
潮湿土壤	10^{-2}	$9 \times 10^{-10} s$
地面晴天空气	1.5×10^{-14}	$590 s \approx 10 \text{ min}$

铜的数值只是形式上的：实际金属中电荷的重新分布受电子碰撞时间 (约 $10^{-14} s$) 限制，但结论“瞬间到达表面”不变。

要点：“导体”还是“绝缘体”取决于时间尺度

一种介质对某个过程表现得像导体还是绝缘体，取决于过程的时间尺度 T (或角频率 ω) 与弛豫时间的比较： $T \gg \tau$ ($\omega\tau \ll 1$) 时电荷来得及重新分布，介质像导体； $T \ll \tau$ ($\omega\tau \gg 1$) 时像绝缘体。对晴天电场这类静态现象 ($T \sim$ 天)，地面 ($\tau \sim 1 \text{ ns}$) 是极好的导体，而空气的 $\tau \sim 10 \text{ min}$ ，在一天的时间尺度上它也“漏电”；对 8 Hz 的舒曼共振 ($T \approx 0.13 s \ll 10 \text{ min}$)，下层空气则是很好的绝缘体。

例题：带电小球在空气中漏电

一个带电量 Q 的孤立金属球 (或任意形状导体) 放在电导率为 $\sigma_{\pm}$ 的空气中。证明它的电荷按 $Q(t) = Q(0)e^{-t/\tau}$ 衰减，且 τ 与导体的形状、大小无关；指出若 $Q > 0$ ， τ 由哪种离子决定。

解答

取紧贴导体外表面的闭合面 Σ 。导体带正电时，表面外电场处处向外，正离子被推离、负离子被吸向导体并在表面中和正电荷；穿过 Σ 的电流只由负离子携带，等于 $\sigma_- \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \sigma_- Q/\varepsilon_0$ (高斯定理，与形状无关)。于是 $\dot{Q} = -\sigma_- Q/\varepsilon_0$ ， $\tau = \varepsilon_0/\sigma_-$ 。这正是弛豫探头测量极性电导率的原理：把探头充电后放开，记录其电势的衰减时间即可得 $\sigma_{\mp}$ 。前提是：探头附近的离子不会被吸空 (离子不断由远处补充、电场不太强)，且离子靠漂移而非扩散到达表面。

3.4 非均匀介质中的稳恒电流会积累电荷

如果电导率不均匀，稳恒电流流过时介质内部会出现净电荷。这一点对理解大气中的“空间电荷”至关重要。

推导：两层介质界面上的面电荷

设电流 J 竖直向上（沿 $+z$ ）流过两层介质： $z < 0$ 处电导率 σ_1 ， $z > 0$ 处 σ_2 。

1. 稳恒时任何地方的电荷都不随时间变化，所以流入界面的电流等于流出的电流， J 在界面两侧相同。
2. 由欧姆定律，两侧电场 $E_{z1} = J/\sigma_1$ ， $E_{z2} = J/\sigma_2$ ，不相等。
3. 在界面上取一个扁平的“药盒”形高斯面（上下底面积 S 、高度趋于零），侧面通量可略，高斯定理给出界面面电荷密度

$$\begin{aligned} q_{\text{int}} &= \varepsilon_0 (E_{z2} - E_{z1}) \\ &= \varepsilon_0 J \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

若电导率随高度连续变化，把介质看成无数薄层，相邻两层的差 $\Delta(1/\sigma)$ 对应面电荷 $\varepsilon_0 J \Delta(1/\sigma)$ ，除以层厚得到体电荷密度

$$\rho(z) = \varepsilon_0 \frac{dE_z}{dz} = \varepsilon_0 J_z \frac{d}{dz} \frac{1}{\sigma(z)}. \quad (3.9)$$

注

式 (3.9) 的第一个等号就是一维的高斯定理（薄层药盒），对任何静电场成立；第二个等号用了 $E_z = J_z/\sigma$ 。物理图像：电导率小的地方需要更强的电场才能推动同样的电流，电场的变化由界面上的电荷产生。弛豫过程恰好会自动在这些地方堆积所需的电荷：如果电荷不够，流进的电流大于流出的电流，电荷就会累积，直到达到式 (3.8)。

3.5 导体表面的电荷与电场；球形电容器

导体表面 静电平衡的导体内部 $\mathbf{E} = 0$ ，多余电荷分布在表面上。在表面取一个扁药盒，下底在导体内（无场），上底在导体外，高斯定理给出紧贴表面外侧的电场

$$\mathbf{E} = \frac{q_s}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{n}}, \quad (3.10)$$

$\hat{\mathbf{n}}$ 为指向导体外的法向单位矢量， q_s 为面电荷密度。由第 3.3 节，对于时间尺度远大于 1 ns 的过程，地面就是这样的导体。

球形电容器 半径 a 的导体球外套一个同心的导体球壳（内半径 $b = a + h$ ），内球带 $+Q$ 、外壳内表面带 $-Q$ 。两者之间 $E = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ ，电势差 $U = \int_a^b E dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$ ，电容

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \\ &= \frac{4\pi\varepsilon_0 a^2}{h} \left(1 + \frac{h}{a} \right) \\ &\approx \frac{\varepsilon_0 \cdot 4\pi a^2}{h} \quad (h \ll a). \end{aligned} \quad (3.11)$$

薄壳极限就是面积 $4\pi a^2$ 、间距 h 的平行板电容器；修正项 h/a 对 $h = 60 \text{ km}$ 只有 1%。

3.6 两块导体板之间的电磁波

舒曼共振是电磁波在地面与电离层之间传播形成的驻波。先研究最简单的情形：两块无限大的理想导体平板，间距 h ，中间是真空。我们要回答：能否有一种波，电场竖直、磁场水平、沿板传播？它的速度是多少？

假设：平行板波导

导体为理想导体（内部 $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ ）；板间为真空；只考虑场沿 x 方向变化、与 y 无关；试探的场形式为 $\mathbf{E} = E_z(x, t) \hat{z}$ ， $\mathbf{B} = B_y(x, t) \hat{y}$ （ x 向右、 z 向上时， $+y$ 指入纸面）。

这种场是否允许？理想导体表面外侧的电场必须垂直于表面（否则表面电荷会被推动，与“理想导体内无场”的平衡矛盾）， E_z 正是垂直于板的；磁场则必须平行于表面（磁感线不能穿入理想导体）， B_y 正是平行于板的。所以这样的试探形式满足边界条件。

推导：TEM 波四个方程

1. 高斯定理（下板电荷）。由式 (3.10)，下板上表面的面电荷密度

$$q(x, t) = \varepsilon_0 E_z(x, t). \quad (3.12)$$

2. 电荷守恒（下板电流）。电荷沿下板表面流动，形成面电流密度 K_x （单位宽度上的电流）。下板上 $[x, x + dx]$ 、宽 Δy 的一条中，电荷 $q \Delta y dx$ 的变化率等于流入减流出， $\frac{\partial q}{\partial t} \Delta y dx = -[K_x(x + dx) - K_x(x)] \Delta y$ ，即

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial K_x}{\partial x}. \quad (3.13)$$

上板内表面上的电荷与电流与下板等量反号（板间无电荷，从下板出发的电场线全部终止于上板）。

3. 磁场与面电流（安培环路定理）。在下板表面取一个窄矩形回路，长边（长 ℓ ，沿 y ）一条在导体内、一条在板间，短边趋于零。安培环路定理给出 $|B_y| \ell = \mu_0 |K_x| \ell$ ；方向由右手定则确定。结果是：导体表面外侧磁场的切向分量等于 μ_0 乘面电流，方向满足 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{K} \times \hat{n}$ （ $\hat{n}$ 为指向导体外的法向）。对下板 $\hat{n} = \hat{z}$ ， $\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$ ，故

$$B_y = -\mu_0 K_x. \quad (3.14)$$

（也可以把两板看成两片反向的无限大电流片，各在板间产生 $\mu_0 K/2$ ，叠加得同一结果，板外两者抵消。）

4. 法拉第定律。在 xz 平面内取矩形回路：底边沿下板表面从 x 到 $x + dx$ ，右边从 $z = 0$ 向上到 $z = h$ ，顶边沿上板向左，左边向下回到起点。沿两板的边上电场切向分量为零；竖直边的贡献为 $E_z(x + dx)h - E_z(x)h$ 。按右手定则，这个绕向对应的法向为 $\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$ ，磁通量 $\Phi = -B_y h dx$ 。由 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$ ，

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial K_x}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

推导：消去面电流得到波动方程

将式 (3.12) 代入式 (3.13): $\varepsilon_0 \partial_t E_z = -\partial_x K_x$ 。对 t 再求一次导数, 并交换求导次序: $\varepsilon_0 \partial_t^2 E_z = -\partial_x (\partial_t K_x)$ 。由式 (3.15), $\partial_t K_x = -\partial_x E_z / \mu_0$, 代入得

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}, \quad (3.16)$$

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}.$$

这是一维波动方程, 任何形如 $E_z = F(x - ct) + G(x + ct)$ 的函数都满足它。对向 $+x$ 传播的正弦波 $E_z = E_{z0} \cos(kx - \omega t)$, 代回式 (3.12)、(3.13) 得 $K_x = E_z / (\mu_0 c)$ 、 $B_y = -E_z / c$, 并且 $\omega = ck$ 对任何频率、任何板间距 h 都成立。由于电场和磁场都垂直于传播方向, 这种波称为横电磁波 (TEM 波), 它是平行板之间的最低阶模式。图 1(a) 画出了某一时刻的场。

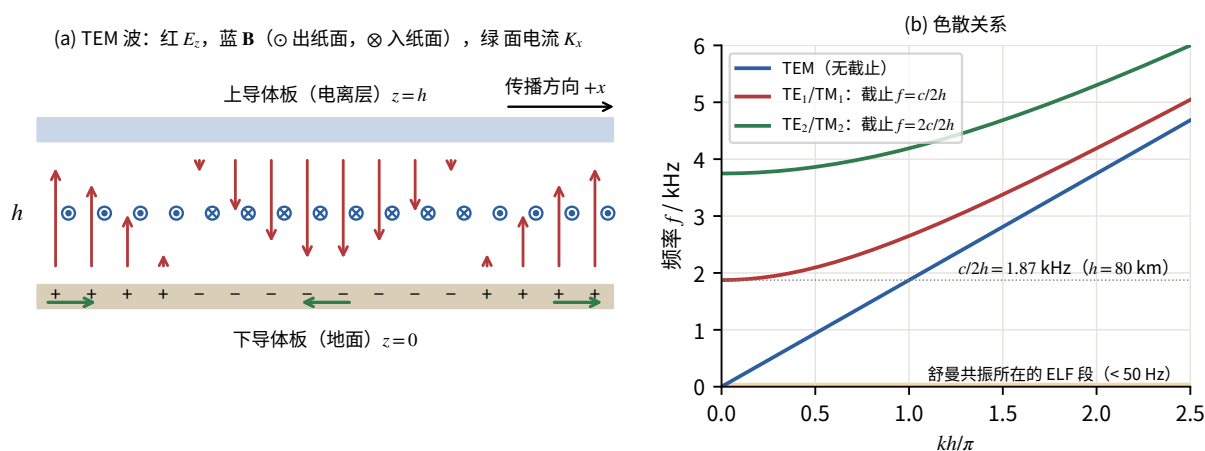


图 1 平行导体板之间的电磁波。(a) TEM 波某一时刻的场: 电场竖直, 磁场水平 (垂直纸面), 下板上的面电荷 $q = \varepsilon_0 E_z$ 与面电流 $K_x = E_z / (\mu_0 c)$ 同相; (b) 色散关系: TEM 波 $\omega = ck$ 没有截止频率; 高阶模 (电场或磁场沿 z 呈半波、整波……分布) 只有在 $f > mc/(2h)$ 时才能传播。

注：高阶模与截止频率

板间还存在场沿 z 方向呈驻波分布的高阶模式 (TE_m 、 TM_m 模, $m = 1, 2, \dots$; TE 指电场没有沿传播方向的分量, TM 指磁场没有沿传播方向的分量)。可以把它们想成在两板间来回反射、斜着前进的平面波: 沿 z 方向必须恰好放下 m 个半波长, $k_z = m\pi/h$, 于是 $\omega^2 = c^2(k^2 + k_z^2)$, 当 $\omega < m\pi c/h$ 时 k 为虚数, 波不能传播。最低截止频率 $f_1 = c/(2h)$: $h = 80 \text{ km}$ 时为 1.9 kHz 。因此频率低于最低截止频率 (约 2 kHz) 的电磁波在地面与电离层之间只能以 TEM 模传播; 无线电工程中把 $3\text{--}3000 \text{ Hz}$ 称为“极低频” (ELF), 舒曼共振 ($< 50 \text{ Hz}$) 正属于这一情形。

要点：传输线的语言

把下板与上板之间的电压记为 $U_p = E_z h$ (取绝对值的含义), 则式 (3.12) 说“单位面积电容” $C' = \varepsilon_0/h$, 式 (3.15) 说“单位方块电感” $L' = \mu_0 h$ (单位宽度、单位长度的回路中, 磁通量 $\mu_0 K h$ 与电流 K 之比)。波速 $v = 1/\sqrt{L'C'} = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = c$, 与 h 无关, 因为 h 在 L' 与 C' 中一进一出。第 7.5 节将看到: 若“电场线终止的高度”与“面电流 (磁场) 终止的高度”不同, h 就不再相消, 波速小于 c 。

4 晴天电场与地球的电荷

4.1 晴天电场

定义：晴天条件

大气电学中的“晴天”（fair weather）指测站附近没有雷暴、降水、雾、低云、扬尘和强风的天气。只有在这种条件下，测到的电场才反映全球电路，而不是附近云和降水的局地电荷。

晴天时，世界各地测到的地面电场都指向下方，大小一般在 100 V/m 到 150 V/m 之间；卡内基号在海洋上测得的年平均值约 132 V/m [3, 19]。测量用的典型仪器是场磨：一块接地的转动金属叶片周期性地遮挡下面的感应电极，感应电极上的感应电荷 $q_s = \varepsilon_0 E$ （式 (3.10)）随之周期性变化，测量感应电流即可得到 E 。

推导：地球表面的电荷

地面是导体（第 3.3 节），式 (3.10) 中 $\hat{n} = \hat{z}$ 、 $E_z = -E_0$ ，所以地面面电荷密度

$$\begin{aligned} q_s &= \varepsilon_0 E_z = -\varepsilon_0 E_0 \\ &= -8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \\ &\quad \times 130 \text{ V/m} \\ &\approx -1.15 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

假定全球晴天区都是这个值（雷暴区只占地表很小一部分），地球总电荷

$$\begin{aligned} Q_E &\approx 4\pi a^2 q_s \\ &= 5.10 \times 10^{14} \text{ m}^2 \\ &\quad \times (-1.15 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2) \\ &\approx -5.9 \times 10^5 \text{ C}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

检验：这些电荷多不多？

$1.15 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$ 相当于每平方米多出 7×10^9 个电子，每平方厘米约 7×10^5 个——与地表每平方厘米约 10^{15} 个原子相比微不足道。但 $5.9 \times 10^5 \text{ C}$ 的总电荷若集中在一点，在 1 m 外产生的场强是 $5 \times 10^{15} \text{ V/m}$ 。“大”与“小”取决于和什么比较。

4.2 稳恒电流下的电场剖面

地面带负电，上方空气导电，为什么电荷不被中和？先接受观测事实：存在向下的空地传导电流，大小约 $J \approx 1.5\text{--}3 \text{ pA/m}^2$ [19, 21]，下面取 2 pA/m^2 。本节求在已知 $\sigma(z)$ 和 J 的情况下，电场、电势和空间电荷怎样随高度分布。

假设：局地晴天天气柱

1. **稳恒**：在所关心的时间内（远大于弛豫时间 $\tau(z)$ ，见下文核对）各处电荷不随时间变化；
2. **水平均匀**： σ 、 E 只随高度 z 变化，电场与电流都竖直（测站周围几十 km 内没有雷暴，地形平坦）；
3. **平面近似**：所考虑的高度（ $\lesssim 60$ km）远小于地球半径，可以忽略地球曲率；
4. 电离层是等势导体，其电势记为 V_1 （电离层的电导率比下层大气高许多个数量级，水平方向的电势差在晴天全球电路中可以忽略；高纬地区太阳风驱动的电势差是例外，不在本讲范围）。

推导：电流不随高度变化

取一个竖直的小柱体，上下底面积 S ，分别在高度 z 与 $z+dz$ 。由于水平均匀，侧面没有电流穿过。稳恒时柱内电荷不变，所以从上底流入的电流等于从下底流出的电流： $J(z+dz)S = J(z)S$ 。因此

$$J(z) = J = \text{常数}. \quad (4.3)$$

再由欧姆定律 $E_z = -J/\sigma(z)$ （负号：电流向下），电场大小

$$E(z) = \frac{J}{\sigma(z)}. \quad (4.4)$$

电导率越大的地方电场越弱——这与“电流一定时，电阻大的地方电压降大”是同一件事。

指数剖面 先用最简单的模型：电导率从地面开始就服从式 (3.6)， $\sigma(z) = \sigma_\infty e^{z/H}$ （此时 σ_∞ 就是地面电导率）。由式 (4.4)，

$$E(z) = E_0 e^{-z/H}, \quad E_0 = \frac{J}{\sigma_\infty}. \quad (4.5)$$

高度 z 处的电势（地面为零）为 $V(z) = -\int_0^z E_z dz' = \int_0^z E(z') dz'$ ：

$$V(z) = E_0 H (1 - e^{-z/H}). \quad (4.6)$$

当 $z \gg H$ 时 V 趋于常数，这就是电离层电势

$$V_1 = E_0 H = \frac{JH}{\sigma_\infty}. \quad (4.7)$$

电势的 63% 落在最低的一个标高之内，95% 落在最低的三个标高之内；电离层的确切高度（60 km 还是 80 km）几乎不影响结果，因为那里的电场已经只剩地面的 e^{-10} 。

空间电荷 由式 (3.9) 与 $E_z = -E_0 e^{-z/H}$ ，

$$\rho(z) = \varepsilon_0 \frac{dE_z}{dz} = \frac{\varepsilon_0 E_0}{H} e^{-z/H} > 0. \quad (4.8)$$

晴天大气中有正的空间电荷，集中在最低几个标高内。它的总量（单位地面面积）为

$$\int_0^\infty \rho dz = \varepsilon_0 E_0 = -q_s,$$

恰好与地面负电荷等量。也就是说，与地球负电荷配对的正电荷主要在低层大气里，而不在电离层上。这一点在第 5.1 节讨论“地球电容器”时至关重要。

检验：数值与弛豫核对

取 $E_0 = 130 \text{ V/m}$ 、 $H = 6 \text{ km}$ ，地面附近 $\rho = \varepsilon_0 E_0 / H \approx 1.9 \times 10^{-13} \text{ C/m}^3$ ，相当于每立方厘米多出约 1.2 个正离子，而小离子总数约每立方厘米上千个：净电荷只占千分之一左右，第 3.2 节“近似电中性”的假设成立。稳恒假设要求所关心的时间远大于 $\tau(z) = \varepsilon_0 / \sigma(z)$ ；地面附近 $\tau \approx 10 \text{ min}$ ，高度越高越短，所以在小时量级上晴天气柱可视为稳恒（全球电场的日变化周期为 24 h）。

4.3 柱电阻与全球电阻**定义：柱电阻**

单位面积的竖直气柱从地面到电离层的电阻

$$R_c = \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sigma(z)} \quad (4.9)$$

称为柱电阻 (columnar resistance)，单位 $\Omega \cdot \text{m}^2$ ：面积为 S 的气柱电阻是 R_c/S （把薄层 dz 看成长 dz 、截面 S 的电阻 $dz/(\sigma S)$ ，再串联求和）。

由式 (4.4)， $V_1 = \int_0^{z_1} E dz = J \int dz/\sigma$ ，即

$$V_1 = J R_c, \quad (4.10)$$

这就是气柱的欧姆定律。对指数剖面，积分上限取到 $z \gg H$ ，

$$R_c = \frac{H}{\sigma_\infty} \left(1 - e^{-z_1/H}\right) \approx \frac{H}{\sigma_\infty}, \quad (4.11)$$

