

几何像差：赛德尔五像差的来源、效果与消除

第 43 届决赛短训讲义组

2026 年 10 月

目录

1 导读	2
2 名词与符号	5
3 前置模块：光程、近轴光学与波像差	6
3.1 光程、费马原理与端点变分	6
3.2 近轴光学：符号约定与两条基本光线	7
3.3 光阑与光瞳、视场与光瞳坐标	8
3.4 波像差、参考球与横向像差	9
4 像差的来源（一）：对称性与波像差的展开	12
4.1 三个不变量	12
4.2 逐阶展开：零阶、二阶与四阶	13
4.3 赛德尔和与本讲的约定	14
5 像差的来源（二）：系数从哪里来	15
5.1 球面镜与抛物面镜的球差	15
5.2 光阑移动：一个技巧生出四种像差	17
5.3 单个折射球面的五个赛德尔和	18
5.4 多个面：各面贡献相加	21
5.5 薄透镜：形状因子与位置因子	22
6 五种像差逐一：来源、效果、示例与消除	23
6.1 球差	23
6.2 彗差	26
6.3 像散	27

1 导读	2
6.4 场曲	29
6.5 畸变	30
6.6 色差（补充）	31
6.7 小结：五种像差一览	33
7 消像差的设计原理	33
7.1 非球面与 Schmidt 相机	33
7.2 阿贝正弦条件与齐明系统	35
7.3 对称原理	36
7.4 RC 望远镜与哈勃	37
8 数值光线追迹	38
9 决赛风格例题	40
10 实验与数据处理：Hartmann 光阑法测透镜球差	46
11 小结：推导链	48
A 单个折射球面轴上球差的展开	52
B 薄透镜赛德尔和的推导	53
C RMS 波像差与最佳焦面的积分	54
D RC 圆锥常数的推导	54
E 加权最小二乘	56

1 **导读**

一面理想的透镜应当把物上每一点发出的光会聚到像上的一点。近轴光学（高斯光学）告诉我们像在哪里、多大，但它只在光线贴近光轴、与光轴夹角很小时才成立。孔径一大、视场一宽，同一物点发出的光线就不再交于一点：像变成一团光斑，或者像点的位置偏离高斯像的位置。这种实际成像与理想成像之间的偏差叫像差。本讲回答四个问题：像差从哪里来、有几种、各长什么样、怎样消除。答案的核心是 1856 年赛德尔（Ludwig Seidel）给出的五种“三阶”几何像差，它们全部可以从一个对称性论证加一次泰勒展开得到。

背景：哈勃望远镜的 2.2 微米

1990 年 4 月 24 日，哈勃空间望远镜（HST）由航天飞机发现号（STS-31）送入轨道 [1]。它的光学系统是口径 2.4m、焦比 $f/24^a$ （系统焦距 57.6m）的 Ritchey-Chrétien（RC）型反射望远镜，主镜与副镜都是双曲面 [2]。按设计，主镜顶点曲率半径 11 040.0mm，圆锥常数 $\kappa_1 = -1.0022985$ [2]。入轨后拍出的星像却是一个明亮的核外面套着一圈角秒量级的晕（例题 1 将算出几何光斑直径约 $1.5''$ ）：主镜的边缘被磨得太“平”了，按 NASA 的说法，边缘偏差约 $2.2\mu\text{m}$ [3]，Burrows 等人由在轨星像反推为 $2.3\mu\text{m}$ ，相当于圆锥常数从设计值变成约 -1.014 [1]。后来为制造校正光学而采用的官方估计是 $\kappa_1 = -1.0139 \pm 0.0002$ [4]。Burrows 等人测得，边缘光线的焦点与近轴光线的焦点在 $f/24$ 焦面处相距约 43mm [1]。

调查委员会（Allen 委员会）查明：磨制主镜时用作“标尺”的反射式零位校正器中，一块场镜的位置偏了约 1.3mm [2]。误差的性质是纯粹的球差。1993 年 12 月 2 日发射的第一次维修任务（STS-61，奋进号）装上了自带校正光学的第二代广角行星相机 WFPC2，并为其其他仪器装上了含五对校正反射镜的 COSTAR [3]。图 1 是同一星系核在校正前后的照片。本讲第 9 节例题 1 会从“ $2.2\mu\text{m}$ ”出发，一步步算出约 4cm 的焦点分离（Burrows 等人测得 43mm）、角秒级的光斑、地面检验需要的精度和校正方案。