并且一半的柱电阻位于 $z < H \ln 2 \approx 0.7H$ 以下。

全球晴天区的各个气柱都连在同一个地面与同一个电离层之间，是并联的。若所有气柱相同，全球电阻

$$R = \frac{R_c}{4\pi a^2}. \quad (4.12)$$

4.4 自洽检验：三个观测量与边界层

现在有三个可以独立测量的量：地面电场 $E_0 \approx 130 \text{ V/m}$ （场磨），空地电流 $J \approx 2 \text{ pA/m}^2$ （埋在地面、与地绝缘的平板直接收集电流），电离层电势 $V_1 \approx 250 \text{ kV}$ （飞机或探空气球一路积分电场，长期平均约 240–250 kV）[11, 21]。由它们可以得到：

$$\begin{aligned} I &= 4\pi a^2 J \\ &\approx 5.1 \times 10^{14} \text{ m}^2 \\ &\quad \times 2 \times 10^{-12} \text{ A/m}^2 \\ &\approx 1.0 \text{ kA}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$R = V_1 / I \approx 250 \Omega,$$

$$R_c = V_1 / J \approx 1.25 \times 10^{17} \Omega \text{ m}^2. \quad (4.14)$$

这些数与文献给出的全球电阻（约 200–230 Ω ）、柱电阻（ $(1.2\text{--}1.7) \times 10^{17} \Omega \cdot \text{m}^2$ ）和总电流（1–2 kA）在 20% 的水平上一致 [19, 21]。

检验：纯指数剖面通不过检验

若式 (3.6) 从地面起就成立，由式 (4.7) 有 $H = V_1/E_0 = 250 \text{ kV}/(130 \text{ V/m}) \approx 1.9 \text{ km}$ ；但探空测得的自由大气电导率标高为 4–7 km（第 3.2 节 [20, 21]）。反过来，取 $H = 6 \text{ km}$ 并让 $R_c = H/\sigma_\infty = 1.25 \times 10^{17} \Omega \text{ m}^2$ ，得 $\sigma_\infty \approx 4.8 \times 10^{-14} \text{ S/m}$ ，地面电场 $E_0 = J/\sigma_\infty \approx 42 \text{ V/m}$ ，比观测值小三倍。三个观测量与“纯指数剖面”互相矛盾。

矛盾的出路是：最低 1–2 km 的大气边界层中有大量气溶胶，吸附小离子，使电导率远低于自由大气指数律的外推值（第 3.2 节）。地面电场由地面电导率决定， $E_0 = J/\sigma(0)$ ，所以 $\sigma(0)$ 小就能给出 130 V/m 左右的地面电场；而电离层电势由整个气柱决定。本讲用下面的参考模型概括这一点：

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= \sigma_\infty e^{z/H} [1 - \beta e^{-z/d}], \\ \sigma_\infty &= 5.5 \times 10^{-14} \text{ S/m}, \\ H &= 6 \text{ km}, \\ \beta &= 0.70, \quad d = 0.8 \text{ km}.\end{aligned}\tag{4.15}$$

方括号是边界层修正：地面处电导率被压低到自由大气外推值的 $1 - \beta = 30\%$ ，修正在 d 的几倍高度以上消失。参数是为了同时符合上述观测量而选取的代表值，不是某一次测量的拟合。取 $V_1 = 250 \text{ kV}$ 数值积分（脚本 `fig_profile.py`）得

$$\begin{aligned}R_c &= 1.25 \times 10^{17} \Omega \text{ m}^2, \quad J = 2.0 \text{ pA/m}^2, \\ E_0 &= J/\sigma(0) = 121 \text{ V/m}, \\ R &= 245 \Omega, \quad I = 1.02 \text{ kA},\end{aligned}$$

其中 37% 的柱电阻位于 2 km 以下。三个观测量都得到了合理的再现。（Rycroft 与 Harrison 给出的典型剖面中，一半的柱电阻位于最低 1.6 km 内 [21]；实际边界层的贡献因地而异，常比参考模型的更大。）

交互演示：改变自由大气电导率 σ_∞ 、标高 H 、边界层的减小比例 β 与厚度 d 、电离层电势 V_1 ，观察电导率、电场、电势与净电荷剖面，读出柱电阻、全球电阻、空地电流、地面电场与地面空气的弛豫时间。把 β 拖到 0 可以看到纯指数模型给出的地面电场只有约 40 V/m。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 `atmoelec-profile`）。

要点

稳恒、水平均匀的晴天气柱中： J 与高度无关； $E(z) = J/\sigma(z)$ ； $V_1 = JR_c$ ；空间电荷 $\rho = \epsilon_0 dE_z/dz$ 与地面电荷等量反号。电离层电势由整个气柱（主要是最低几个标高）决定，地面电场只由地面电导率决定。用三个独立观测量检验模型，揭示了边界层的作用。

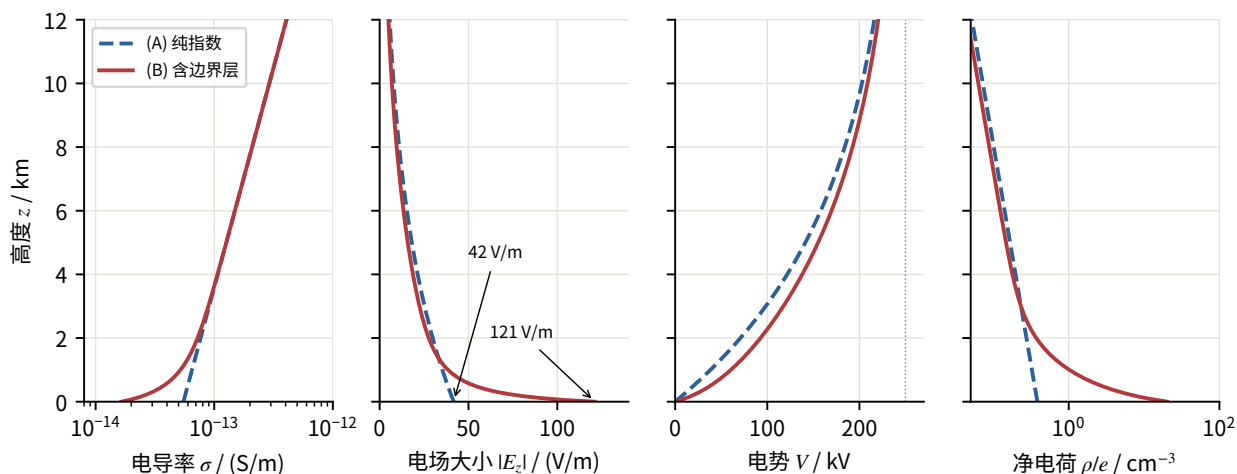


图 2 晴天大气的电导率、电场大小、电势与净电荷剖面。虚线 (A): 纯指数剖面 $\sigma_{\infty}e^{z/H}$; 实线 (B): 参考模型 (4.15) (含边界层)。两者都取 $V_I = 250 \text{ kV}$ 。边界层使地面电场从 42 V/m 升到 121 V/m , 并在最低 1–2 km 产生大得多的正空间电荷。

5 为什么需要“电池”：全球大气电路

5.1 地球–电离层“电容器”与它的放电时间

地面带负电、电离层带正电势，中间隔着空气，看起来像一个球形电容器。由式 (3.11)，若把电离层下边界取为 $z_I = 60 \text{ km}$ ，“几何电容”

$$\begin{aligned}
 C_{\text{geo}} &= \frac{4\pi\epsilon_0 a^2}{z_I} \\
 &= 1.113 \times 10^{-10} \text{ F/m} \\
 &\quad \times \frac{(6.371 \times 10^6 \text{ m})^2}{6 \times 10^4 \text{ m}} \\
 &\approx 0.075 \text{ F}.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

与 $R \approx 245 \Omega$ 相乘， $RC_{\text{geo}} \approx 18 \text{ s}$ 。照此，没有充电的话地球电荷不到一分钟就会漏光。这个估计对不对？

两个地方值得怀疑：(1) 第 4.2 节已经看到，与地面电荷配对的正电荷主要在低层大气里，并不在 60 km 高的“极板”上；(2) 电容器中间的“介质”是导电的，而且电导率随高度变化十万倍，“电阻”与“电容”不能像普通 RC 电路那样分开处理。下面直接求解。

假设：雷暴停止后的放电

设在 $t = 0$ 时全球雷暴突然全部停止。地球与电离层之间除晴天大气外再没有别的通路。大气是球对称的： $\sigma = \sigma(r)$ ，电场只有径向分量 $E_r(r, t)$ 。

推导：球对称时每一层独立弛豫

以地心为球心、半径为 r ($a < r < a + z_I$) 作球面，其内部（含地球）的总电荷记为 $Q(r, t)$ 。

1. 高斯定理（球对称）： $4\pi r^2 \epsilon_0 E_r(r, t) = Q(r, t)$ 。

2. 电荷守恒：球面内电荷的变化率等于流出球面的电流的相反数， $\frac{\partial Q}{\partial t} = -4\pi r^2 \sigma(r) E_r(r, t)$ 。（雷暴已停，没有别的电流。）

3. 把第 1 式对 t 求导，代入第 2 式，两边约去 $4\pi r^2$ ：

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \frac{\partial E_r}{\partial t} &= -\sigma(r) E_r \\ E_r(r, t) &= E_r(r, 0) e^{-t/\tau(r)}\end{aligned}\quad (5.2)$$

每一个高度上的电场都以当地的弛豫时间 $\tau(r) \equiv \varepsilon_0/\sigma(r)$ 独立衰减，与其他高度无关。用总电流（传导 + 位移）的语言说：球对称时 $4\pi r^2(\sigma E_r + \varepsilon_0 \partial_t E_r) = 0$ ，每个球面上的传导电流都被位移电流抵消。传导电流确实穿过每一个球面，但每个球面内净电荷的变化只取决于该球面处的 σ 与 E_r ，不需要把电荷从地面一路运到电离层。特别地，取 $r \rightarrow a^+$ （紧贴地面），地面电荷 $Q_E = 4\pi a^2 \varepsilon_0 E_r(a)$ 满足

$$Q_E(t) = Q_E(0) e^{-t/\tau_0}, \quad \tau_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sigma(0)} \quad (5.3)$$

在球对称模型内，地球电荷的放电时间就是地面空气的弛豫时间，与高空的电导率剖面无关。对参考模型， $\sigma(0) = 1.65 \times 10^{-14} \text{ S/m}$ ， $\tau_0 = 537 \text{ s} \approx 9 \text{ min}$ ，比朴素估计 18 s 长约 30 倍。

注：真实地球不是球对称的

实际的地面电导率随地点变化好几倍：污染的陆地约 $0.5 \times 10^{-14} \text{ S/m}$ ，洋面约 $3 \times 10^{-14} \text{ S/m}$ ，高山更大。各处气柱通过共同的电离层与地面相互耦合，放电过程是多个时间常数的叠加，“地球电荷的放电时间”因此不是一个确定的数，而是几分钟到几十分钟的一个范围。（定性思考：设陆、海两类气柱共享地面与电离层，为什么地球电荷不再按单一指数衰减？这个问题要数值求解，本讲不展开。）

定义：有效电容

就地球电荷（等价地，地面电场）而言，可以把晴天大气等效为一个电阻 R 与一个电容 C 并联（图 4(b)），电容定义为“地球电荷与稳态电离层电势之比”：

$$C \equiv \frac{|Q_E|}{V_1} = \frac{4\pi a^2 \varepsilon_0 E_0}{V_1}. \quad (5.4)$$

由 $E_0 = J/\sigma(0)$ 与 $V_1 = IR = 4\pi a^2 JR$,

$$RC = \frac{4\pi a^2 \varepsilon_0 J/\sigma(0)}{4\pi a^2 J} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma(0)} = \tau_0, \quad (5.5)$$

对任何电导率剖面都成立。参考模型给出 $C = \tau_0/R \approx 2.2 \text{ F}$ ，是几何电容的 30 倍。对纯指数剖面， $C = 4\pi a^2 \varepsilon_0 E_0/(E_0 H) = 4\pi \varepsilon_0 a^2/H$ ：等效“极板间距”是标高 H 而不是电离层高度，这正是正空间电荷集中在最低几个标高的结果。注意：这个 $R||C$ 等效只对地球电荷成立；电离层电势 V_1 是各层电场之和，它的动态不能用同一个 $R||C$ 描述（见下面的注与第 5.3 节）。

注：文献中的“地球电容”为什么不统一

文献中常见 $C \approx 0.7 \text{ F}$ 、 $RC \approx 200 \text{ s}$ 的说法，相应的地球电荷约 $-2 \times 10^5 \text{ C}$ ：Rycroft 与 Harrison 取电容器的“极板间距”为大气（密度）标高 $H \approx 7 \text{ km}$ ，得 $C = 4\pi\epsilon_0 a^2/H = 0.65 \text{ F}$ ，再由 $Q = CV_1$ 求电荷 [21]。本讲的分析说明：若电导率按 $e^{z/H}$ 增长（纯指数剖面），这个选择恰好给出 $|Q_E|/V_1$ 。而由式 (4.2) 直接用高斯定理与实测地面电场得到的地球电荷是 $-5.9 \times 10^5 \text{ C}$ 。两者相差约 3 倍，原因正是第 4.4 节的边界层：地面电场比纯指数剖面给出的大约 3 倍。本讲按式 (5.4) 定义有效电容，它与地面电荷、电离层电势两个可测量直接对应；Nicoll 转引 Chalmers (1967) 给出全球电路的弛豫时间“约 5 到 40 分钟” [20]，这个范围与各地 $\tau_0 = \epsilon_0/\sigma(0)$ 的分布范围一致。说一个“等效”量时，必须先说清它是怎样定义的。

注：电离层电势衰减得更快

式 (5.2) 还给出电离层电势 $V_1(t) = \int E dz$ 的变化。高空电导率大、弛豫快，所以 V_1 比地面电荷衰减得快，并不是单一指数。对纯指数剖面可以积分出来（例题 1）： $V_1(t)/V_1(0) = G(t/\tau_0)$ ，其中 $G(x) \equiv \int_1^\infty e^{-xs} s^{-2} ds$ （数学上称为二阶指数积分，常记作 $E_2(x)$ ，本讲为免与电场混淆记作 G ）；它在 $t = 0.27\tau_0$ 时降到一半，而地面电荷要到 $t = 0.69\tau_0$ 才降到一半。见图 3。

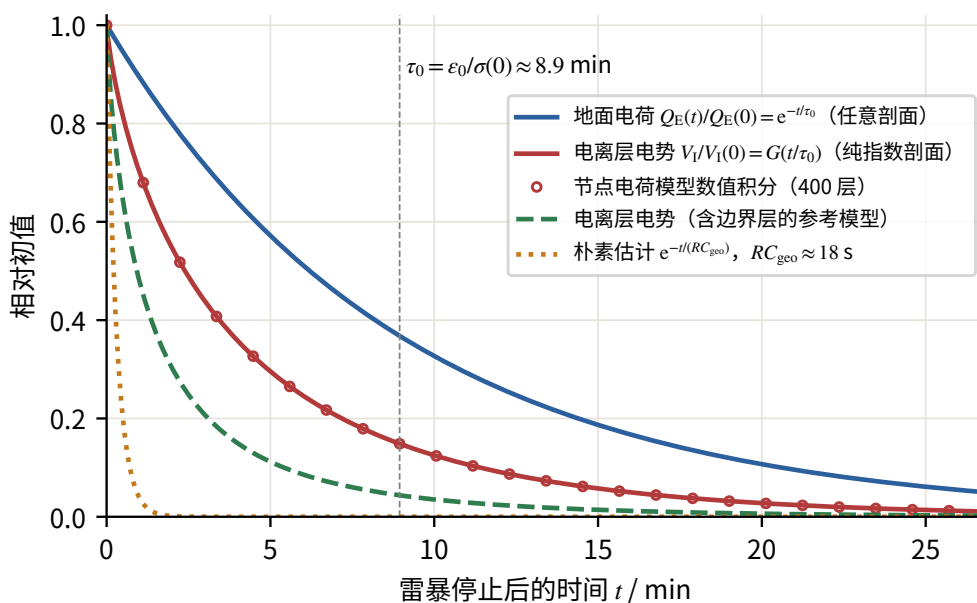


图 3 全球雷暴突然停止后的放电过程 ($\sigma(0) = 1.65 \times 10^{-14} \text{ S/m}$, $\tau_0 \approx 9 \text{ min}$)。地面电荷对任何剖面都按 e^{-t/τ_0} 衰减；电离层电势衰减更快（纯指数剖面为 $G(t/\tau_0)$ ，圆点是独立的“节点电荷”分层电路数值积分）；点线是用几何电容 0.075 F 做的朴素估计，衰减快了约 30 倍。

无论用哪种算法，结论都是：没有持续的充电，晴天电场会在几分钟到十几分钟内消失。全球需要一个平均约 1 kA 的“发电机”，功率约 $IV_1 \approx 1 \text{ kA} \times 250 \text{ kV} = 250 \text{ MW}$ 。

5.2 雷暴：全球电路的发电机

雷暴的电荷结构 典型雷暴云呈“三极”结构：云的上部带正电，中部（约 -10°C 到 -25°C 的高度）是主要的负电荷区，底部还有一个较小的正电荷区 [22]。

起电机制（定性） 目前认为最主要的是非感应起电：云中上升气流里的小冰晶与较重的霰粒（软雹）碰撞后弹开，二者之间转移电荷。实验室研究表明，在温度低于某个“反转温度”（约 -10°C ，随液态水含量而变）的区域，霰粒在碰撞中带负电、冰晶带正电，每次碰撞转移的电荷约 10^{-14} C 量级 [23, 24]。轻的冰晶被上升气流带到云顶，重的霰粒留在中部或下落，正负电荷由此在竖直方向分离。分离电荷要克服电场力做功，能量来自上升气流与重力：雷暴在这里是一台把机械能转化为电能的发电机。本讲不讨论电荷转移的微观机制。

电流回路 图 4(a) 画出了常规电流的回路：

1. 云顶的正电荷与其上方导电的高层大气之间有电场，驱动电流向上流入电离层（称为 Wilson 电流）；
2. 电离层水平导电良好，电流向全球散开；
3. 在全球晴天区，电流以空地传导电流 J 向下流回地面；
4. 地面导电，电流在地中流回雷暴下方；
5. 在雷暴下方，负电荷经云地闪电、尖端（电晕）放电、降水被输送到地面，相当于常规电流向上流回云中，回路闭合。

1948 年飞越 21 个雷暴的测量给出平均每个雷暴向上约 $0.5\text{--}0.8\text{ A}$ 的电流 [25]；近年的飞机统计给出陆地雷暴平均约 1.0 A 、海洋雷暴约 $1.6\text{--}1.7\text{ A}$ [26, 27]。全球同时活动的雷暴约一两千个（Brooks 1925 年估计为 1800 个），再加上不产生闪电的带电阵雨云，合计约 $1\text{--}2\text{ kA}$ ，与晴天区的总电流相当 [21, 25, 27]。这就是 C. T. R. Wilson 在 1920 年前后提出的全球电路假说 [8]。

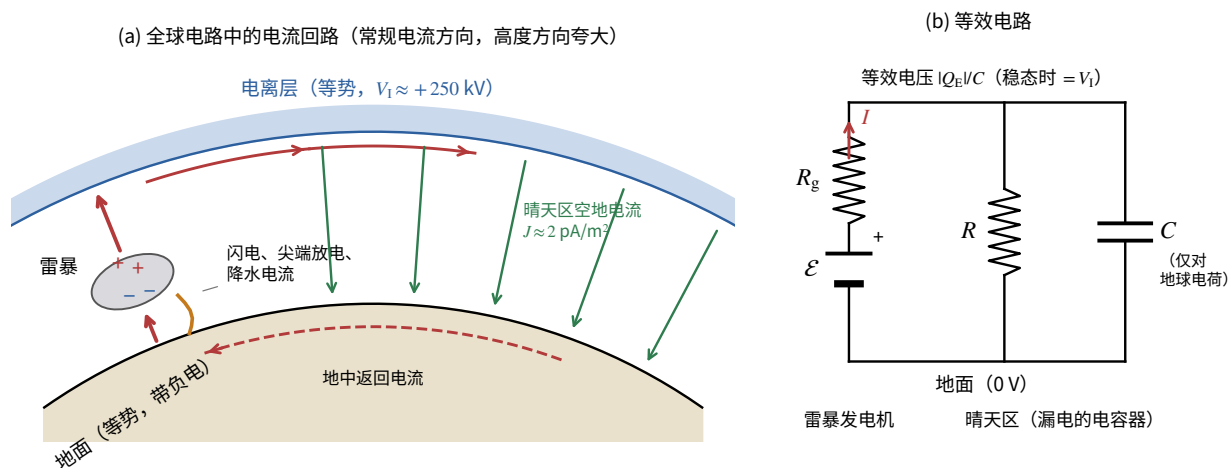


图 4 全球大气电路。(a) 常规电流的回路（示意，高度方向大大夸大；雷暴面积只占地表很小一部分）；(b) 等效电路：雷暴是电动势为 $\mathcal{E}$ 、内阻为 R_g 的发电机，晴天区是电阻 $R \approx 250\ \Omega$ 与有效电容 $C \approx 2\text{ F}$ 的并联 ($RC = \tau_0$)。这个等效只对地球电荷（地面电场）成立；电离层电势的动态要用分层模型（第 5.3 节、演示 atmoelec-circuit）。