^a焦比（F 数）、圆锥常数的定义分别见第 3.3、5.1 节。



图 1 星系 M100 的核心区域。左：校正前用第一代广角行星相机（WFPC1）拍摄，主镜球差使星像弥散；右：第一次维修任务装上自带校正光学的 WFPC2 之后拍摄。（图源：NASA, STScI, 新闻稿 STScI-PRC1994-01 (1994-01-13)；按 STScI 版权说明（www.stsci.edu/copyright）属公有领域） [5]

背景：从赛德尔到手机镜头

1840 年，Petzval 为 Voigtländer 设计了 $f/3.6$ 左右的人像镜头，曝光时间比当时的风景镜头短得多 [6]；他还给出了决定像面弯曲的“Petzval 和” [7]。1856 年，赛德尔在《天文学通报》上分三期发表论文，系统推导了光线经过一组折射面后偏离理想像点的“三阶项”，给出了五种像差的计算公式 [8]。1893 年 H. D. Taylor 申请了三片式（Cooke 三片式，由 Taylor, Taylor & Hobson 公司生产）镜头的专利：只用三片单透镜，靠正负透镜的分离同时控制五种像差和色差 [9]。1930 年，B. Schmidt 在汉堡天文台做出第一台“Schmidt 相机”：一块球面镜加一块

放在球心处的非球面校正板，得到大视场、无彗差的照相望远镜 [10]；Kepler 空间望远镜仍是这种结构 [11]。约 1910 年，Ritchey 与 Chrétien 找到了让双镜望远镜同时消去球差与彗差的双曲面组合，Ritchey 于 1927 年做成第一台 [12]；哈勃望远镜正是这种 RC 结构 [2]。今天的手机主摄镜头常由 6-7 片两面都是高次非球面的塑料镜片组成，非球面系数一直写到 r^{14} 甚至 r^{16} 项 [13, 14]。

学习目标 学完本讲，你应当能够：

1. 由费马原理出发，定义波像差 W ，推出横向像差与波像差的关系 $\varepsilon = -(R/n')\nabla W$ ；
2. 用旋转对称性证明 W 只依赖于 h^2 、 ρ^2 、 $h\rho\cos\theta$ ，展开得到球差、彗差、像散、场曲、畸变五项，并说明为什么二阶项不算像差；
3. 对每一种像差说出：来自 W 的哪一项、光斑或像的样子、随孔径与视场的标度、一个具体数值例子、以及消除它的设计原理；
4. 会计算：球面镜与抛物面镜的球差，薄透镜球差随形状因子与位置因子的变化，光阑移动对彗差、像散、畸变的影响，Petzval 和；
5. 推导阿贝正弦条件、对称原理和消色差条件，理解 Schmidt 相机、RC 望远镜的设计思想；
6. 写出矢量形式的斯涅耳定律，做实际光线追迹，并用它检验赛德尔理论；处理 Hartmann 光阑法的数据。

前置知识：本讲需要的普通物理与数学

- 光学：折射定律、反射定律、费马原理（本讲会重新叙述）、薄透镜成像公式、球面镜成像公式；
- 数学：泰勒展开、多元函数的偏导数与梯度、矢量点乘与叉乘、极坐标、最小二乘（附录 E 给出推导）。

本讲新引入的概念（光程的端点变分、波前与参考球、波像差、光瞳、主光线与边缘光线、拉格朗日不变量、赛德尔和、光阑移动、形状因子与位置因子、正弦条件、阿贝数等）都在首次使用前给出定义与推导。

建议学时 共 2 学时（约 90 分钟）：前置模块 20 分钟；像差的来源（对称性展开与系数计算）25 分钟；五种像差逐一讲解 25 分钟；消像差设计原理与光线追迹 20 分钟。例题与实验题供课后练习，附录供深入阅读。

推导路线 费马原理 $\Rightarrow$ 波前 $\perp$ 光线、端点变分公式 $\Rightarrow$ 横向像差 $\varepsilon = -(R/n')\nabla W \Rightarrow$ （旋转对称） $W(h^2, \rho^2, h\rho\cos\theta)$ 的展开 $\Rightarrow$ 五个赛德尔项 $\Rightarrow$ （球面镜、单个折射面、光阑移动、薄透镜）系数怎样计算 $\Rightarrow$ 每种像差的效果与标度 $\Rightarrow$ 消像差原理（非球面、正弦条件、对称原理、Petzval 和、消色差） $\Rightarrow$ 实际光线追迹检验。