5.3 卡内基曲线：全球同步的证据

全球电路假说最有力的证据来自海洋上的测量。卡内基号第 IV–VI 航次（1915–1921）在远离陆地污染的海面上测得的晴天电位梯度已经显示出按世界时同步的日变化；第 VII 航次（1928–1929）首次连续自动记录，把 82 个“未受扰动”的晴天按世界时（UT）平均，得到一条光滑的日变化曲线：约 3 UT 极小、约 19 UT 极大，一次谐波（定义见下）的振幅约为平均值（132 V/m）的 15% [3]。在不同大洋、不同经度上测到的曲线按世界时重合，而不是按各地的地方时重合。这条曲线被称为卡内基曲线。

定义：一次谐波

周期为 $T = 24\text{ h}$ 的日变化曲线 $x(t)$ 可以写成平均值加上周期为 T 、 $T/2$ 、 $T/3$ ……的余弦之和（傅里叶级数）。其中周期为 T 的一项称为一次谐波： $x(t) \approx \bar{x} [1 + \kappa_1 \cos(\Omega t - \phi_1)]$ ， $\Omega = 2\pi/T$ 。若曲线在 N 个等间隔时刻 t_k 取值 x_k ，则相对振幅 $\kappa_1 = \frac{2}{N\bar{x}} |\sum_k x_k e^{-i\Omega t_k}|$ ，相位 ϕ_1 等于 $\sum_k x_k e^{-i\Omega t_k}$ 的辐角的相反数，一次谐波在 $t = \phi_1/\Omega$ 取极大。它刻画了曲线“一天一起伏”的主要部分。

论证 1：按世界时同步意味着全球原因 如果电场的日变化来自当地的原因（日照、对流、污染），它应当跟随地方时；按世界时同步，说明变化的是一个全球共同的量。由第 4.4 节，地面电场 $E_0 = J/\sigma(0) = V_1/[\sigma(0)R_c]$ ；海上的 $\sigma(0)$ 、 R_c 没有按世界时同步变化的理由，所以变化的是电离层电势 V_1 ，即全球电路的“电压”。

论证 2：电路的响应是准静态的 把雷暴看作电流源 $I_g(t)$ （每个雷暴的“内阻”很大，见下面的注），它直接把正电荷从地面搬到电离层，雷暴区的面积可略。在第 5.1 节的球对称模型中加上这个电流：半径 r 的球面内的电荷除了因晴天传导电流改变，还被发电机搬走 I_g 。重复式 (5.2) 的推导（记 $E = -E_r > 0$ ，薄壳中 $4\pi r^2 \approx 4\pi a^2$ ），每一层满足

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma(z)E = J_g(t) \equiv \frac{I_g(t)}{4\pi a^2}. \quad (5.6)$$

取紧贴地面的一层，乘以 $4\pi a^2$ ，得到地球电荷 $|Q_E| = 4\pi a^2 \varepsilon_0 E_0$ 的方程

$$\frac{d|Q_E|}{dt} = I_g(t) - \frac{|Q_E|}{\tau_0}, \quad (5.7)$$

在上述球对称、雷暴为面积可略的理想电流源的模型内（ Q_E 指晴天区的地面电荷），它对任何 $\sigma(z)$ 都成立，推导中取 $r \rightarrow a^+$ ，没有用到别的近似（这正是图 4(b) 的 $R \parallel C$ 等效的含义）。卡内基曲线测的是地面电场 $E_0 \propto |Q_E|$ ，所以论证只需要这个方程。设 $I_g = \bar{I} [1 + \epsilon \cos \Omega t]$ ， $\Omega = 2\pi/(24\text{ h})$ ，把 $\cos \Omega t$ 写成 $\text{Re } e^{i\Omega t}$ ，试探稳态解 $|Q_E| = \tau_0 \bar{I} [1 + \text{Re}(\hat{\xi} e^{i\Omega t})]$ 。代入式 (5.7)，常数项自动满足， $e^{i\Omega t}$ 的系数给出 $i\Omega \tau_0 \hat{\xi} = \epsilon - \hat{\xi}$ ，即 $\hat{\xi} = \epsilon/(1 + i\Omega \tau_0)$ 。于是

$$|Q_E| = \tau_0 \bar{I} \left[1 + \frac{\epsilon \cos(\Omega t - \phi)}{\sqrt{1 + (\Omega \tau_0)^2}} \right],$$

$$\tan \phi = \Omega \tau_0.$$

$\tau_0 \approx 9\text{ min}$ ， $\Omega \tau_0 = 0.039$ ：振幅只减小 0.08%，地面电场比雷暴电流滞后 $\phi/\Omega \approx \tau_0 \approx 9\text{ min}$ 。因此在任何时刻地面电场都正比于当时的全球雷暴电流：全球电场是全球雷暴电流的实时读数。

电离层电势的滞后不同。对频率 Ω 的分量，式 (5.6) 给出每层 $E = J_g / (\sigma + i\Omega\epsilon_0)$ ，所以

$$\begin{aligned} V_I &= J_g \int \frac{dz}{\sigma + i\Omega\epsilon_0} \approx J_g \int \frac{dz}{\sigma} [1 - i\Omega\tau(z)] \\ &= J_g R_c (1 - i\Omega\tau_V), \quad \tau_V \equiv \frac{1}{R_c} \int \tau(z) \frac{dz}{\sigma(z)}, \end{aligned}$$

第二步对小量 $\Omega\tau(z) \ll 1$ 展开到一阶。 τ_V 是按各层电阻加权的平均弛豫时间， $1 - i\Omega\tau_V \approx e^{-i\Omega\tau_V}$ 表示 V_I 滞后 τ_V 。若 σ 随高度单调增加，高处的 $\tau(z)$ 都比 τ_0 短，于是 $\tau_V < \tau_0$ （例题 2 的雾层是一个反例：雾中电导率低于上方）：纯指数剖面 $\tau_V = \tau_0/2$ （例题 1），参考模型 $\tau_V \approx 128 \text{ s} \approx 2 \text{ min}$ 。两者都远小于一天，结论不变。

论证 3：与雷暴活动的日变化对比 陆地雷暴主要发生在当地午后到傍晚。美洲、非洲、亚洲的雷暴区分别位于不同经度，它们的“午后”出现在不同的世界时。1929 年 Whipple 把早期航次的卡内基曲线与 Brooks 统计的各大洲雷暴日数对比，Whipple 与 Scrase 1936 年又给出了按世界时的各大洲陆地雷暴面积 [3, 10]。按图 5(b)，非洲（约 14–15 UT）与美洲（约 19–20 UT）各贡献一个峰，两者的日平均面积几乎相等，全球雷暴面积在 13–20 UT 形成一个宽平台（最大值在 14.5 UT），在 2–3 UT（各大洲都处于夜间或清晨）最小。卡内基曲线也在 2–3 UT 最小，但极大在 19–20 UT。卡内基曲线一次谐波的极大在 17.2 UT，雷暴面积的在 16.0 UT，前者晚约 1.2 h，原始曲线的峰相差更多。这个时间差远大于电路的响应滞后（ $\tau_0 \approx 9 \text{ min}$ ，论证 2），所以不能用电路的响应时间来解释。总的形状相似：两条 24 点曲线的相关系数 $r \approx 0.94$ [3]。

这里相关系数 $r = \frac{\sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sqrt{\sum_k (x_k - \bar{x})^2 \sum_k (y_k - \bar{y})^2}}$ ， $r = 1$ 表示两条曲线经线性缩放后完全重合， $r = 0$ 表示毫无线性关系。由于相邻小时的值并不独立（日变化曲线很光滑），24 个点实际上只相当于约 5 个独立数据，Harrison 估计“两条毫无关系的光滑曲线偶然达到这样高的相关”的概率 p ：按约 4 h 持续性取 5 个独立点时 $p \approx 0.02$ ，用保持谱特征的蒙特卡洛方法时 $p < 0.01$ ，按更保守的 5 h 持续性（ $r = 0.91$ ）时 $p \approx 0.09$ [3]。相位上的差别说明，单位面积的陆地雷暴向上输送的电流因地区而异，雷暴面积并不是全球电流的精确代理；用飞机实测的雷暴电流（而不是面积）加权，并计入海洋雷暴与阵雨云，与卡内基曲线符合得更好 [27]。

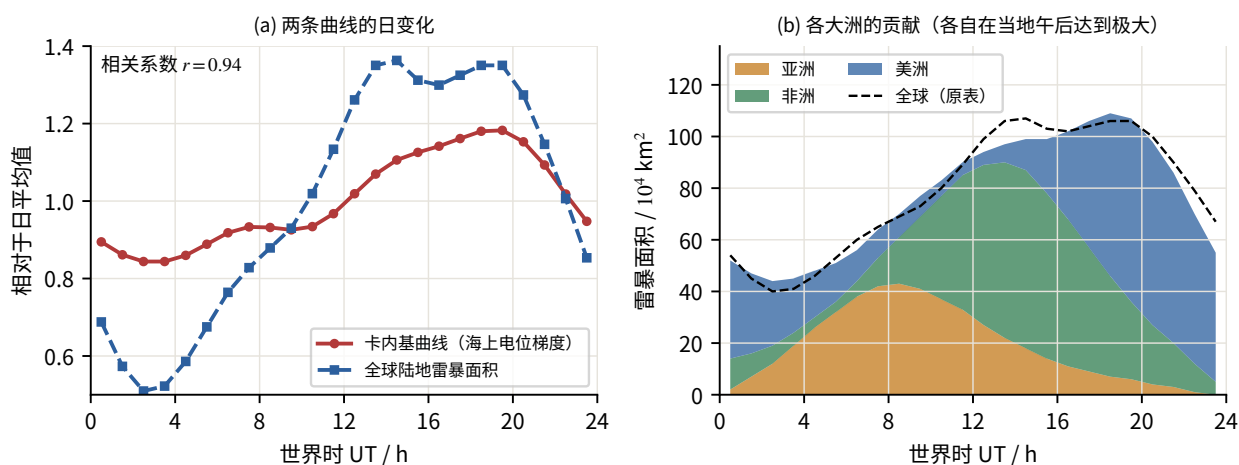


图 5 (a) 卡内基曲线（海上晴天电位梯度的年平均日变化，按世界时）与全球陆地雷暴面积的日变化，均除以各自的日平均值；(b) 雷暴面积分解为亚洲、非洲、美洲三部分（原表各列分别从原图读出，三者之和与“全球”列略有差别）。数据取自 Harrison (2013) 表 5，其中雷暴面积来自 Whipple 与 Scrase (1936) [3]。

注：振幅为什么不同

图 5(a) 中陆地雷暴面积的起伏 (约 $\pm 40\%$) 比电位梯度 (约 $\pm 15\%$) 大得多。这提示全球电流中有相当一部分来自不随陆地日变化起伏的源：海洋上的雷暴和不产生闪电的“带电阵雨云”。对飞机飞越雷暴的测量统计表明，陆地雷暴平均向上输送约 1.0 A，海洋雷暴约 1.6–1.7 A；按全球平均的雷暴与阵雨云数目估计，总电流约 2 kA，其中海洋雷暴与带电阵雨云贡献了约 45% [26, 27]。设全球电流中比例为 f_L 的部分正比于陆地雷暴面积、其余不随时间变化，则电位梯度的相对起伏约为 f_L 乘以雷暴面积的相对起伏。两条曲线一次谐波的相对振幅分别为 15.4% 与 41%，给出 $f_L \approx 0.38$ ；上面的飞机统计给出陆地雷暴约占总电流的一半。两者量级一致，差别可能来自海洋上的雷暴本身也有日变化、雷暴面积并不严格正比于电流等（脚本 `fig_carnegie.py` 与演示 `atmoelec-circuit`）。

注：为什么雷暴可以看作电流源

一个雷暴向上输送约 1 A 的电流，驱动它的是云顶电荷与电离层之间约 10^8 V 量级的电势差（第 6.1 节），等效内阻约 $10^8 \Omega$ ；一两千个雷暴并联，等效内阻约 $10^5 \Omega$ ，仍比晴天区负载 $R \approx 250 \Omega$ 大几百倍，所以电离层电势的变化几乎不影响雷暴的输出电流。这是量级论证，实际的雷暴“内阻”与云的结构有关。

交互演示：全球电路的分层模型：雷暴（电流源）的输出按 Whipple–Scrase 陆地雷暴面积随世界时变化，再加上一份不随时间变化的“海洋与阵雨云”电流（比例可调）；晴天大气用参考模型分成数百层，每层按带驱动的弛豫方程（第 5.3 节）精确地充放电。曲线为地面电场（蓝）、电离层电势（橙）与卡内基曲线（灰虚线），均按日平均值归一。读数给出两个滞后的公式值（约 $\tau_0 \approx 9$ min 与 $\tau_V \approx 2$ min），运行满 24 h 后还给出由模拟时间序列测得的值作对照。按“停止全部雷暴”可以看到地面电场以 τ_0 衰减、电离层电势衰减得更快；调节时间流速以分别观察分钟与天的时间尺度。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 `atmoelec-circuit`）。

6 闪电与安全

6.1 一次闪电的量级

最常见的对地闪电是把云中负电荷送到地面的“负地闪”。一次负地闪通常包含几次“回击” (return stroke)：先有一条弱电离的通道（先导）从云中逐级伸向地面，接地瞬间，大电流沿通道从地面向上“回击”。瑞士 San Salvatore 山顶铁塔上的直接测量（Berger 等）是闪电电流参数的主要来源 [1, 28]：

- 负地闪首次回击的峰值电流：95% 超过 14 kA，50% 超过 30 kA，5% 超过 80 kA；电流在微秒量级内升到峰值，在几十到上百微秒内衰减；
- 首次回击输送的“冲击电荷” Q 与峰值电流 I 大致满足经验关系 $I \approx 10.6 Q^{0.7}$ (I 以 kA、 Q 以 C 计)，30 kA 对应约 4 C；有些闪电在回击之后还有持续数十到数百毫秒、100–1000 A 的“连续电流”，它们输送的电荷更多 [1]。

检验：一次闪电的能量（估算）

把雷暴云的主负电荷区看作半径 $r_c \approx 1 \text{ km}$ 、电量 $Q_c \approx -20 \text{ C}$ 的球，中心高 $z_c \approx 5 \text{ km}$ 。地面是导体，用镜像电荷（电量 $-Q_c$ ，即 $+20 \text{ C}$ ，位于地下 z_c 处）求它对地的电势：

$$V_c \approx \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{2z_c} \right) \approx -1.6 \times 10^8 \text{ V}.$$

一次闪电把 $\Delta Q \approx 5 \text{ C}$ 送到地面，释放的静电能约 $\Delta Q |V_c|/2$ 到 $\Delta Q |V_c|$ ，即 $4 \times 10^8 - 8 \times 10^8 \text{ J}$ ，量级为 10^9 J 。这只是量级估计：电荷分布与 V_c 都难以直接测量；能量的大部分在通道附近变成热、光和声（雷声）。

6.2 电流在地中的扩散：半球接地模型

雷电流到达地面后向四周扩散。地面各点之间因此出现很大的电势差。

假设：半球扩散的适用条件

1. 土壤均匀，电导率 σ_s （电阻率 $\rho_s = 1/\sigma_s$ ），地面平坦，电流从地表一点注入；
2. **准静态**：电流变化足够慢，土壤中可以用稳恒电流的规律（忽略位移电流与电磁感应）。判据见下面的检验框；
3. 场强低于土壤的电离（击穿）阈值，欧姆定律成立。

推导：地电势与电场

由对称性，电流从注入点沿半径方向均匀地流向下半空间。以注入点为心、半径 r 的半球面面积为 $2\pi r^2$ ，电流全部穿过它，所以

$$J = \frac{I}{2\pi r^2}, \quad E = \frac{I}{2\pi\sigma_s r^2} \quad (6.1)$$

取无穷远处电势为零， $V(r) = \int_r^\infty E \, dr'$ ：

$$V(r) = \frac{I}{2\pi\sigma_s r} = \frac{I\rho_s}{2\pi r}. \quad (6.2)$$

这与点电荷的电势形式相同：静电学中“高斯定理 + 对称性”的论证在这里换成了“电流守恒 + 对称性”。

推导：跨步电压

人站在离雷击点 r 处，两脚沿径向分开 s 。两脚处地表的电势差称为跨步电压：

$$\begin{aligned} U &= V(r) - V(r+s) \\ &= \frac{I\rho_s}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+s} \right) \\ &= \frac{I\rho_s s}{2\pi r(r+s)}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

$s \ll r$ 时把分母中的 $r + s$ 换成 r (相对误差 s/r):

$$U \approx \frac{I \rho_s s}{2\pi r^2} = E(r) s. \quad (6.4)$$

若两脚连线与径向夹角为 φ , 则 $U \approx E(r) s \cos \varphi$: 两脚沿切向 (同一等势线上) 站立时跨步电压近似为零。

检验: 数值与准静态核对

取 $I = 30 \text{ kA}$ 、 $\rho_s = 100 \Omega \text{ m}$ 、 $r = 10 \text{ m}$ 、 $s = 0.5 \text{ m}$: $V(10 \text{ m}) = 48 \text{ kV}$, $U = 2.3 \text{ kV}$; 步距 1.5 m (牛的前后腿) 时 $U = 6.2 \text{ kV}$ 。准静态检验 (土壤 $\sigma_s = 0.01 \text{ S/m}$, 相对介电常量取 10, 雷电流的特征频率取 $f \sim 10 \text{ kHz}$): (1) 位移电流与传导电流之比 $\omega \varepsilon / \sigma_s = 2\pi \times 10^4 \times 10 \times 8.85 \times 10^{-12} / 0.01 \approx 6 \times 10^{-4} \ll 1$; (2) 电磁感应使电流趋向表面的“趋肤深度”^a $\delta = \sqrt{2/(\mu_0 \sigma_s \omega)} \approx 50 \text{ m}$, 大于所关心的几米到十几米。更直接的判据是磁场扩散过距离 r 所需的时间 $\tau_d \sim \mu_0 \sigma_s r^2$ (由脚注中的扩散系数得到): $r = 10 \text{ m}$ 时 $\tau_d \approx 1.3 \mu\text{s}$, $r = 30 \text{ m}$ 时约 $11 \mu\text{s}$ 。跨步电压的峰值出现在电流峰值附近, 首次回击电流的上升时间为 $1\text{--}10 \mu\text{s}$, 所以在十几米以内准静态半球模型基本可用, 几十米以外、或电流上升沿特别陡时, 需要考虑感应效应。

^a趋肤深度: 交变电磁场进入导体后振幅衰减到 $1/e$ 的深度。量级可以这样估计: 在导体中, 变化的磁场感应出电场 (法拉第定律), 电场驱动电流 (欧姆定律), 电流又产生磁场 (安培定律, 导体中位移电流可略), 三者合起来使磁场像热量一样“扩散”, 扩散系数 $D = 1/(\mu_0 \sigma)$ (单位 m^2/s); 在一个周期量级的时间 $1/\omega$ 内扩散的距离约 $\sqrt{D/\omega}$ 。严格解给出 $\delta = \sqrt{2/(\mu_0 \sigma \omega)}$ 。

土壤电离 雷击点附近场强极大。式 (6.1) 的 $E(r)$ 超过土壤的击穿场强 E_c (文献报道的数值在 7×10^4 到 $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ 之间, 工程上常取 $3 \times 10^5 \text{ V/m}$ [1, 29]) 的区域会发生放电、电离, 变得高度导电。电离半径

$$r_i = \sqrt{\frac{I}{2\pi \sigma_s E_c}} \approx 1.3 \text{ m} \quad (6.5)$$

($I = 30 \text{ kA}$, $\rho_s = 100 \Omega \text{ m}$)。有趣的是, $r > r_i$ 处的电场与跨步电压不受电离区影响: 半球对称下穿过半径 r 的半球面的电流仍是 I , 式 (6.1) 照样成立 (例题 3)。

交互演示: 俯视雷击点附近的地面: 红色圆为等势线。改变雷电流、土壤电阻率、到雷击点的距离和两脚连线的方向, 比较人 (步距 0.5 m 、双脚并拢) 与牛 (前后腿 1.5 m) 的跨步电压, 读出按例题 3 的人体回路模型估计的电流。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 atmoelec-step)。

安全讨论 跨步电压正比于步距、近似反比于 r^2 。所以: (1) 雷雨时在野外不要靠近孤立的高树、铁塔 (它们是雷击点, 地电势最高的地方在其根部); (2) 双脚并拢下蹲可以减小步距、降低高度, 平躺则最差 (身体沿径向的长度最大); 但并拢下蹲只能略降风险, 不能算安全措施, 美国国家气象局已不再推荐这一姿势 [30]; (3) 四足动物前后腿距离大, 而且电流路径经过胸腔, 所以地电流 (跨步电压) 常常使牛羊成群死亡; 美国国家气象局指出, 地电流是造成雷击伤亡最多的一种方式 [30, 31]。真正安全的做法是进入有接地防雷系统的建筑物或全金属车厢。

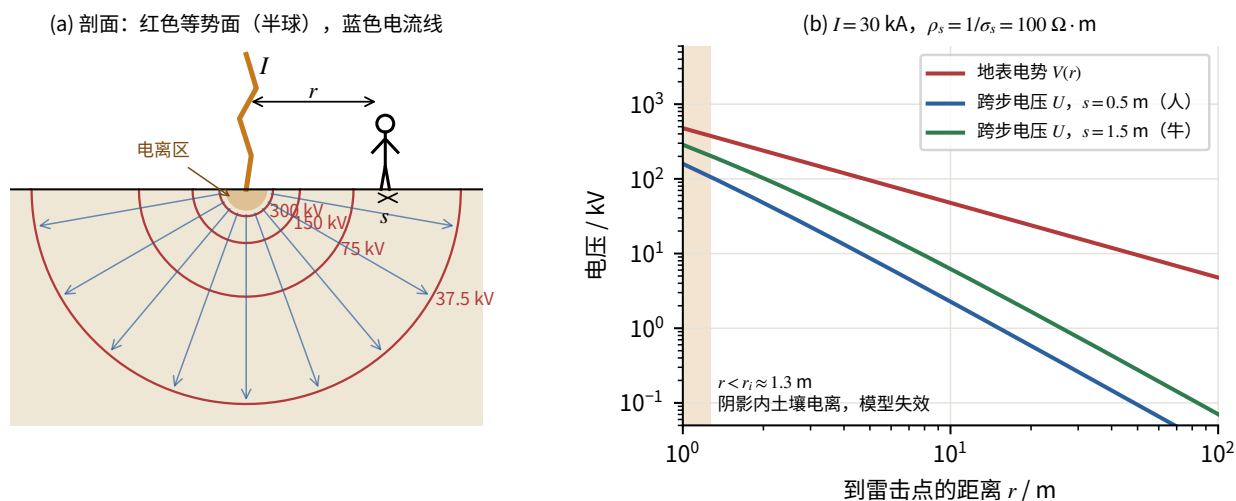


图 6 雷击点附近的地电势与跨步电压 ($I = 30 \text{ kA}$, $\rho_s = 100 \Omega \cdot \text{m}$)。(a) 剖面：等势面是以雷击点为心的半球面，电流沿半径流出，橙色为土壤电离区；(b) 地表电势与跨步电压随距离的变化，跨步电压近似按 $1/r^2$ 衰减。

6.3 尖端放电与避雷针

推导：导体曲率越大，表面场越强

用细导线连接两个相距很远的导体球（半径 r_1, r_2 ），系统带总电荷 Q 。两球等势： $Q_1/(4\pi\epsilon_0 r_1) = Q_2/(4\pi\epsilon_0 r_2)$ ，即 $Q_1/r_1 = Q_2/r_2$ 。表面场强 $E_i = Q_i/(4\pi\epsilon_0 r_i^2)$ ，所以

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1/r_1^2}{Q_2/r_2^2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (6.6)$$

小球表面的场更强，场强与曲率半径成反比。把它推广到一个形状不规则的导体（“相距很远”是为了让两球互不影响，对同一导体上相连的尖端与平坦部分只是定性推广）：尖端附近的局域场比平坦处强得多。更定量的结果：高 ℓ 、尖端曲率半径 r_t 的细长接地导体立在均匀场 E_{amb} 中，尖端场强约为 $E_{\text{amb}} \cdot (\ell/r_t)/[\ln(2\ell/b) - 1]$ ($b = \sqrt{\ell r_t}$ 为导体的半宽。把接地导体与它在地面下的镜像合起来，就是一个长 2ℓ 的孤立导体旋转椭球；上式是这个椭球在均匀场中精确解的细长极限，此处不推导，脚本核对 $\ell = 10 \text{ m}$ 、 $r_t = 1 \text{ mm}$ 时与精确解相差不到 1%)。雷暴下方地面的电场可达每米数千伏到上万伏 [28]，对 $\ell = 10 \text{ m}$ 、 $r_t = 1 \text{ mm}$ 的导体尖端，增强倍数约 2×10^3 ，局域场超过空气的击穿场强（约 3 MV/m ），尖端附近的空气被电离，产生电晕放电（夜间可见的“圣艾尔摩之火”）。

富兰克林最初希望尖头避雷针能通过持续的尖端放电“悄悄地”中和云中电荷，从而阻止闪电。后来的认识是：避雷针并不能阻止闪电（尖端放电产生的电流与雷暴的起电电流相比太小），它的作用是在下行先导接近时率先发出向上的“连接先导”，把闪电引到自己身上，再通过低电阻的引下线和接地体把电流导入大地。在一项持续七年的山顶对比观测中，尖头避雷针一次也没有被击中，而尖端直径 $12.7\text{--}25.4 \text{ mm}$ 的钝头避雷针被击中了 12 次 [32]；一种解释是尖头的电晕放电在尖端周围形成空间电荷，反而削弱了尖端附近的电场 [33]。

注：接地电阻与“地电势升高”

避雷针的接地体也可以用半球模型估算：半径 b 的半球电极的接地电阻 $R_{\text{gnd}} = V(b)/I = \rho_s/(2\pi b)$ 。 $b = 1\text{ m}$ 、 $\rho_s = 100\ \Omega\text{m}$ 时 $R_{\text{gnd}} = 16\ \Omega$ ，30 kA 的雷电流使接地体电势升高约 480 kV。所以防雷系统还必须做“等电位连接”：把建筑物内的金属管道、设备外壳都连到同一接地系统，使它们一起升高电势，彼此之间不产生危险电压。

7 舒曼共振：地球-电离层空腔的本征振动

7.1 空腔的两个导体壁

由第 3.3 节的要点，判断一种介质在频率 ω 下是导体还是绝缘体，要比较 σ 与 $\varepsilon_0\omega$ 。对 $f = 8\text{ Hz}$ ， $\varepsilon_0\omega \approx 4.4 \times 10^{-10}\text{ S/m}$ ：

- 海水 (4 S/m) 与土壤 ($10^{-3}\text{--}10^{-2}\text{ S/m}$)： $\sigma \gg \varepsilon_0\omega$ ，是导体；
- 低层大气 ($10^{-14}\text{--}10^{-11}\text{ S/m}$)： $\sigma \ll \varepsilon_0\omega$ ，是很好的绝缘体；
- 按指数律外推， $\sigma(z)$ 在约 50–60 km 处达到 $\varepsilon_0\omega$ ；再往上，电离层 D 区、E 区¹ (60–100 km) 的电导率更大，对 ELF 波是导体（但不是理想导体，第 7.5 节）。

因此地面与电离层下边界构成一个厚 $h \approx 60\text{--}90\text{ km}$ 的球壳空腔， $h/a \approx 0.01$ 。由第 3.6 节，频率低于约 2 kHz 时腔内只能存在 TEM 型的波：电场径向（竖直），磁场水平。

7.2 粗估：绕地球一周的驻波

若波沿某个大圆传播，绕地球一周（周长 $2\pi a$ ）回到出发点时相位应当衔接，类似于圆环上的驻波： $2\pi a = n\lambda_w$ （ λ_w 为波长， λ 留作下文的本征值），

$$f_n^{\text{环}} = \frac{nc}{2\pi a} = n \times 7.49\text{ Hz} \quad (7.1)$$

($n = 1, 2, \dots$)。这已经给出了正确的量级。但球面不是圆环：从一点发出的波沿所有大圆同时传播，在对跖点汇聚，再散开……下面用薄壳上的波动方程求出准确的本征频率。

7.3 薄球壳上的波动方程

假设：理想薄壳空腔

1. 地面（半径 a ）与电离层（半径 $a + h$ ）都是理想导体，中间为真空；
2. 薄壳： $h \ll a$ ，且 $h \ll \lambda_w$ （波长约 $2\pi a/n$ 的量级， $h/\lambda_w \lesssim 0.01$ ），所以电场 E_r 在 r 方向上近似均匀，局部可以用第 3.6 节的平行板结果；
3. 只考虑轴对称的场：以源点（如一次闪电）为“北极”建立球坐标，场只依赖于余纬 θ （到

¹电离层按高度和电离机制分为 D 区（约 60–90 km）、E 区（约 90–150 km）和 F 区（150 km 以上），越往上电子密度越大；D 区在夜间基本消失。

源点的角距离) 和时间 t 。

在地表一点, 局部取 $\hat{z} \rightarrow \hat{r}$ (向上)、 $\hat{x} \rightarrow \hat{\theta}$ (沿经线向南, 即离开源点的方向)、 $\hat{y} \rightarrow \hat{\varphi}$ (向东); 这组方向与 x, y, z 一样构成右手系 ($\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\varphi}$ 对应 $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$)。沿经线方向的弧长 $ds = a d\theta$ 。

推导：把平行板的四个方程搬到球面上

1. 高斯定理 (同式 (3.12)): 地表面电荷 $q(\theta, t) = \varepsilon_0 E_r(\theta, t)$ 。
2. 电荷守恒 (式 (3.13) 的球面版): 地表沿经线方向的面电流 $K_\theta(\theta, t)$ 。取余纬在 θ 到 $\theta + d\theta$ 之间的一条环带, 它的面积是 $2\pi a \sin \theta \cdot a d\theta$; 穿过余纬 θ 的纬线圈 (周长 $2\pi a \sin \theta$) 向南流出的电流是 $I(\theta) = 2\pi a \sin \theta K_\theta$ 。环带上电荷的变化率等于流入减流出:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} 2\pi a^2 \sin \theta d\theta &= -[I(\theta + d\theta) - I(\theta)] \\ &= -2\pi a \frac{\partial(\sin \theta K_\theta)}{\partial \theta} d\theta, \end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial_\theta(\sin \theta K_\theta)}{a \sin \theta} \quad (7.2)$$

与平面情形相比多出的 $\sin \theta$ 因子来自纬线圈周长随 θ 变化: 同样的面电流, 在赤道附近要“铺”到更长的圆周上。

3. 面电流与磁场 (同式 (3.14)): $B_\varphi = -\mu_0 K_\theta$ 。
4. 法拉第定律 (同式 (3.15), 回路取在子午面内, 水平边长 $a d\theta$): $\frac{1}{a} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial K_\theta}{\partial t}$ 。

推导：消去面电流

把第 1 式代入式 (7.2) 并对 t 求导: $\varepsilon_0 \partial_t^2 E_r = -\frac{1}{a \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_t K_\theta)$ 。由第 4 式, $\partial_t K_\theta = -\partial_\theta E_r / (\mu_0 a)$, 代入:

$$\frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{\partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta E_r)}{\sin \theta} \quad (7.3)$$

检验：平面极限

在源点附近 $\theta \ll 1$ 的一小块区域之外、又远离两极的地方 ($\sin \theta$ 在所考虑的范围内近似不变), 右边化为 $\frac{c^2}{a^2} \partial_\theta^2 E_r = c^2 \partial_s^2 E_r$ ($s = a\theta$), 回到一维波动方程 (3.16)。量纲: θ 无量纲, c^2/a^2 的单位是 s^{-2} , 两边一致。

右边的算符 $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta})$ 是单位球面上的拉普拉斯算子 (轴对称部分): 它是“一维的二阶导数”在球面上的推广, 多出来的 $\sin \theta$ 记录了纬线圈周长的变化。

7.4 本征频率与勒让德多项式

寻找“驻波”解：所有点同步振动， $E_r(\theta, t) = F(\theta) \cos \omega t$ 。代入式 (7.3)，两边约去 $\cos \omega t$ ：

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dF}{d\theta} \right) = -\lambda F, \quad (7.4)$$

$$\lambda \equiv \frac{\omega^2 a^2}{c^2}.$$

这是一个本征值问题：只有某些 λ 值才有物理上可以接受的解。可以接受的条件是： $F(\theta)$ 在整个球面上有限，特别是在 $\theta = 0$ （源点）和 $\theta = \pi$ （对跖点）两个“极点”处有限。

要点：本征值是 $n(n+1)$

令 $x = \cos \theta$ 。由链式法则 $\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$ ，所以 $\sin \theta \frac{dF}{d\theta} = -\sin^2 \theta \frac{dF}{dx} = -(1-x^2) \frac{dF}{dx}$ ；再作用一次 $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} = -\frac{d}{dx}$ ，得 $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{dF}{d\theta}) = \frac{d}{dx} [(1-x^2) \frac{dF}{dx}]$ 。于是式 (7.4) 化为勒让德方程

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dF}{dx} \right] + \lambda F = 0, \quad (7.5)$$

其中 $-1 \leq x \leq 1$ 。它在 $x = \pm 1$ 两处都有限的解存在，当且仅当

$$\lambda = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.6)$$

此时的解是 n 次多项式 $P_n(x)$ ，称为勒让德多项式： $P_0 = 1$ ， $P_1 = x$ ， $P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ ， $P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ ，……（证明见附录 A：把 F 展开成幂级数，系数的递推关系表明，除非级数在某一截断，否则它在 $x = \pm 1$ 处像 $\ln(1 \mp x)$ 一样发散；截断的条件正是 $\lambda = n(n+1)$ 。）

检验：直接代入核对

$n = 1$: $F = \cos \theta$ ， $\sin \theta F' = -\sin^2 \theta$ ， $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (-\sin^2 \theta) = -2 \cos \theta = -2F$ ， $\lambda = 2 = 1 \times 2$ 。
 $n = 2$: $F = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$ ，同样的计算给出 $-6F$ ， $\lambda = 6 = 2 \times 3$ 。 $n = 0$: $F = 1$ ， $\lambda = 0$ 。（脚本 `verify_sympy.py` 对 $n = 0-6$ 逐一核对；`fig_modes.py` 用有限体积法数值求解式 (7.4) 的本征值，得 0, 2, 6, 12, 20.0, 30.0, 42.0；`verify_schumann.py` 不用勒让德多项式，直接在时域积分波动方程 (7.3)，得到的谱峰与 $\sqrt{n(n+1)}c/(2\pi a)$ 相差不到 0.1%。）

由 $\lambda = \omega^2 a^2 / c^2 = n(n+1)$ ，得理想球壳空腔的本征频率

$$f_n = \frac{c}{2\pi a} \sqrt{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.7)$$

第 n 个模式的电场分布为 $E_r \propto P_n(\cos \theta) \cos \omega_n t$ ，在 $P_n(\cos \theta) = 0$ 的 n 条纬线上始终为零（节线），见图 7。

三点物理解释

1. $n = 0$ 分量与全球电路。 $n = 0$ 对应 $F = \text{常数}$ 、 $\omega = 0$ ：全球均匀的竖直电场，即带电的球形电容器。在无损空腔中它不能以非零频率振动，因为 E_r 处处同步变化意味着地球总电荷 $\propto \oint E_r dA$ 在变，而面电流在闭合球面上的“净流出”为零，地球电荷守恒。计入下层空气的电导后，这个分量也不振荡，而是按各层的 $\tau(z)$ 弛豫，正是第 5.1 节的放电过程；直流全

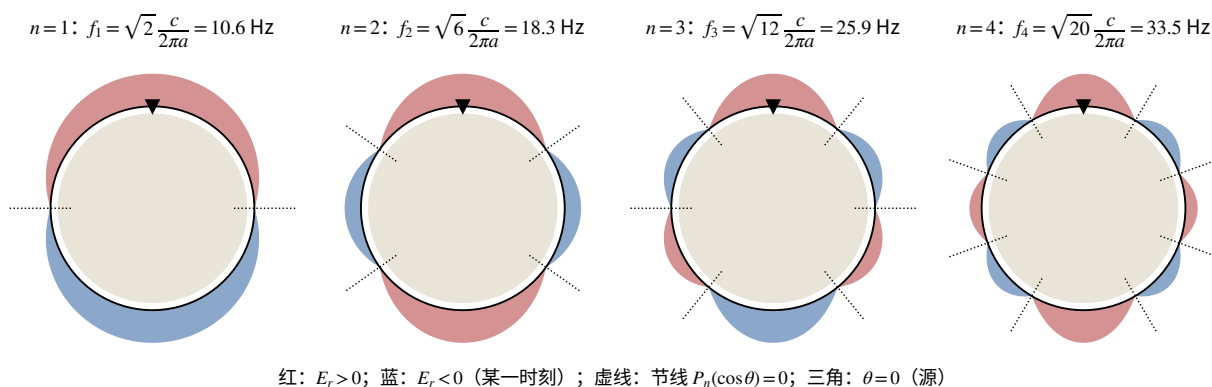


图 7 理想地球-电离层空腔中前四个轴对称模式的垂直电场分布 (子午面截面)。n 阶模式有 n 条节线; 频率按式 (7.7) 计算。

球电路就是这个分量在雷暴持续“供电”下的稳态。附录 B 式 (B.1) 的 $n = 0$ 项也说明了这一点：一次闪电把电荷 ΔQ 从地面送上去，使全球均匀场阶跃式地改变 $\Delta Q / (4\pi\epsilon_0 a^2)$ 。直流的全球电路和交流的舒曼共振是同一个空腔的两种工作方式（直流时下层空气的漏电起作用，交流时它是绝缘体）。

2. 为什么是 $\sqrt{n(n+1)}$ 而不是 n 。大 n 时 $\sqrt{n(n+1)} = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{8n} + \dots$ ，比圆环估计 (7.1) 多出“半个波长”。可以这样理解：球面上的波每绕行一周都要穿过源点和对跖点两个汇聚点，二维的波每经过一个汇聚点相位多出 $\pi/2$ （与光通过焦点时的 Gouy 相移类似），一周共多出 π ，相当于半个波长。这只是对大 n 渐近行为的直观解释，准确结果以式 (7.7) 为准。
3. 简并。不轴对称的模式（场还依赖于经度 φ ）满足更一般的方程，其本征值仍是 $n(n+1)$ ：每个 n 有 $2n+1$ 个频率相同的模式。一次闪电只激发以它为“北极”的轴对称模式，所以上面的讨论已经够用。

7.5 理想值与观测值：电离层是有损耗的壁

前置知识：频谱、幅度谱与共振峰的宽度

一个随时间变化的信号 $x(t)$ 可以分解为不同频率的正弦振动之和（傅里叶分析）。把各频率成分的振幅画成频率的函数，就是幅度谱 $|X(f)|$ ；振幅的平方（正比于功率）画成频率的函数，就是功率谱。对持续存在的随机噪声，带宽 Δf 内的功率正比于 Δf ，所以用“每赫兹的功率”（功率谱密度）描述，它的平方根即“幅度谱密度”，单位写成“信号单位 / $\sqrt{\text{Hz}}$ ”，如磁场的 $\text{pT}/\sqrt{\text{Hz}}$ 。一个阻尼振子受激时，功率谱在共振频率 f_n 附近形成一个峰；功率降到峰值一半（幅度降到 $1/\sqrt{2}$ ）处两点之间的宽度称为半功率全宽 Δf_n 。品质因数 $Q_n \equiv f_n / \Delta f_n$ ： Q_n 越大峰越尖，自由振荡衰减得越慢（振幅衰减率 $\pi \Delta f_n$ ，推导见附录 B）。

观测到的频率比理想值低约 20%–26%，且 $n = 1-4$ 的“观测/理想”比值随 n 缓慢增大（第 5 个模式的观测值较粗，不计）；谱峰很宽（图 9），实测半功率全宽约为峰频的 20%，即品质因数约为 5（理想导体壁的空腔品质因数趋于无穷）[35]。原因都在于电离层并不是理想导体。

表 2 舒曼共振：理想薄壳空腔的频率 (7.7) ($a = 6371 \text{ km}$) 与观测值 (前三个取 Balser 与 Wagner 1960 年的首次测量, 第 4、5 个取近年多台站测量的近似值) [13, 14, 34]

n	$\sqrt{n(n+1)}$	圆环估计 $nc/(2\pi a) / \text{Hz}$	理想 f_n / Hz	观测 f_n / Hz	观测/理想
1	1.414	7.5	10.6	7.8	0.74
2	2.449	15.0	18.3	14.1	0.77
3	3.464	22.5	25.9	20.3	0.78
4	4.472	30.0	33.5	≈ 27	≈ 0.81
5	5.477	37.5	41.0	≈ 32	≈ 0.78

电离层的“下边界”在哪里 电导率随高度连续增大, 没有一个截然的边界。对竖直电场来说, “导体”从 $\sigma(z)$ 与 $\varepsilon_0\omega$ 可比的高度开始: 在它下面, 竖直方向的位移电流 $\varepsilon_0\partial_t E$ 比传导电流大, 空气像电容器的介质; 在它上面, 传导电流占优, 电场线在这里“终止”。定义电高度

$$\sigma(h_e) = \varepsilon_0\omega. \quad (7.8)$$

若把指数律 $\sigma_\infty e^{z/H}$ ($\sigma_\infty = 5.5 \times 10^{-14} \text{ S/m}$, $H = 6 \text{ km}$) 外推上去, $h_e = H \ln(\varepsilon_0\omega/\sigma_\infty) \approx 54 \text{ km}$ ($f = 8 \text{ Hz}$)。这只是粗略的外推: 实际剖面在 60 km 附近有一个“拐折”, 文献给出 $\sigma = \varepsilon_0\omega$ 的高度约 $60\text{--}70 \text{ km}$ [14]。附录 C 还用另一种方式定义了一个复数的“等效电高度” $\tilde{h}_e$ (记号带波浪号以示区别), 并证明对指数剖面 (在 $h_e \gg H$ 的条件下) $\tilde{h}_e \approx h_e + i\pi H/2$: 实部就是式 (7.8) 的 h_e , 虚部代表损耗。

另一方面, 水平的面电流 (以及它们之间的水平磁场) 能够上到更高的地方: 只有当电离层的电导率大到使电磁场在其中的趋肤深度小于电导率变化的特征长度时, 水平电流才被“关”在下面。这个高度称为磁高度 h_m [36], 位于 $90\text{--}100 \text{ km}$ 附近的电离层 D、E 区 (那里的电导率白天约 10^{-3} S/m 、夜间约 10^{-6} S/m [14])。

推导：两高度传输线模型

回到第 3.6 节“传输线的语言”: 单位面积电容由电场线终止的高度决定, $C' = \varepsilon_0/h_e$; 单位方块电感由面电流 (磁场) 所占的高度决定, $L' = \mu_0 h_m$ 。正弦波的波峰沿传播方向前进的速度称为相速度 $v = \omega/k$, 于是

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = c\sqrt{\frac{h_e}{h_m}},$$

$$f_n \approx \frac{v}{2\pi a} \sqrt{n(n+1)}. \quad (7.9)$$

取 $h_e \approx 55 \text{ km}$ 、 $h_m \approx 95 \text{ km}$, $v/c \approx 0.76$, $f_1 \approx 8.1 \text{ Hz}$, 与观测的 7.8 Hz 接近; 要得到 7.8 Hz , 需要 $h_m/h_e \approx 1.85$, 例如 $h_e \approx 50 \text{ km}$ 、 $h_m \approx 92 \text{ km}$ 。式 (7.9) 就是 Greifinger 两高度近似的实部 [36]; 把 h_e 、 h_m 看成复数 (附录 C) 就同时得到频率与衰减。

注：色散与品质因数

相速度随频率变化的现象称为色散。(1) 由式 (7.8), 频率越高 h_e 越高 (对指数剖面 h_e 随 $\ln \omega$ 增加), 而频率越高趋肤深度越小、 h_m 越低, 所以 h_e/h_m 随频率增大, 高阶模的“观测/理想”

比值更接近 1，这正是表 2 最后一列的趋势（例题 4 做定量估计）。(2) 在 h_e 附近，传导电流与位移电流可比，电场在这里推动电荷做功并转化为热；在 h_m 附近，感应电流也产生焦耳热。这两部分损耗使 $Q_1 \approx 4-5$ 。地面的损耗小得多：8 Hz 时海水的趋肤深度只有约 90 m，地面对这一频段近似为理想导体。附录 C 估计了电高度附近损耗单独给出的 Q 。

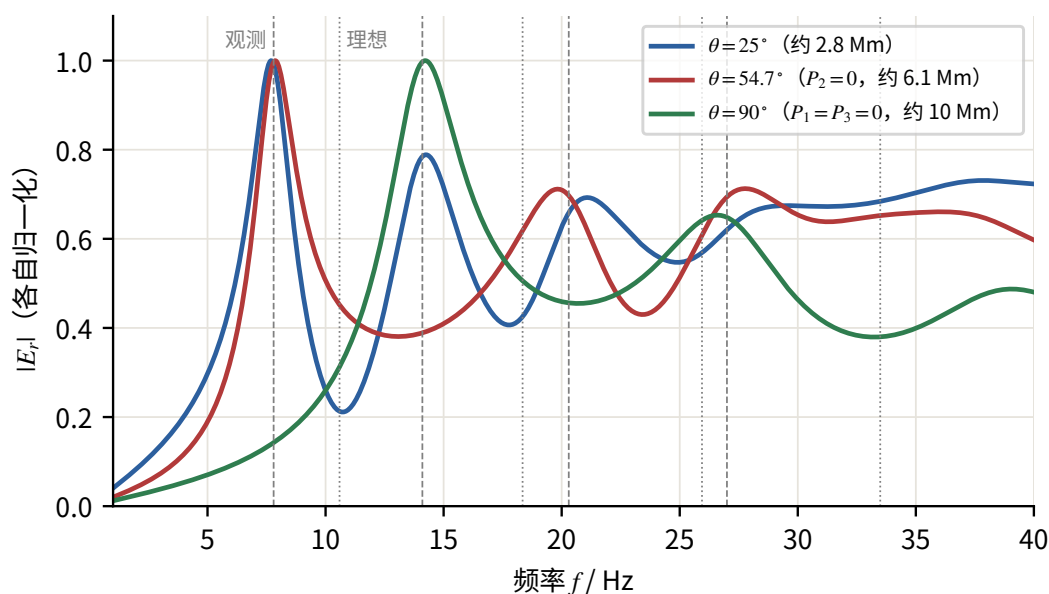


图 8 一次闪电 ($\theta = 0$) 在不同角距离 θ 处激发的垂直电场幅度谱（模式求和，附录 B；取观测频率与 $Q_n = 4.5$ ，示意）。点线：理想频率；虚线：观测频率。 $\theta = 54.7^\circ$ 处 $P_2 = 0$ ，第二个峰消失； $\theta = 90^\circ$ 处 $P_1 = P_3 = 0$ ，第一、第三个峰消失。

7.6 舒曼共振的用途

卫星光学观测给出全球平均每秒约 44 次闪电 (44 ± 5 次/秒)，陆地上的闪电约为海洋上的 10 倍 [15, 16]。每一次闪电都向空腔注入一个宽频带的电流脉冲。这些随机脉冲叠加，在任意一个远离人为干扰的测站都能测到连续的、带有舒曼共振峰的极低频噪声谱，多国引力波探测器旁的磁强计测得的水平磁场幅度谱密度约为 $0.5-1 \text{ pT}/\sqrt{\text{Hz}}$ ，在约 8、14、20、26 Hz 处有宽峰，谱宽约为峰频的 20% [34, 35]。图 9 是用本讲的模型计算的水平磁场“背景谱”，峰位约 7.8、14.0、20.4、26.8 Hz。第一模式的振幅衰减时间 $2Q_1/\omega_1 \approx 0.2 \text{ s}$ ，与绕地球一周所需的约 0.18 s 相当，所以一次闪电的信号能传遍全球，一个测站就能“听到”全球的闪电：

- 共振峰的强度随全球雷暴活动起伏。全球雷暴主要集中在热带三大“烟囱”（美洲、非洲、东南亚-澳洲海洋大陆），因此舒曼共振强度的日变化与卡内基曲线同源；Williams 据此提出用舒曼共振监测全球热带温度 [17]；
- 不同模式的相对强度取决于源到测站的角距离 θ （因子 $P_n(\cos \theta)$ ，图 8），可以用来估计强闪电的距离（例题 4）；
- 引力波探测器相距数千公里的磁强计测到的舒曼共振是相关的，它是探测随机引力波背景时必须扣除的“全球相关噪声” [34, 35]。

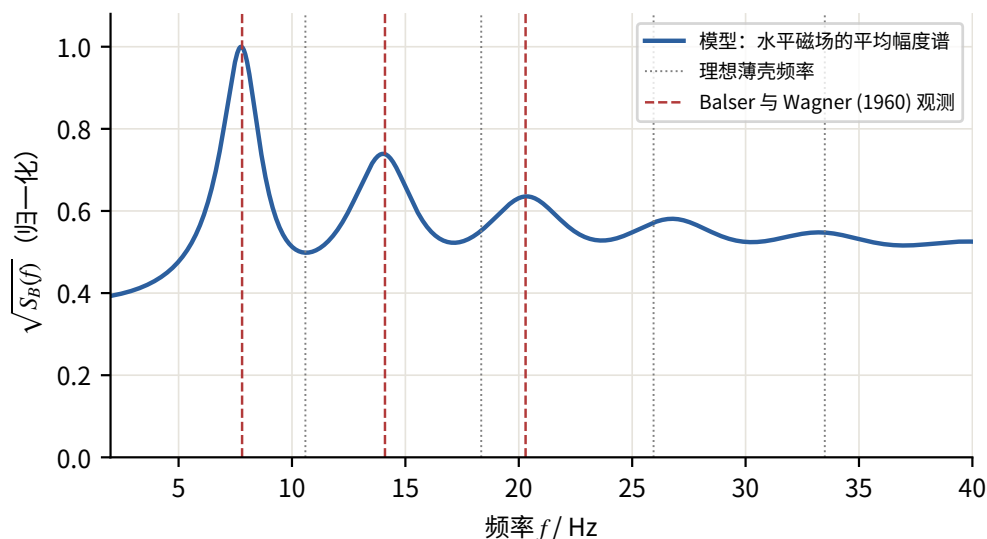


图 9 模型计算的舒曼共振水平磁场“背景谱”：闪电在球面上均匀随机分布、彼此独立，对源位置平均后水平磁场的功率谱 $S_B(f) \propto \sum_{n \geq 1} n(n+1)(2n+1) / |\omega_n^2 - \omega^2 + i\omega\omega_n/Q_n|^2$ (附录 B; $n=0$ 项对水平磁场没有贡献); 模式频率用例题 4 的两高度色散模型自洽算出, $Q_n = 4.5$ 。点线：理想薄壳频率；虚线：Balser 与 Wagner (1960) 的观测频率 [13]。

交互演示：上图：在“北极”给一个局域的竖直电场扰动（一次强闪电），按模式求和得到的场在子午面上的演化（时间放慢 30 倍）：脉冲向南扩展、在对跖点汇聚、再返回，同时因损耗逐渐衰减；也可以单独查看某个模式的驻波。下图：观测点（绿点）处的幅度谱。模式频率可选“两高度模型”（按例题 4 自洽计算，含色散，可调磁高度）或“固定相速度比 v/c ”（无色散）；读数给出频率比 f_2/f_1 、 f_3/f_1 ，与观测比较。改变品质因数与观测点到源的角距离，观察峰宽与某些模式的消失。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 atmoelec-schumann）。

8 决赛风格例题

例题 1：地球电容器的放电与日变化中的两种滞后

把地球（半径 $a = 6371$ km）与电离层之间的大气看作球对称的导电介质，电导率只随高度变化： $\sigma = \sigma(z)$ 。稳态时全球雷暴提供的总电流为 I ，晴天地面电场为 E_0 ，地面电导率 $\sigma(0) = 1.65 \times 10^{-14}$ S/m。

1. 一个电容器两极板之间充满电导率为 σ 的均匀介质（极板形状任意）。证明它的电阻 R 与电容 C 满足 $RC = \epsilon_0/\sigma$ ，与几何形状无关。
2. $t = 0$ 时雷暴全部停止。证明地球电荷按 e^{-t/τ_0} ($\tau_0 = \epsilon_0/\sigma(0)$) 衰减，与 $\sigma(z)$ 在高空如何变化无关，并求减半所需的时间。
3. 设 $\sigma(z) = \sigma(0)e^{z/H}$ ，稳态电离层电势为 V_0 。证明雷暴停止后 $V_1(t) = V_0 G(t/\tau_0)$ ， $G(x) = \int_1^\infty s^{-2} e^{-xs} ds$ ；已知 $G(x) = \frac{1}{2}$ 的解为 $x = 0.267$ ，求 V_1 减半的时间，并解释它为什么比地球电荷衰减得快。
4. (日变化) 现在雷暴不停止，全球雷暴电流按 $I_g(t) = \bar{I}[1 + \epsilon \cos \Omega t]$ 变化， $\Omega = 2\pi/(24 \text{ h})$ ，

$\epsilon \ll 1$ 。仍取 (3) 的纯指数剖面。

(a) 写出每一层电场满足的方程 (提示: 总电流守恒)。

(b) 求地面电场的振荡相对于 I_g 的滞后时间。

(c) 求电离层电势振荡的复振幅 (用 $\eta = \Omega\tau_0$ 表示的闭式), 并求它的滞后时间; 在 $\eta \ll 1$ 时化简, 与 (b) 比较。

5. 某同学取电离层高度 60 km, 用式 (5.1) 的几何电容与全球电阻 245Ω 估计放电时间为 18 s。指出这一估计错在哪里, 并说明在纯指数剖面下 “等效极板间距” 是多少。

解答

(1) 设极板间电压 U , 正极板带电 Q 。取包住正极板的闭合面 Σ (全在介质中)。由高斯定理 $\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q/\epsilon_0$; 由欧姆定律, 流出 Σ 的电流 $I = \oint \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \sigma Q/\epsilon_0$ 。于是 $R = U/I = \epsilon_0 U/(\sigma Q) = \epsilon_0/(\sigma C)$, 即 $RC = \epsilon_0/\sigma$ 。【关键: 同一个通量 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ 同时决定了电荷与电流, 几何因素在比值中消去; 要求 σ 在 Σ 上处处相同。】

(2) 按第 5.1 节的推导, 各层独立弛豫, $E(z, t) = E(z, 0)e^{-\sigma(z)t/\epsilon_0}$ 。取紧贴地面的一层: $|Q_E| = 4\pi a^2 \epsilon_0 E(0, t) \propto e^{-t/\tau_0}$ 。这与 (1) 是同一个论证, 只是 “闭合面” 取在了电导率为 $\sigma(0)$ 的那一层。 $\tau_0 = 537 \text{ s}$, 减半时间 $\tau_0 \ln 2 = 372 \text{ s} \approx 6.2 \text{ min}$ 。

(3) $V_1(t) = \int_0^\infty E(z, t) dz = \int_0^\infty \frac{J}{\sigma(0)} e^{-z/H} \exp\left[-\frac{t}{\tau_0} e^{z/H}\right] dz$ 。换元 $s = e^{z/H}$, $dz = H ds/s$, $e^{-z/H} = 1/s$:

$$V_1(t) = \frac{JH}{\sigma(0)} \int_1^\infty \frac{e^{-st/\tau_0}}{s^2} ds = V_0 G(t/\tau_0),$$

其中用到了 $V_0 = JH/\sigma(0)$ (式 (4.7))。减半时间 $0.267\tau_0 = 143 \text{ s} \approx 2.4 \text{ min}$, 比地球电荷的减半时间短得多。原因: V_1 是各层电场之和, 高处的层电导率大、弛豫快, 它们的贡献先消失; 只有最低一层的电场 (它决定地面电荷) 以最慢的 τ_0 衰减。(数学上 $G(x) = e^{-x} - xE_1(x)$, $E_1(x) = \int_x^\infty e^{-u} u^{-1} du \approx -\gamma - \ln x$, $\gamma = 0.5772$, 故小 x 时 $G(x) \approx 1 + x \ln x + (\gamma - 1)x$, 斜率 $\ln x$ 在 $x \rightarrow 0$ 时趋于 $-\infty$: 开始时下降得极快。)

(4) (a) 雷暴把正电荷从地面直接搬到电离层, 按第 5.3 节式 (5.6), 每层 $\epsilon_0 \partial_t E + \sigma(z)E = J_g(t) = I_g/(4\pi a^2)$ 。

(b) 只看振荡部分, 写成复数: $J_g \rightarrow \hat{J}e^{i\Omega t}$, $E \rightarrow \hat{E}(z)e^{i\Omega t}$, 代入得 $\hat{E}(z) = \hat{J}/(\sigma(z) + i\Omega\epsilon_0)$ 。地面 $\hat{E}_0 = \hat{J}/[\sigma(0)(1 + i\eta)]$, 相位落后 $\arctan \eta$, 滞后时间 $\arctan(\eta)/\Omega \approx \tau_0 = 537 \text{ s} \approx 8.9 \text{ min}$ ($\eta = \Omega\tau_0 = 0.039$)。

(c) $\hat{V} = \int_0^\infty \hat{E} dz = \hat{J} \int_0^\infty \frac{dz}{\sigma(0)e^{z/H} + i\Omega\epsilon_0}$ 。同样换元 $s = e^{z/H}$, 并用 $\Omega\epsilon_0 = \eta\sigma(0)$:

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \frac{\hat{J}H}{\sigma(0)} \int_1^\infty \frac{ds}{s(s + i\eta)} \\ &= \frac{\hat{J}H}{\sigma(0)} \cdot \frac{1}{i\eta} \left[\ln \frac{s}{s + i\eta} \right]_1^\infty \\ &= \hat{V}_0 \frac{\ln(1 + i\eta)}{i\eta}, \end{aligned}$$

$\hat{V}_0 = \hat{J}H/\sigma(0)$ 是直流响应。 $\eta \ll 1$ 时 $\ln(1 + i\eta) = i\eta + \frac{1}{2}\eta^2 + \mathcal{O}(\eta^3)$, 所以 $\hat{V} \approx \hat{V}_0(1 - \frac{i\eta}{2}) \approx \hat{V}_0 e^{-i\eta/2}$: 电离层电势滞后 $\tau_0/2 = 268 \text{ s} \approx 4.5 \text{ min}$, 是地面电场滞后的一半, 振幅只减小约

3×10^{-4} (脚本核对)。这就是第 5.3 节 $\tau_V = \tau_0/2$ 的来历：一个 $R\|C$ 电路不可能同时给出这两个滞后。【关键：逐层复阻抗 $1/(\sigma + i\Omega\epsilon_0)$ ；换元积分；小 η 展开。】

(5) 错误在于把电容器的“正极板”放在了电离层上。由式 (4.8)，与地面负电荷配对的正电荷是低层大气中的空间电荷，集中在几个标高以内；而且介质的电导率不均匀，(1) 的结论不能直接套用。就地球电荷而言，正确的有效电容（式 (5.4)）对纯指数剖面为 $4\pi\epsilon_0 a^2/H$ ，“等效极板间距”是标高 $H \approx 6\text{ km}$ 而不是 60 km ；配合式 (5.5)，放电时间回到 τ_0 的量级（数分钟到十余分钟）。【评分要点：指出正电荷位置；给出 C 的正确定义或直接用 (2) 的结论；说明它只描述地球电荷。】

例题 2：高原上的晴天电场与雾中的电场

设自由大气的电导率为 $\sigma(z) = \sigma_\infty e^{z/H}$ ， $\sigma_\infty = 5.5 \times 10^{-14}\text{ S/m}$ ， $H = 6.0\text{ km}$ (z 为海拔高度)，电离层电势 $V_I = 250\text{ kV}$ 处处相同。本题忽略边界层，并忽略地形对电场的局部畸变（高原面积很大且平坦）。

1. 一片海拔 $z_s = 4.5\text{ km}$ 的平坦高原。求高原上的柱电阻 $R_c(z_s)$ 、空地电流密度 J_s 与地面电场 E_s ，并与海平面比较。你会发现一个“出人意料”的结果，给出物理解释。
2. 设地球表面有 0.5% 的面积是这样的高原，其余在海平面。求这片高原输送的电流占全球晴天电流的比例。
3. 现在回到海平面的某个测站（为简单起见，设近地面的电导率在雾形成前为 $\sigma_g = 1.65 \times 10^{-14}\text{ S/m}$ ，测站的柱电阻为 $R_c = 1.25 \times 10^{17}\text{ }\Omega\text{ m}^2$ ，地面电场 $E_0 = 121\text{ V/m}$ ）。清晨形成一层厚 $d_f = 200\text{ m}$ 的浓雾，雾滴吸附小离子使雾层内电导率减小为原来的 $1/k$ ， $k = 5$ 。雾区面积很小，电离层电势不变。求雾形成后达到稳态时的空地电流密度、雾中电场、雾层顶以上的电场，以及雾层顶面上的面电荷密度。
4. 雾层内的电场建立需要多长时间？把雾层看作一个漏电的电容器，上方气柱只看作电阻，给出时间常数的表达式与数值，并说明这个近似偏向哪一边。

解答

(1) 由式 (4.9)， $R_c(z_s) = \int_{z_s}^{\infty} \frac{dz}{\sigma_\infty e^{z/H}} = \frac{H}{\sigma_\infty} e^{-z_s/H}$ 。海平面 $R_c(0) = H/\sigma_\infty = 1.09 \times 10^{17}\text{ }\Omega\text{ m}^2$ ，高原上 $R_c(z_s) = R_c(0)e^{-0.75} = 5.15 \times 10^{16}\text{ }\Omega\text{ m}^2$ 。由 $V_I = J_s R_c(z_s)$ ，

$$\begin{aligned} J_s &= \frac{V_I \sigma_\infty}{H} e^{z_s/H} = J(0) e^{z_s/H} \\ &= 2.29\text{ pA/m}^2 \times 2.12 = 4.85\text{ pA/m}^2. \end{aligned}$$

地面电场 $E_s = J_s/\sigma(z_s) = \frac{V_I \sigma_\infty e^{z_s/H}/H}{\sigma_\infty e^{z_s/H}} = \frac{V_I}{H} = 41.7\text{ V/m}$ ，与海平面完全相同。解释：对指数剖面，从任何高度 z_s 往上看，气柱的电导率剖面都“长得一样”，只是整体放大了 $e^{z_s/H}$ 倍；电场 $E = J/\sigma$ 中这个倍数消去，电压降仍是 V_I ，分布在同样的厚度 H 内。高原“抄了近路”，少了一段电阻最大的低层空气，所以电流更大而电场不变。【关键： R_c 、 J 、 E 三式；说明 $E_s = V_I/H$ 与 z_s 无关。】

(2) 各气柱并联，电流正比于面积/柱电阻。高原份额

$$\frac{f e^{z_s/H}}{(1-f) + f e^{z_s/H}} = \frac{0.005 \times 2.117}{0.995 + 0.005 \times 2.117} = 1.05\%,$$

约为其面积份额的 2.1 倍。全球电阻相应减小约 0.6%。

(3) 雾使最低 200 m 的电阻增加 $\Delta R_c = (k-1)d_f/\sigma_g = 4 \times 200 \text{ m}/(1.65 \times 10^{-14} \text{ S/m}) = 4.85 \times 10^{16} \Omega \text{ m}^2$ ($d_f \ll H$, 雾层内原电导率按常数处理)。新的柱电阻 $R'_c = 1.735 \times 10^{17} \Omega \text{ m}^2$,

$$J' = \frac{V_I}{R'_c} = J \frac{R_c}{R'_c} = 2.0 \text{ pA/m}^2 \times 0.720 = 1.44 \text{ pA/m}^2.$$

雾中电场 $E_{\text{fog}} = J'/(\sigma_g/k) = 437 \text{ V/m}$, 雾层顶以上 $E_{\text{top}} = J'/\sigma_g = 87 \text{ V/m}$ 。按式 (3.8) ($\sigma_1 = \sigma_g/k$ 在下, $\sigma_2 = \sigma_g$ 在上, 电流向下, $J_z = -J'$), 雾层顶面电荷

$$\begin{aligned} q_{\text{int}} &= \varepsilon_0 J' \frac{k-1}{\sigma_g} \\ &= \varepsilon_0 (E_{\text{fog}} - E_{\text{top}}) \\ &= 3.1 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2 > 0, \end{aligned}$$

地面电荷 $q_s = -\varepsilon_0 E_{\text{fog}} = -3.9 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$ 。模型预言：雾中地面电场升高到原来的约 3.6 倍，而雾顶以上电场反而减小。【关键：电离层电势不变、柱电阻串联；界面电荷的符号。】

(4) 单位面积的雾层是一个电容 $C_f = \varepsilon_0/d_f$ 与漏电阻 $R_f = d_f/(\sigma_g/k) = kd_f/\sigma_g$ 的并联；它上方的气柱（电阻 $R_{\text{rest}} = R_c - d_f/\sigma_g$ ）把它接到电势固定的电离层上。把“电离层 + R_{rest} ”看作一个电压源串联电阻（戴维南等效），从电容两端看出来的电阻是 R_f 与 R_{rest} 的并联，所以

$$\tau'_{\text{fog}} = C_f \frac{R_f R_{\text{rest}}}{R_f + R_{\text{rest}}} = \frac{k\varepsilon_0}{\sigma_g} \cdot \frac{R_{\text{rest}}}{R_f + R_{\text{rest}}}.$$

数值： $R_f = 6.06 \times 10^{16} \Omega \text{ m}^2$, $R_{\text{rest}} = 1.13 \times 10^{17} \Omega \text{ m}^2$, $k\varepsilon_0/\sigma_g = 45 \text{ min}$, 得 $\tau'_{\text{fog}} \approx 0.65 \times 45 \text{ min} \approx 29 \text{ min}$ 。近似忽略了上方气柱自身的电容（近地空气的弛豫时间 $\tau_0 \approx 9 \text{ min}$ 并不比 29 min 小很多），上方气柱也要重新充电，所以真实过程略慢：分层数值积分（取 $\sigma = \sigma_g e^{z/H'}$, $H' = R_c \sigma_g$ 使柱电阻相同）给出 63% 建立时间约 31 min（脚本 `verify_round2.py`）。【关键：戴维南等效、并联电阻；指出忽略上层电容使估计偏短。】

例题 3：雷击点附近的跨步电压

一次 $I = 30 \text{ kA}$ 的雷电流击中平坦均匀的土壤 ($\rho_s = 100 \Omega \text{ m}$)，按准静态半球模型处理。人体两脚之间的电阻（经两腿与躯干下部）取 $R_b = 1000 \Omega$ ；每只脚与地面的接触可看作半径 $b = 8 \text{ cm}$ 的圆盘电极，其接地电阻 $R_f = \rho_s/(4b)$ （工程上常用的结果 [37]）。土壤击穿场强 $E_c = 3 \times 10^5 \text{ V/m}$ 。

1. 用“面积相等的半球电极”估计单脚接地电阻，与 $\rho_s/(4b)$ 比较。

2. 一人站在离雷击点 $r = 10 \text{ m}$ 处，两脚沿径向分开 $s = 0.5 \text{ m}$ 。求跨步电压（精确式与近

似式) 及流过人体的峰值电流。说明为什么回路中要串联 $2R_f$ 。

3. 若此人两脚连线沿切向, 或双脚并拢 ($s = 0.1 \text{ m}$), 结果如何? 一头牛前后腿相距 1.5 m , 身体沿径向, 它承受的跨步电压是多少?
4. 求土壤电离区的半径 r_i 。把电离区当作理想导体, 求雷击点的“地电势升高”, 并证明电离对 $r > r_i$ 处的跨步电压没有影响。
5. (接触电压) 雷电击中一棵树干粗大的孤立的树, 电流经树根入地; 把树根看作半径 $b = 1 \text{ m}$ 的半球电极。一人在离树干轴线 $r = 1.5 \text{ m}$ 处躲雨, 一只手扶着树干, 双脚并拢。忽略树干自身的电阻, 并考虑第 (4) 问的土壤电离, 求手与脚之间的“接触电压”和流过人体的电流 (手到脚的人体电阻取 1000Ω , 双脚接地电阻并联), 与同一位置上步距 0.5 m 的跨步电压比较, 并据此说明为什么雷雨时不能在孤立的树下躲雨。
6. 本题的模型在什么条件下失效? 列出至少三条。

解答

(1) 半径 b 的圆盘面积 πb^2 ; 等面积半球的半径 b_h 满足 $2\pi b_h^2 = \pi b^2$, $b_h = b/\sqrt{2} = 5.7 \text{ cm}$ 。由式 (6.2), 半球电极的电阻 $R = V(b_h)/I = \rho_s/(2\pi b_h) = \sqrt{2}\rho_s/(2\pi b) = 2.81\rho_s/(1 \text{ m})$, 即 281Ω ; 圆盘公式给出 $\rho_s/(4b) = 313 \Omega$ 。两者相差约 10% , 量级一致 (圆盘的电流集中在边缘附近, 等效“厚度”比半球小, 电阻略大)。

(2) 由式 (6.3), $U = \frac{I\rho_s s}{2\pi r(r+s)} = \frac{3 \times 10^4 \text{ A} \times 100 \Omega \text{ m} \times 0.5 \text{ m}}{2\pi \times 10 \text{ m} \times 10.5 \text{ m}} = 2.27 \text{ kV}$; 近似式 (6.4) 给出 2.39 kV (偏大 5% , 即 s/r)。 U 是两脚不接触人体时地表两点的电势差 (开路电压)。人站上去后, 电流要从地里经一只脚的接触电阻、人体、另一只脚的接触电阻回到地里, 等效电路是电压源 U 串联 $R_b + R_f + R_f$ (两只脚是串联的)。于是

$$I_b = \frac{U}{R_b + 2R_f} = \frac{2.27 \text{ kV}}{1000 \Omega + 625 \Omega} \approx 1.4 \text{ A}.$$

这是峰值电流, 持续时间与雷电流相当 (几十微秒)。【说明: 人体分流使地表电势分布有微小改变, 此处忽略。】

(3) 切向站立: 两脚在同一等势线上, $U \approx 0$ 。双脚并拢 $s = 0.1 \text{ m}$: $U = 0.47 \text{ kV}$, $I_b \approx 0.29 \text{ A}$, 约为原来的 $1/5$ 。牛 $s = 1.5 \text{ m}$: $U = \frac{3 \times 10^4 \times 100 \times 1.5}{2\pi \times 10 \times 11.5} = 6.2 \text{ kV}$, 是人跨步时的 2.7 倍, 而且电流从前腿流到后腿要经过胸腔与心脏。

(4) 由式 (6.5), $r_i = \sqrt{I\rho_s/(2\pi E_c)} = \sqrt{3 \times 10^6/(2\pi \times 3 \times 10^5)} \text{ m} = 1.26 \text{ m}$ 。电离区为等势的半球导体, 其电势等于半径 r_i 的半球电极的电势: $V(r_i) = I\rho_s/(2\pi r_i) = 378 \text{ kV}$ (若不考虑电离, $r \rightarrow 0$ 时电势发散, “地电势升高”无法定义)。对 $r > r_i$, 以雷击点为心作半径 r 的半球面, 电流守恒要求穿过它的总电流仍为 I , 对称性要求电流密度在其上均匀, 故 $J = I/(2\pi r^2)$ 、 $E = I\rho_s/(2\pi r^2)$ 不变, 跨步电压不变。电离只改变 $r < r_i$ 内的场。【这与“导体球外的场只取决于总电荷”是同一个论证。】

(5) 先检查土壤是否电离: 树根表面的场强 $I\rho_s/(2\pi b^2) = 477 \text{ kV/m} > E_c$, 所以土壤电离到 $r_i = 1.26 \text{ m} > b$ (第 (4) 问)。按第 (4) 问的处理, 树根连同电离区是一个半径 r_i 的等势半球, 其电势 $V(r_i) = 378 \text{ kV}$; 人站在 $r = 1.5 \text{ m} > r_i$ 处, 脚下仍在未电离的土壤中。手的电势等于

树根的电势，脚的电势是 $V(r)$ ，所以接触电压

$$\begin{aligned} U_t &= V(r_i) - V(r) = \frac{I\rho_s}{2\pi} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r} \right) \\ &= 378 \text{ kV} - 318 \text{ kV} \approx 60 \text{ kV}. \end{aligned}$$

(若不考虑电离, 会得到 $V(b) - V(r) = 159 \text{ kV}$, 高估约 2.6 倍。)回路是: 树干(手) $\rightarrow$ 人体 $\rightarrow$ 双脚(两只脚的接地电阻并联, $R_f/2 = 156 \Omega$) $\rightarrow$ 大地, $I_b = U_t/(1000 \Omega + 156 \Omega) \approx 52 \text{ A}$, 是(2)中跨步电流(1.4 A)的约 40 倍; 同一位置 0.5 m 步距的跨步电压为 $V(1.5) - V(2.0) = 80 \text{ kV}$, 也很大。接触电压之所以大, 是因为手直接接触到了地电势最高的物体, 而且电流经过躯干。实际上树干有电阻, 树干上沿高度的电势比树根还高, 电流常常直接从树干击穿空气跳到人体上(“侧闪”)。所以在孤立的树下躲雨非常危险。【关键: 先判断土壤电离、用 $V(r_i)$ 作树根电势; 区分接触电压与跨步电压; 双脚并联。】

(6) (a) 土壤不均匀或分层(如上层干燥、下层潮湿), 电流分布不再是半球对称; (b) 雷击点附近有树根、金属管线、水体等良导体, 电流会优先沿它们流动; (c) 电流上升沿极陡、距离较远时, 准静态近似失效(趋肤深度与距离可比); (d) 地表放电: 强场下电流可能沿地表形成放电通道(地表闪络), 而不是在土壤中均匀扩散; (e) 人体的电阻随电压、皮肤状况变化, 且对微秒级脉冲的生理效应不能用工频的安全标准直接衡量。

例题 4: 舒曼共振的频率、品质因数与“听声辨位”

取 $a = 6371 \text{ km}$, $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。

1. 求理想薄壳空腔前三个模式的频率, 以及 f_2/f_1 、 f_3/f_1 。观测频率为 7.8、14.1、20.3 Hz, 比值为多少? 比较后说明: 观测频率能否用“把 c 换成一个固定的更小的速度”来完全解释?
2. 用两高度模型(7.9)解释观测。设电离层底部的电导率按 $\sigma(z) = \sigma_\infty e^{z/H}$ 外推($\sigma_\infty = 5.5 \times 10^{-14} \text{ S/m}$, $H = 6.0 \text{ km}$), 磁高度在 $f_1 = 8 \text{ Hz}$ 时为 $h_m(f_1) = 98 \text{ km}$, 并随频率按 $h_m(f) = h_m(f_1) - \zeta_m \ln(f/f_1)$ 降低, $\zeta_m = 3 \text{ km}$ (唯象参数)。求 $h_e(f)$ 的表达式, 并自洽地算出 f_1 、 f_2 、 f_3 。
3. 某测站测得第一个共振峰的半功率全宽为 $\Delta f_1 = 1.9 \text{ Hz}$ 。求品质因数 Q_1 、能量与振幅的衰减时间。一次闪电产生的波包在振幅衰减到 $1/e$ 以前大约绕地球几周?
4. 一次特别强的闪电之后, 某测站记录的瞬态竖直电场谱中第一、第三个峰几乎缺失, 第二个峰很强。已知单个源在角距离 θ 处激发的第 n 模式的竖直电场正比于 $(2n+1)P_n(\cos \theta)$ (附录 B)。估计闪电到测站的距离。若是第二个峰缺失而第一、第三个峰都在, 距离可能是多少? 怎样区分这两个可能的距离? (提示: 先证明 $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, 并利用 $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$ 。)

解答

(1) $c/(2\pi a) = 7.49 \text{ Hz}$; $f_1 = 10.6 \text{ Hz}$, $f_2 = 18.3 \text{ Hz}$, $f_3 = 25.9 \text{ Hz}$; $f_2/f_1 = \sqrt{3} = 1.732$, $f_3/f_1 = \sqrt{6} = 2.449$ 。观测比值 $14.1/7.8 = 1.81$, $20.3/7.8 = 2.60$, 都比理想值大。若只把 c 换成固定的 v , 比值不变, 所以不能完全解释: 相速度必须随频率增大 (色散)。【关键: 比值检验。】

(2) 由式 (7.8), $\sigma_\infty e^{h_e/H} = \varepsilon_0 \cdot 2\pi f$,

$$h_e(f) = H \ln \frac{2\pi f \varepsilon_0}{\sigma_\infty}.$$

$f = 8 \text{ Hz}$: $2\pi f \varepsilon_0 / \sigma_\infty = 8.09 \times 10^3$, $h_e = 6.0 \times 9.00 = 54.0 \text{ km}$ 。由式 (7.9), $f_n = \frac{c}{2\pi a} \sqrt{n(n+1)} \sqrt{h_e(f_n)/h_m(f_n)}$, 右边依赖 f_n , 用迭代求解 (从理想值的 0.75 倍出发, 迭代 3-4 次收敛):

n	f_n / Hz	h_e / km	h_m / km	$\sqrt{h_e/h_m}$	观测 / Hz
1	7.85	53.9	98.1	0.741	7.8
2	14.17	57.4	96.3	0.772	14.1
3	20.54	59.6	95.2	0.792	20.3

模型同时给出了频率降低与比值增大两个特征。【注意: h_e 由外推的指数律得到, h_m 与 ζ_m 是题给的唯象参数; 这只说明两高度机制的方向和大小是对的, 不应把三位有效数字的吻合看得太重。】

(3) 共振曲线的半功率全宽 $\Delta f = f_1/Q_1$ (附录 B), 所以 $Q_1 = 7.8/1.9 = 4.1$ 。振幅按 $e^{-\gamma t}$ 衰减, $\gamma = \omega_1/(2Q_1) = \pi \Delta f = 6.0 \text{ s}^{-1}$, 振幅衰减时间 $1/\gamma = 0.17 \text{ s}$, 能量衰减时间 0.084 s 。波包传播的速度与相速度 $v \approx 0.74c$ 同量级, 绕一周 $2\pi a/v \approx 0.18 \text{ s}$: 振幅衰减到 $1/e$ 时大约只绕了一周。这就是舒曼共振峰很宽的另一种说法: Q 小 $\Leftrightarrow$ 波包来不及多次绕行、互相加强。

(4) 第一、第三模式缺失: $P_1(\cos \theta) = \cos \theta = 0$ 且 $P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2} \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3) = 0$, 共同的根是 $\theta = 90^\circ$, 距离 $a\pi/2 = 10.0 \text{ Mm}$ (约一万公里); 此时 $P_2 = -\frac{1}{2}$, 第二模式不为零, 与“第二个峰很强”一致。第二模式缺失: $P_2 = 0$, $\cos \theta = \pm 1/\sqrt{3}$, $\theta = 54.7^\circ$ 或 125.3° , 距离 6.1 Mm 或 13.9 Mm 。区分方法: 先证明奇偶性。 $x \rightarrow -x$ 时勒让德方程 (7.5) 不变, 所以 $P_n(-x)$ 也是同一个 $\lambda = n(n+1)$ 的有限解, 只能与 $P_n(x)$ 成比例; 比较最高次项 x^n 的系数得 $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ 。两个候选位置 $\cos \theta = \pm 1/\sqrt{3}$ 互为 $x \rightarrow -x$, 所以奇阶模式 ($n = 1, 3$) 在两处同时反号, 偶阶模式 ($n = 2, 4$) 不变: 54.7° 处 $(P_1, P_3, P_4) = (+0.577, -0.385, -0.389)$, 125.3° 处为 $(-0.577, +0.385, -0.389)$ 。缺失的恰是第二模式, 而第一、第三模式之间的相对符号在两处相同, 比较它们无法区分; 应当比较第一 (或第三) 模式与第四模式的相对相位: 两处相差 π 。其他可行的方法: (i) 若已知闪电极性 (如负地闪) 和发生时刻, 可直接看第一模式的绝对符号; (ii) 有损腔中高阶模随距离衰减更快, 远处 (13.9 Mm) 高阶模与低阶模的幅度比更小; (iii) 用多个测站, 或同时测水平磁场的方向 (它垂直于源-站大圆, 给出源的方位)。【评分要点: 写出 P_n 的零点; 给出距离; 证明奇偶性并指出须与偶阶的第四模式比较 (或给出其他正确方法)。】

9 实验与数据处理：探空电导率剖面与柱电阻

例题：实验题：由探空数据求电导率标高、柱电阻与电离层电势（本题使用模拟数据）

探空气球携带一个格迪恩电容器（Gerdien condenser）上升：它是两个同轴金属圆筒，空气由风扇抽着从两筒之间流过；外筒接地，内筒接电压 $\pm U$ ，用静电计测内筒收集到的电流。电容器的电容 $C_G = 5.00 \text{ pF}$ ， $U = 10.0 \text{ V}$ 。内筒接 $+U$ 时测得电流 I_- ，接 $-U$ 时测得 I_+ 。仪器工作在“欧姆区”：两筒之间的离子被收集得很少，筒内离子浓度近似等于外界大气的值。每个电流读数有 3% 的独立随机误差。

表 3 给出各高度的读数。同一天，地面上用埋在地表、与地绝缘的金属板（Wilson 板）测得空地电流密度 $J = (2.00 \pm 0.10) \text{ pA/m}^2$ ，用场磨测得地面电场 $E_0 = (123 \pm 4) \text{ V/m}$ ；另一次探空对电场积分得到电离层电势 $V_I = (229 \pm 9) \text{ kV}$ 。

1. 证明欧姆区中 $I_{\mp} = \sigma_{\mp} C_G U / \varepsilon_0$ ($\sigma_{\mp}$ 为相应极性的电导率)，并说明内筒接 $+U$ 时收集的是哪种离子。由此算出各高度的总电导率 $\sigma = \sigma_+ + \sigma_-$ 及其相对误差。
2. 作 $\ln \sigma - z$ 图。哪些点可以用指数律 $\sigma = \sigma_{\infty} e^{z/H}$ 描述？对这些点做加权最小二乘拟合，求标高 H 及其不确定度，并用 χ^2 判断拟合是否合理。其余的点为什么偏离？
3. 求柱电阻 R_c 及其不确定度：2 km 以下用实测点数值积分，2 km 以上用拟合的指数律积分到无穷。误差传递时要注意拟合参数之间的相关性。估计数值积分本身带来的误差。
4. 由 J 与 R_c 求电离层电势，并与独立测量的 V_I 比较；由 J 与地面电导率求地面电场，并与场磨读数比较。两处比较各相差几倍标准差？
5. 讨论至少四种系统误差来源及改进方案。

(模拟数据：按第 4.4 节的参考模型 (4.15) 加 3% 高斯噪声生成，随机数种子事先取定为 43，生成脚本 `scripts/exp_data.py`。)

表 3 探空格迪恩电容器的读数（模拟数据）

z / km	I_- / fA	I_+ / fA	z / km	I_- / fA	I_+ / fA
0.0	51.2	41.4	4.0	330	268
0.3	94.2	77.2	5.0	380	309
0.6	123	103	6.0	477	388
1.0	156	136	7.0	559	425
1.5	182	160	8.0	640	540
2.0	229	184	10.0	881	770
3.0	275	240	12.0	1240	1050

解答

(1) **测量原理。**内筒接 $+U$ 时，两筒间电场由内筒指向外筒；负离子被吸向内筒，正离子被推开，所以内筒电流只由负离子携带。取包围内筒的闭合面（在两筒之间），流入的电流 $I_- = \sigma_- \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \sigma_- Q/\varepsilon_0$ （高斯定理），而 $Q = C_G U$ ，故 $I_- = \sigma_- C_G U/\varepsilon_0$ 。这与例题 1 第 (1) 问、第 3.3 节“带电小球漏电”是同一个论证。于是

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0(I_- + I_+)}{C_G U} = \frac{I_- + I_+}{5.647 \text{ V m}}.$$

两个电流各有 3% 的独立误差， σ 的相对误差为 $3\% \times \sqrt{I_-^2 + I_+^2}/(I_- + I_+) \approx 2.1\%$ （两者近似相等时为 $3\%/\sqrt{2}$ ）。结果如下（单位 10^{-14} S/m ，相对误差均为 2.1%）：

$z / \text{ km}$	0.0	0.3	0.6	1.0	1.5	2.0	3.0
σ	1.64	3.04	4.00	5.17	6.06	7.31	9.12
$z / \text{ km}$	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	10.0	12.0
σ	10.59	12.20	15.32	17.43	20.90	29.24	40.55

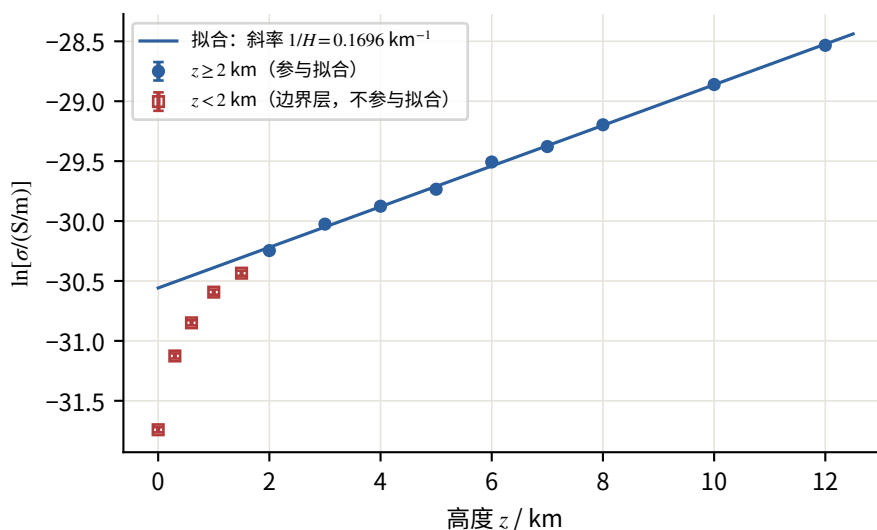


图 10 实验题： $\ln \sigma$ 随高度的变化（模拟数据）与 $z \geq 2 \text{ km}$ 点的加权直线拟合。误差棒为 ± 1 倍标准差（2.1%，比符号还小）。

解答：实验题解答（续）

(2) **线性化与拟合。**取 $y = \ln \sigma$ ，指数律化为直线 $y = \ln \sigma_\infty + z/H$ 。每个 y_i 的误差 $s_i = \delta \sigma_i / \sigma_i = 0.021$ 。图 10 显示 $z \geq 2 \text{ km}$ 的 9 个点落在一条直线上，而 $z < 2 \text{ km}$ 的 5 个点系统地低于它，越靠近地面偏离越大：这是边界层气溶胶吸附小离子的结果（第 3.2 节）。拟合区间不应只凭目测决定。客观的做法是从全部点出发，逐次去掉最低的点，看 χ^2/ν 何时降到 1 左右、 H 何时稳定（ ν 为自由度， χ^2 的定义与解释见附录 D； p 是模型正确时 χ^2 不小于实测值的概率）：

最低高度 / km	点数	H / km	δH / km	χ^2/ν	p
0.6	12	5.27	0.05	24.59	4.0×10^{-47}
1.0	11	5.54	0.06	8.91	1.5×10^{-13}
1.5	10	5.72	0.07	4.31	3.3×10^{-5}
2.0	9	5.90	0.08	1.02	0.42
3.0	8	5.97	0.09	0.78	0.58
4.0	7	5.92	0.11	0.83	0.53

从 $z \geq 2\text{ km}$ 起 χ^2/ν 降到 1 附近, H 在其后的变化 (5.90、5.97、5.92 km) 都在一倍标准差以内, 所以取 $z \geq 2\text{ km}$ 。只用这些点, 以加权平均高度 $\bar{z}$ 为参考点拟合 $y = A + b(z - \bar{z})$ (公式见附录 D), 权重 $w_i = 1/s_i^2$:

$$\bar{z} = 6.337\text{ km}, \quad A = -29.4838 \pm 0.0071,$$

$$b = (0.16961 \pm 0.00230)\text{ km}^{-1},$$

$$H = 1/b = (5.90 \pm 0.08)\text{ km},$$

$$\chi^2 = 7.1, \quad \nu = 9 - 2 = 7.$$

$\chi^2/\nu \approx 1$, 说明指数律在 2–12 km 内与数据一致, 所给的 3% 读数误差也是合理的; 由残差估计的斜率误差 (0.00232 km^{-1}) 与由已知误差传递的结果一致。外推到地面 $\sigma_\infty = e^{A-b\bar{z}} = 5.35 \times 10^{-14}\text{ S/m}$, 而地面实测只有 $1.64 \times 10^{-14}\text{ S/m}$, 边界层把地面电导率压低到约 30%; $z < 2\text{ km}$ 各点相对直线的偏离是其误差的 6 到 55 倍。

(3) 柱电阻。分两段:

- $0 \leq z \leq 2\text{ km}$: 对 6 个实测点 (0、0.3、0.6、1.0、1.5、2.0 km) 的 $1/\sigma$ 用梯形公式积分, $R_{\text{low}} = \sum_i \frac{1}{2}(1/\sigma_i + 1/\sigma_{i+1})\Delta z_i = 4.815 \times 10^{16}\text{ }\Omega\text{ m}^2$ 。随机误差: 每个 $1/\sigma_i$ 的误差为 $2.1\%/\sigma_i$, 乘以梯形权重后平方相加, 得 $\pm 0.043 \times 10^{16}\text{ }\Omega\text{ m}^2$ (0.9%)。
- $z > 2\text{ km}$: $R_{\text{up}} = \int_{z_1}^{\infty} \frac{dz}{\sigma(z_1)e^{(z-z_1)/H}} = \frac{H}{\sigma(z_1)} = \frac{1}{b\sigma_{\text{fit}}(z_1)}$, $z_1 = 2\text{ km}$, $\sigma_{\text{fit}}(z_1) = \exp[A + b(z_1 - \bar{z})] = 7.514 \times 10^{-14}\text{ S/m}$, 得 $R_{\text{up}} = 7.846 \times 10^{16}\text{ }\Omega\text{ m}^2$ 。

R_{up} 的误差传递: $\ln R_{\text{up}} = -\ln b - A - b(z_1 - \bar{z})$, 以 $\bar{z}$ 为参考点时 A 、 b 不相关 (附录 D), 所以

$$\begin{aligned} \frac{\delta R_{\text{up}}}{R_{\text{up}}} &= \sqrt{\delta A^2 + [\delta b(1/b + z_1 - \bar{z})]^2} \\ &= 0.8\%, \end{aligned}$$

其中 $1/b + (z_1 - \bar{z}) = 5.90 - 4.34 = 1.56\text{ km}$: H 增大使 R_{up} 增大, 但同时使外推的 $\sigma(z_1)$ 增大, 两者部分抵消。若错误地以 $z = 0$ 为参考点、用 $\ln \sigma_\infty$ 与 b 计算并忽略二者之间 -0.90 的相关系数, 会把这一误差算成 2.4%, 约为正确值的 3 倍 (若计入协方差, 以哪个点为参考结果都相同)。合计

$$\begin{aligned} R_c &= R_{\text{low}} + R_{\text{up}} \\ &= (1.266 \pm 0.008) \times 10^{17}\text{ }\Omega \cdot \text{m}^2 \quad (\text{统计}), \end{aligned}$$

蒙特卡洛模拟（脚本 `exp_solve.py`）给出相同的 0.6% 相对误差。38% 的柱电阻位于最低 2 km。

数值积分误差： $1/\sigma$ 在 2 km 以下是下凸函数，梯形公式系统地偏大。若改为在每一段内假定 $\ln \sigma$ 线性变化（对指数段精确），得 $R_{\text{low}} = 4.758 \times 10^{16} \Omega \text{m}^2$ ，比梯形小 1.2%。取两者之差作为离散化误差， R_c 的离散化误差约 $\pm 0.5\%$ ，与统计误差同量级。

(4) 两个自洽检验。

$$\begin{aligned} V_I &= JR_c = 2.00 \times 10^{-12} \text{ A/m}^2 \\ &\quad \times 1.266 \times 10^{17} \Omega \text{m}^2 \\ &= (253 \pm 13) \text{ kV}, \end{aligned}$$

误差主要来自 J 的 5%。与独立测量的 $(229 \pm 9) \text{ kV}$ 相差 24 kV，按统计误差合成为 1.6 倍标准差。地面电场 $E_0 = J/\sigma(0) = (122 \pm 7) \text{ V/m}$ ，与场磨的 $(123 \pm 4) \text{ V/m}$ 相差 0.1 倍标准差。按统计误差口径，两项比较的差异分别为 1.6 倍与 0.1 倍标准差，都在 2 倍标准差以内；若再计入下面 (5) 中的日变化等系统误差，第一项的差异更不显著。所以在本数据的精度内，全球电路的“欧姆定律” $V_I = JR_c$ 与地面的欧姆定律 $E_0 = J/\sigma(0)$ 都与观测一致。

(5) 系统误差与改进。

1. **日变化**： V_I 按卡内基曲线有约 $\pm 15\%$ 的日变化（第 5.3 节）。若 J 、探空和 V_I 测量相隔数小时，可带来最多约 $\pm 38 \text{ kV}$ 的差异，远大于统计误差。改进：三项测量同步进行，或都按卡内基曲线归一到同一世界时。
2. **高空外推**：12 km 以上的柱电阻 $R_{\text{up}} e^{-(12-2)/H} \approx 1.4 \times 10^{16} \Omega \text{m}^2$ ，约占 R_c 的 11%，完全来自指数律外推；平流层中标高会变化。改进：探空升到 25–30 km。
3. **格迪恩电容器的欧姆区条件**：电压太高或气流太慢时，筒内离子被吸空，电流不再正比于 σ （读数偏低）；还有慢速的“大离子”贡献难以收集。改进：在几个电压下测量，确认 $I \propto U$ 。
4. **离散化**：2 km 以下的采样点太稀，梯形公式偏大约 1%。改进：边界层内加密采样。
5. **水平不均匀与局地扰动**：气球随风漂移，所测剖面不是严格的“竖直气柱”；云、雾、污染团会局部改变 σ 。改进：选择晴天、稳定的天气，多次探空平均。
6. **地面测量**：Wilson 板与场磨受地形与安装高度影响（场的局部畸变），需要用平坦场地的标准装置标定。
7. **边界层的残余影响**：即使在 2–3 km，边界层修正也未必完全消失；从上表看，最低高度由 2 km 提到 3 km 时 H 增大约 0.07 km（不到一倍标准差，但方向一致），说明拟合的 H 可能略偏小。改进：在边界层顶以上加密采样，同时测气溶胶浓度。

（作为模拟数据，生成模型的真值为 $H = 6.0 \text{ km}$ 、 $R_c = 1.251 \times 10^{17} \Omega \text{m}^2$ ：拟合的 H 偏小 1.3 倍标准差，正是因为 2 km、3 km 处仍残留约 6%、2% 的边界层影响； R_c 偏大 1.2%，主要来自梯形公式的离散化误差。实际测量时不知道真值，这正是需要做上面的区间检验与 (3) 中离散化误差估计的原因。）

10 小结：推导链

1. **导电介质的静电学** (第 3 节): 迁移率 $\Rightarrow \sigma = \sum en\mu$; 电荷守恒 + 欧姆定律 + 高斯定理 $\Rightarrow$ 弛豫时间 $\tau = \varepsilon_0/\sigma$; 稳恒电流过非均匀介质 $\Rightarrow$ 空间电荷 $\rho = \varepsilon_0 J d(1/\sigma)/dz$ 。
2. **晴天气柱** (第 4 节): 稳恒 + 水平均匀 $\Rightarrow J$ 不随高度变化 $\Rightarrow E = J/\sigma(z)$ 、 $V_I = JR_c$ 、 $R = R_c/(4\pi a^2)$; 指数剖面 $\Rightarrow V_I = E_0 H$, 正空间电荷与地面电荷等量; 三个观测量的自洽检验 $\Rightarrow$ 边界层。
3. **全球电路** (第 5 节): 球对称 + 高斯定理 + 电荷守恒 $\Rightarrow$ 各层独立弛豫 $\Rightarrow$ 地球电荷放电时间 $\tau_0 = \varepsilon_0/\sigma(0)$, 就地球电荷而言的有效电容 $C = \tau_0/R \Rightarrow$ 必须有约 1–2 kA 的雷暴发电机; 日变化中地面电场滞后 τ_0 、电离层电势滞后 $\tau_V < \tau_0$, 二者都远小于一天 $\Rightarrow$ 电场是全球雷暴电流的实时读数 $\Rightarrow$ 卡内基曲线按世界时同步。
4. **闪电与安全** (第 6 节): 电流守恒 + 半球对称 $\Rightarrow V = I\rho_s/(2\pi r) \Rightarrow$ 跨步电压 $\approx I\rho_s/(2\pi r^2)$; 等势导体 $\Rightarrow$ 表面场 $\propto 1/r \Rightarrow$ 尖端放电。
5. **舒曼共振** (第 7 节): 高斯定理 + 面电流守恒 + 磁场跃变 + 法拉第定律 $\Rightarrow$ 平行板 TEM 波 (速度 c , 无截止) $\Rightarrow$ 薄球壳波动方程 $\Rightarrow$ 勒让德方程, 有限性 $\Rightarrow \lambda = n(n+1) \Rightarrow f_n = \frac{c}{2\pi a} \sqrt{n(n+1)}$; 有损电离层 $\Rightarrow$ 两高度传输线 $v = c\sqrt{h_e/h_m}$ 、色散与低 Q ; $n=0$ 的零频“模式”就是全球直流电路。

参考文献

- [1] V. A. Rakov. Lightning discharge and fundamentals of lightning protection. *Journal of Lightning Research*, 4(Suppl 1: M2):3–11, 2012. doi: 10.2174/1652803401204010003.
- [2] Benjamin Franklin. A letter of Benjamin Franklin, Esq; to Mr. Peter Collinson, F. R. S. concerning an electrical kite. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 47:565–567, 1752. doi: 10.1098/rstl.1751.0096.
- [3] R. G. Harrison. The Carnegie curve. *Surveys in Geophysics*, 34(2):209–232, 2013. doi: 10.1007/s10712-012-9210-2. Open access (CC BY).
- [4] William Thomson. *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism*. Macmillan, London, 2nd edition, 1884. URL <https://archive.org/details/reprintofpaperso00kelvuoft>. Chapter XVI: Atmospheric Electricity (water-dropper 1859; Royal Institution lecture 18 May 1860; Arran measurements).
- [5] C. T. R. Wilson. On the ionisation of atmospheric air. *Proceedings of the Royal Society of London*, 68:151–161, 1901. doi: 10.1098/rspl.1901.0032.
- [6] J. Elster and H. Geitel. Über die Existenz elektrischer Ionen in der Atmosphäre. *Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity*, 4:213–234, 1899. doi: 10.1029/TE004i004p00213.

- [7] V. F. Hess. Über Beobachtungen der durchdringenden Strahlung bei sieben Freiballonfahrten. *Physikalische Zeitschrift*, 13:1084–1091, 1912.
- [8] C. T. R. Wilson. Investigations on lightning discharges and on the electric field of thunderstorms. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 221:73–115, 1921. doi: 10.1098/rsta.1921.0003.
- [9] C. T. R. Wilson. The electric field of a thundercloud and some of its effects. *Proceedings of the Physical Society of London*, 37:32D–37D, 1924. doi: 10.1088/1478-7814/37/1/314.
- [10] F. J. W. Whipple. On the association of the diurnal variation of electric potential gradient in fine weather with the distribution of thunderstorms over the globe. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 55:1–18, 1929. doi: 10.1002/qj.49705522902.
- [11] R. Markson. The global circuit intensity: its measurement and variation over the last 50 years. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 88(2):223–242, 2007. doi: 10.1175/BAMS-88-2-223.
- [12] W. O. Schumann. Über die strahlungslosen Eigenschwingungen einer leitenden Kugel, die von einer Luftschicht und einer Ionosphärenhülle umgeben ist. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 7(2):149–154, 1952. doi: 10.1515/zna-1952-0202.
- [13] M. Balser and C. A. Wagner. Observations of Earth–ionosphere cavity resonances. *Nature*, 188:638–641, 1960. doi: 10.1038/188638a0.
- [14] P. C. Malta and J. A. Helayël-Neto. Constraining the photon mass via Schumann resonances. *Physical Review D*, 106:116014, 2022. doi: 10.1103/PhysRevD.106.116014. arXiv:2208.00527.
- [15] H. J. Christian, R. J. Blakeslee, D. J. Boccippio, et al. Global frequency and distribution of lightning as observed from space by the optical transient detector. *Journal of Geophysical Research*, 108(D1):4005, 2003. doi: 10.1029/2002JD002347.
- [16] D. J. Cecil, D. E. Buechler, and R. J. Blakeslee. Gridded lightning climatology from TRMM-LIS and OTD: Dataset description. *Atmospheric Research*, 135–136:404–414, 2014. doi: 10.1016/j.atmosres.2012.06.028.
- [17] E. R. Williams. The Schumann resonance: a global tropical thermometer. *Science*, 256:1184–1187, 1992. doi: 10.1126/science.256.5060.1184.
- [18] A. Hirsikko, T. Nieminen, S. Gagné, et al. Atmospheric ions and nucleation: a review of observations. *Atmospheric Chemistry and Physics*, 11:767–798, 2011. doi: 10.5194/acp-11-767-2011.
- [19] R. G. Harrison. The global atmospheric electrical circuit and climate. *Surveys in Geophysics*, 25(5–6):441–484, 2004. doi: 10.1007/s10712-004-5439-8. arXiv:physics/0506077.
- [20] K. A. Nicoll. Measurements of atmospheric electricity aloft. *Surveys in Geophysics*, 33:991–1057, 2012. doi: 10.1007/s10712-012-9188-9.

- [21] M. J. Rycroft and R. G. Harrison. Electromagnetic atmosphere-plasma coupling: the global atmospheric electric circuit. *Space Science Reviews*, 168:363–384, 2012. doi: 10.1007/s11214-011-9830-8.
- [22] E. R. Williams. The tripole structure of thunderstorms. *Journal of Geophysical Research*, 94 (D11):13151–13167, 1989. doi: 10.1029/JD094iD11p13151.
- [23] S. E. Reynolds, M. Brook, and M. F. Gourley. Thunderstorm charge separation. *Journal of Meteorology*, 14:426–436, 1957. doi: 10.1175/1520-0469(1957)014<0426:TCS>2.0.CO;2.
- [24] T. Takahashi. Riming electrification as a charge generation mechanism in thunderstorms. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 35(8):1536–1548, 1978. doi: 10.1175/1520-0469(1978)035<1536:REAACG>2.0.CO;2.
- [25] O. H. Gish and G. R. Wait. Thunderstorms and the earth’s general electrification. *Journal of Geophysical Research*, 55(4):473–484, 1950. doi: 10.1029/JZ055i004p00473.
- [26] D. M. Mach, R. J. Blakeslee, M. G. Bateman, and J. C. Bailey. Comparisons of total currents based on storm location, polarity, and flash rates derived from high-altitude aircraft overflights. *Journal of Geophysical Research*, 115:D03201, 2010. doi: 10.1029/2009JD012240.
- [27] D. M. Mach, R. J. Blakeslee, and M. G. Bateman. Global electric circuit implications of combined aircraft storm electric current measurements and satellite-based diurnal lightning statistics. *Journal of Geophysical Research*, 116:D05201, 2011. doi: 10.1029/2010JD014462.
- [28] V. A. Rakov and M. A. Uman. *Lightning: Physics and Effects*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [29] L. Grcev. Impulse efficiency of ground electrodes. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 24 (1):441–451, 2009. doi: 10.1109/TPWRD.2008.923396.
- [30] U.S. National Weather Service. How lightning strikes people. NOAA/NWS Lightning Safety, 2024. URL <https://www.weather.gov/safety/lightning-struck>.
- [31] M. A. Cooper, R. L. Holle, and C. Andrews. Distribution of lightning injury mechanisms. In *Proceedings of the 30th International Conference on Lightning Protection (ICLP)*, Cagliari, 2010. doi: 10.1109/ICLP.2010.7845948.
- [32] C. B. Moore, G. D. Aulich, and W. Rison. Measurements of lightning rod responses to nearby strikes. *Geophysical Research Letters*, 27(10):1487–1490, 2000. doi: 10.1029/1999GL011053.
- [33] C. B. Moore, W. Rison, J. Mathis, and G. Aulich. Lightning rod improvement studies. *Journal of Applied Meteorology*, 39(5):593–609, 2000. doi: 10.1175/1520-0450(2000)039<0593:LRIS>2.0.CO;2.
- [34] M. W. Coughlin, A. Cirone, P. Meyers, et al. Measurement and subtraction of Schumann resonances at gravitational-wave interferometers. *Physical Review D*, 97:102007, 2018. doi: 10.1103/PhysRevD.97.102007. arXiv:1802.00885.

- [35] E. Thrane, N. Christensen, and R. M. S. Schofield. Correlated magnetic noise in global networks of gravitational-wave detectors: observations and implications. *Physical Review D*, 87:123009, 2013. doi: 10.1103/PhysRevD.87.123009. arXiv:1303.2613.
- [36] C. Greifinger and P. Greifinger. Approximate method for determining ELF eigenvalues in the earth-ionosphere waveguide. *Radio Science*, 13(5):831–837, 1978. doi: 10.1029/RS013i005p00831.
- [37] IEEE. IEEE guide for safety in AC substation grounding (IEEE std 80-2013), 2015.

A 勒让德方程：本征值为什么是 $n(n+1)$

幂级数 设式 (7.5) 的解 $F(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ 。逐项计算：

$$\begin{aligned} (1-x^2)F' &= \sum_k k a_k x^{k-1} - \sum_k k a_k x^{k+1}, \\ \frac{d}{dx} [(1-x^2)F'] &= \sum_k k(k-1) a_k x^{k-2} \\ &\quad - \sum_k k(k+1) a_k x^k. \end{aligned}$$

第一个和式中令 $k \rightarrow k+2$ ，使各项都写成 x^k 。代入方程， x^k 的系数为零：

$$\begin{aligned} &(k+2)(k+1)a_{k+2} \\ &= [k(k+1) - \lambda]a_k \\ a_{k+2} &= \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} a_k. \end{aligned} \tag{A.1}$$

递推只联系同奇偶的系数，所以通解是一个偶级数（由 a_0 出发）与一个奇级数（由 a_1 出发）的线性组合。

不截断的级数在 $x = \pm 1$ 发散 若某个级数不截断，当 k 很大时

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{k^2 + k - \lambda}{k^2 + 3k + 2} = 1 - \frac{2}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

这与 $b_k = 1/k$ 的比值 $b_{k+2}/b_k = k/(k+2) = 1 - 2/k + \mathcal{O}(1/k^2)$ 相同，因此 a_k 最终与 C/k ($C \neq 0$) 成比例（两比值之比的连乘积收敛到非零常数）。于是偶级数在 $x \rightarrow \pm 1$ 时的行为如同 $\sum_{k \text{ 偶}} x^k/k = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$ ，奇级数如同 $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ，都对数发散。偶、奇级数的组合可以消掉一端的发散，但会使另一端的发散加倍，所以两个级数都不截断时，没有在两极都有限的解。

截断条件 由式 (A.1)，若 $\lambda = n(n+1)$ (n 为非负整数)，则 $a_{n+2} = 0$ ，与 n 同奇偶的级数在 x^n 项截断，成为 n 次多项式；另一个奇偶的级数的分子 $k(k+1) - n(n+1)$ 对所有与 n 不同奇偶的 k 都不为零，不会截断，所以必须令它的首项系数为零。结论：在 $x = \pm 1$ 都有限的解存在当且仅当 $\lambda = n(n+1)$ ，解是 n 次多项式，按惯例归一化为 $P_n(1) = 1$ ，即勒让德多项式。例： $n = 4$ ，取 $a_0 = 3/8$ ，递推给出 $a_2 = -\frac{30}{8}$ 、 $a_4 = \frac{35}{8}$ 、 $a_6 = 0$ ，即 $P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$ （脚本核对）。

正交性 对两个不同的 $n \neq m$, 分别写出 $[(1-x^2)P_n']' = -n(n+1)P_n$ 与 $[(1-x^2)P_m']' = -m(m+1)P_m$, 前者乘 P_m 、后者乘 P_n 相减并在 $[-1, 1]$ 上积分。左边分部积分后化为边界项 $[(1-x^2)(P_n'P_m - P_m'P_n)]_{-1}^1 = 0$ (因子 $1-x^2$ 在两端为零), 所以

$$[m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^1 P_n P_m dx = 0,$$

即

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n P_m dx &= 0 \quad (n \neq m), \\ \int_{-1}^1 P_n^2 dx &= \frac{2}{2n+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

(归一化常数由 $n \leq 4$ 的直接积分核对, 一般情形可由生成函数证明, 此处不展开。)

B 一次闪电激发的场：模式求和与共振峰的宽度

带源的方程 把闪电看成在 $\theta = 0$ 处连接两块“极板”的竖直电流 $I_s(t)$ (若通道长度 ℓ 小于 h , 等效电流为 $I_s \ell / h$)。它把电荷从地面直接搬到上方, 所以地面的电荷守恒 (7.2) 多出一个源项: $\partial_t q = -\nabla_s \cdot K - I_s(t) \delta_s$, 其中 $\delta_s(\theta)$ 是集中在 $\theta = 0$ 附近、在球面上积分为 1 的“面密度” (单位 m^{-2}), $\nabla_s \cdot K$ 是式 (7.2) 右边的简写。重复第 7.3 节的推导, 并唯象地加上损耗项 (每个模式按自己的品质因数 Q_n 衰减):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} - \frac{c^2}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) + (\text{损耗}) \\ = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{dI_s}{dt} \delta_s. \end{aligned}$$

按模式展开 由正交性 (A.2), 球面上 (只依赖 θ) 的函数 g 可以展开为 $g = \sum_n c_n P_n(\cos \theta)$, 两边乘 P_m 积分即得系数 $c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 g P_n dx$ 。对 δ_s ($\int \delta_s 2\pi a^2 dx = 1$, 集中在 $x = 1$ 且 $P_n(1) = 1$):

$$\delta_s = \sum_n \frac{2n+1}{4\pi a^2} P_n(\cos \theta).$$

令 $E_r = \sum_n e_n(t) P_n(\cos \theta)$, 代入并比较 P_n 的系数 (P_n 是算符的本征函数, 本征值 $-n(n+1)$):

$$\begin{aligned} \ddot{e}_n + \frac{\omega_n}{Q_n} \dot{e}_n + \omega_n^2 e_n &= -\frac{2n+1}{4\pi \varepsilon_0 a^2} \dot{I}_s, \\ \omega_n &= \frac{c}{a} \sqrt{n(n+1)}. \end{aligned}$$

这是受迫阻尼振子。对频率 ω 的分量 ($e^{i\omega t}$ 约定),

$$\begin{aligned} e_n(\omega) &= -\frac{(2n+1) i \omega I_s(\omega)}{4\pi \varepsilon_0 a^2 D_n(\omega)}, \\ D_n(\omega) &= \omega_n^2 - \omega^2 + i \omega \omega_n / Q_n, \\ E_r(\theta, \omega) &= \sum_n e_n(\omega) P_n(\cos \theta). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

闪电电流的时间尺度 (毫秒以下) 远短于舒曼共振的周期, $I_s(\omega)$ 在 ELF 段近似为常数 (等于一次闪电输送的电荷)。图 8 与演示 `atmoelec-schumann` 都用式 (B.1) 计算; 第 n 个峰在 $P_n(\cos \theta) = 0$ 的距离上消失。

峰宽与 Q_n 在 $\omega \approx \omega_n$ 附近, $\omega_n^2 - \omega^2 = (\omega_n - \omega)(\omega_n + \omega) \approx 2\omega_n(\omega_n - \omega)$, $\omega\omega_n/Q_n \approx \omega_n^2/Q_n$, 所以

$$|e_n|^2 \propto \frac{1}{4\omega_n^2 [(\omega_n - \omega)^2 + (\omega_n/2Q_n)^2]}.$$

功率降到峰值一半时 $|\omega - \omega_n| = \omega_n/(2Q_n)$, 半功率全宽 $\Delta\omega = \omega_n/Q_n$, 即 $\Delta f = f_n/Q_n$ 。时域中自由振荡 $\propto e^{-\omega_n t/(2Q_n)} \cos \omega_n t$, 振幅衰减率 $\gamma = \omega_n/(2Q_n) = \pi\Delta f$, 能量衰减率 2γ 。

随机分布的源：水平磁场的背景谱 磁强计测的是水平磁场。由第 7.3 节推导中的法拉第定律 $\frac{1}{a} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = \frac{\partial B_\varphi}{\partial t}$, 频率 ω 的分量 $B_\varphi = \frac{1}{i\omega a} \frac{\partial E_r}{\partial \theta}$ 。代入式 (B.1), 第 n 模式的水平磁场为

$$B_{\varphi,n} \propto \frac{(2n+1)I_s}{D_n(\omega)} P'_n \equiv b_n(\omega) P'_n,$$

其中 $P'_n \equiv dP_n(\cos \theta)/d\theta$, 因子 $i\omega$ 与 $1/(i\omega)$ 相消。 $n=0$ 项没有贡献：全球均匀的竖直电场没有水平梯度, 不产生水平磁场。设闪电在球面上均匀随机分布、彼此独立, 源在任意位置时场只依赖于源与观测点的角距离 θ (磁场方向垂直于源-站大圆, 其大小与方位无关)。各次闪电的相位随机, 总功率谱等于各次功率谱之和, 正比于对源位置的平均

$$\left\langle \left| \sum_n b_n P'_n \right|^2 \right\rangle = \sum_{n,m} b_n b_m^* \langle P'_n P'_m \rangle.$$

对球面平均, 分部积分 (边界项含 $\sin \theta$, 在两极处为零), 再用勒让德方程与式 (A.2):

$$\begin{aligned} \langle P'_n P'_m \rangle &= \frac{1}{2} \int_0^\pi P'_n P'_m \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi P_m \partial_\theta (\sin \theta P'_n) d\theta \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \int_0^\pi P_m P_n \sin \theta d\theta \\ &= \frac{n(n+1)}{2n+1} \delta_{nm}. \end{aligned}$$

交叉项消失, $|b_n|^2 \propto (2n+1)^2/|D_n|^2$ 乘以 $n(n+1)/(2n+1)$, 所以

$$S_B(\omega) \propto \sum_{n \geq 1} \frac{n(n+1)(2n+1)}{|D_n(\omega)|^2},$$

这就是图 9 (作图时 n 取到 40)。若改看竖直电场, 同样的推导给出 $\sum_n (2n+1) |\omega/D_n|^2$, 其中包含 $n=0$ 项 $1/\omega^2$: 它对应每次闪电使全球均匀场发生的准静态阶跃 (计入下层空气的漏电后按分钟量级弛豫), 在 ELF 段只给出随频率下降的低频背景, 不形成共振峰, 在 5 Hz 以下占主导。所以与磁强计观测比较时用水平磁场谱更直接。

C 复电高度与电离层下边界的损耗

气柱的“交流电阻” 频率 ω 下, 竖直电场 $E(z)e^{i\omega t}$ 在有电导的气柱中推动的总电流密度 (传导 + 位移) 为 $(\sigma + i\omega\epsilon_0)E$ 。与第 4.2 节的直流情形一样, 在水平尺度远大于气柱高度时, 这个总电流密度 j 不随高度变化 (电荷守恒)。于是两“极板”之间的电压

$$U = \int E dz = j \int_0^\infty \frac{dz}{\sigma(z) + i\omega\epsilon_0} \equiv j \frac{\tilde{h}_e}{i\omega\epsilon_0},$$

最后一步定义了复数的等效电高度 $\tilde{h}_e$: 若间隔 h 的两块理想极板之间是真空, $U = jh/(\mathrm{i}\omega\varepsilon_0)$ (纯电容)。所以

$$\tilde{h}_e = \int_0^\infty \frac{dz}{1 - \mathrm{i}\sigma(z)/(\omega\varepsilon_0)}. \quad (\text{C.1})$$

(第 5.3 节求电离层电势的日变化滞后时, 用的是同一个积分在 $\omega \rightarrow 0$ 时的展开。) 被积函数在 $\sigma \ll \omega\varepsilon_0$ 处约为 1 (这一段“算作”极板间隔), 在 $\sigma \gg \omega\varepsilon_0$ 处趋于 0 (导体, 不贡献电压)。

指数剖面 设 $\sigma(z) = \omega\varepsilon_0 e^{(z-h_0)/\zeta}$, h_0 是 $\sigma = \omega\varepsilon_0$ 的高度 (即式 (7.8) 中的实数 h_e), ζ 是这一高度附近电导率的标高。令 $u = e^{(z-h_0)/\zeta}$, $dz = \zeta du/u$:

$$\tilde{h}_e = \zeta \int_{u_0}^\infty \frac{du}{u(1 - \mathrm{i}u)} = \zeta \left[\ln u - \ln(1 - \mathrm{i}u) \right]_{u_0}^\infty, \\ u_0 = e^{-h_0/\zeta}.$$

上限 $u \rightarrow \infty$: $\ln \frac{u}{1 - \mathrm{i}u} \rightarrow \ln \frac{1}{-1} = \ln \mathrm{i} = \mathrm{i}\pi/2$; 下限: $\ln u_0 - \ln(1 - \mathrm{i}u_0) \approx -h_0/\zeta$ ($u_0 \ll 1$)。所以

$$\tilde{h}_e \approx h_0 + \mathrm{i}\frac{\pi\zeta}{2} \quad (h_0 \gg \zeta). \quad (\text{C.2})$$

实部就是式 (7.8) 定义的高度; 虚部来自 h_0 附近一个标高左右的“过渡层”: 那里传导电流与位移电流相当, 电场推动电荷做功, 能量变成热。(脚本对 $h_0 = 55$ 、 $\zeta = 3$ 数值积分核对了式 (C.2)。

电高度损耗给出的 Q 把两高度模型 (7.9) 中的 h_e 换成复数 $\tilde{h}_e$, $\omega^2 \propto \tilde{h}_e/h_m$ 。暂把 h_m 当作实数 (只计电高度附近的损耗), $\omega^2 = \omega_r^2(1 + \mathrm{i}\pi\zeta/(2h_0))$ 。由于 $\pi\zeta/(2h_0) \ll 1$, 开方后 $\omega \approx \omega_r[1 + \mathrm{i}\pi\zeta/(4h_0)]$ 。在 $e^{\mathrm{i}\omega t}$ 约定下 $\mathrm{Im}\omega > 0$ 表示衰减, 衰减率 $\gamma = \omega_r\pi\zeta/(4h_0)$, 于是

$$Q_e = \frac{\omega_r}{2\gamma} = \frac{2h_0}{\pi\zeta}. \quad (\text{C.3})$$

取 $h_0 \approx 54 \text{ km}$, 若用对流层的标高 $\zeta = H = 6 \text{ km}$ 粗略外推, $Q_e \approx 5.7$ 。磁高度附近的感应电流损耗使 h_m 也带有虚部, 两者合起来使实际的 Q_1 降到 4–5。这只是量级估计: 中间层的电导率剖面并不是单一指数, 需要用实测剖面数值计算。

D 加权最小二乘、协方差与误差传递

拟合 数据 (z_i, y_i) , y_i 的标准差 s_i 已知, 模型 $y = A + b(z - z_*)$, z_* 是我们选的参考点。令 $w_i = 1/s_i^2$, 使

$$\chi^2 = \sum_i w_i [y_i - A - b(z_i - z_*)]^2$$

最小。对 A 、 b 求偏导并令其为零 (正规方程):

$$\begin{aligned} A \sum w_i + b \sum w_i(z_i - z_*) &= \sum w_i y_i, \\ A \sum w_i(z_i - z_*) + b \sum w_i(z_i - z_*)^2 \\ &= \sum w_i(z_i - z_*)y_i. \end{aligned}$$

若取 $z_* = \bar{z} \equiv \sum w_i z_i / \sum w_i$ (加权平均), 则 $\sum w_i (z_i - \bar{z}) = 0$, 两个方程解耦:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i}, \\ b &= \frac{\sum w_i (z_i - \bar{z}) y_i}{\sum w_i (z_i - \bar{z})^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

不确定度与协方差 A 、 b 都是 y_i 的线性组合 $\sum c_i y_i$, 其方差为 $\sum c_i^2 s_i^2$ (各 y_i 独立)。代入得

$$\begin{aligned} \delta A^2 &= \frac{1}{\sum w_i}, \quad \delta b^2 = \frac{1}{\sum w_i (z_i - \bar{z})^2}, \\ \text{cov}(A, b) &= \sum_i \frac{w_i}{\sum w} \cdot \frac{w_i (z_i - \bar{z})}{\sum w (z_i - \bar{z})^2} s_i^2 = 0. \end{aligned}$$

以加权平均点为参考点时, 截距与斜率不相关。若改用 $z = 0$ 处的截距 $A_0 = A - b\bar{z}$, 则 $\delta A_0^2 = \delta A^2 + \bar{z}^2 \delta b^2$, $\text{cov}(A_0, b) = -\bar{z} \delta b^2$: $\bar{z}$ 越远离 0, 相关越强 (实验题中相关系数为 -0.90)。

误差传递 对函数 $f(A, b)$, 一阶泰勒展开 $\delta f = f_A \delta A + f_b \delta b$, 取平方的平均:

$$\sigma_f^2 = f_A^2 \delta A^2 + f_b^2 \delta b^2 + 2 f_A f_b \text{cov}(A, b).$$

用不相关的参数 (A 、 b) 计算时最后一项为零, 这正是选 $\bar{z}$ 为参考点的好处。

拟合优度 若模型正确、 s_i 估计正确, $\chi_{\min}^2$ 的期望值为自由度 $\nu = N - 2$, 标准差约 $\sqrt{2\nu}$ 。 χ^2/ν 远大于 1 说明模型不对或误差被低估; 远小于 1 说明误差被高估。

E 名词解释

表 4 名词解释 (按出现顺序)

中文	英文	一句话定义
晴天	fair weather	测站附近无雷暴、降水、雾、低云与强风的天气
电位梯度	potential gradient (PG)	$dV/dz = -E_z$, 晴天为正
小离子	small ion	带一个电荷、由几到十几个分子组成的团簇, 迁移率约 $1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2/(\text{V s})$
迁移率	mobility	单位场强下的漂移速度
极性电导率	polar conductivity	只由一种符号离子贡献的电导率 $\sigma_{\pm} = en_{\pm}\mu_{\pm}$
弛豫时间	relaxation time	导电介质中净电荷衰减的时间常数 ε_0/σ
空地电流	air-earth current	晴天区从大气流入地面的传导电流
柱电阻	columnar resistance	单位面积气柱从地面到电离层的电阻
电离层电势	ionospheric potential	电离层相对地面的电势, 约 250 kV
边界层	boundary layer	受地面影响、混合强烈、气溶胶多的最低 1–2 km 大气
卡内基曲线	Carnegie curve	海上晴天电场按世界时的平均日变化
Wilson 电流	Wilson current	雷暴云顶流向电离层的传导电流
回击	return stroke	先导接地后沿通道上行的大电流过程
跨步电压	step voltage	地面上相距一步的两点之间的电势差
电晕放电	corona discharge	尖端附近强场使空气局部电离的稳定放电
TEM 波	transverse electromagnetic wave	电场、磁场都垂直于传播方向的导波
截止频率	cutoff frequency	导波模式能够传播的最低频率
勒让德多项式	Legendre polynomial	勒让德方程在 $x = \pm 1$ 都有限的多项式解 P_n
电高度、磁高度	electric / magnetic height	竖直电场线、水平电流分别“终止”的等效高度
品质因数	quality factor	共振频率与半功率全宽之比 $f_n/\Delta f$
格迪恩电容器	Gerdien condenser	抽气式同轴圆筒, 用收集电流测极性电导率