2 名词与符号

两个名称 几何像差指不考虑衍射、只按光线计算的像差，本讲第 4–7 节都是几何像差；色差来自折射率随波长变化，在第 6.6 节作为补充。“三阶像差”“初级像差”“赛德尔像差”说的是同一组五种像差，第 4.2 节解释这个名字。

表 1 本讲符号表（长度单位一般用 mm；波像差常用 μm ）

符号	含义	单位
n, n'	某一面之前、之后介质的折射率；反射后取 $n' = -n$	1
$[AB]$	从 A 到 B 沿光线的光程 $\int n \, ds$	m
$c = 1/r$	球面（或非球面顶点处）的曲率， r 为曲率半径	m^{-1}
κ	二次曲面的圆锥常数（ $\kappa = 0$ 球面， -1 抛物面）	1
y, u	近轴边缘光线在某面的高度、斜率（ $u = dy/dz$ ）	m, 1
$\bar{y}, \bar{u}$	近轴主光线在某面的高度、斜率	m, 1
$A, \bar{A}$	折射不变量 $n(u + yc)$ 、 $n(\bar{u} + \bar{y}c)$	1
H	拉格朗日不变量 $n(\bar{u}y - u\bar{y})$	m
η, η'	物高、高斯像高	m
h	归一化视场 $\eta/\eta_{\max}$ （ $0 \leq h \leq 1$ ）	1
a	出瞳半径	m
R	参考球半径（出瞳中心到高斯像点的距离）	m
ρ, θ	出瞳上的归一化极坐标（ θ 从子午方向量起）	1, rad
x_p, y_p	归一化光瞳直角坐标 $x_p = \rho \sin \theta$, $y_p = \rho \cos \theta$	1
W	波像差（实际波前超前于参考球为正）	m
W_{klm}	W 中 $h^k \rho^l \cos^m \theta$ 项的系数	m
$S_I - S_V$	赛德尔和	m
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	横向像差（像面上实际交点减高斯像点）	m
δ	观察面相对高斯像面的轴向移动（远离出瞳为正）	m
s	光阑移动参数 $\Delta \bar{y}/y$	1
$\varphi = 1/f$	光焦度； f 焦距	m^{-1} , m
q, p	薄透镜的形状因子、位置因子（第 5.5 节）	1
F	焦比（F 数）， $F = f/(2a_{\text{EP}})$ ， a_{EP} 为入瞳半径	1
ν	阿贝数 $(n_d - 1)/(n_F - n_C)$	1
λ	波长	m

3 前置模块：光程、近轴光学与波像差

3.1 光程、费马原理与端点变分

定义：光程

光在折射率为 n 的介质中走过几何长度 ds ，对应的光程为 $n ds$ 。沿一条路径从 A 到 B 的光程记为

$$[AB] = \int_A^B n ds. \quad (3.1)$$

光在介质中的速度是 c/n ，所以 $[AB]/c$ 就是光走完这段路所用的时间。光程相等的点，光到达的时刻相同，相位也相同。

定义：费马原理

光从 A 到 B 的实际路径，使光程对路径的一切微小变形取驻值：路径变形 $\mathcal{O}(\epsilon)$ 时，光程的变化是 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ，没有一阶项。在均匀介质中它给出直线传播，在界面上给出反射定律与折射定律（普通物理教材中的标准推导）。

我们需要费马原理的两个推论。第一个回答：固定的两点之间换一条“差不多”的路径，光程差多少？第二个回答：把终点挪一点，光程变多少？

要点：推论 1：折线路径的光程误差是二阶小量

设 $A \rightarrow B$ 的实际光线经过中间某点 S 。若我们故意走一条“在 S' 处折一下”的路径 $A \rightarrow S' \rightarrow B$ (S' 距实际光线 $\mathcal{O}(\epsilon)$ ，两段各自都是实际光线)，则

$$[AS'] + [S'B] - [AB] = \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

原因：折线路径是实际路径的一个 $\mathcal{O}(\epsilon)$ 的变形，而实际路径的光程是驻值。这个推论将反复使用：只要路径的偏离是小量，用“近似路径”算光程，误差只是偏离量的平方。

推导：推论 2：端点变分公式

先看均匀介质中的一段直线 $A \rightarrow B$ ，长 $\ell = |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|$ ，单位方向 $\hat{\mathbf{k}} = (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)/\ell$ 。把终点移动 $\delta \mathbf{r}_B$ ，对 $\ell^2 = (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)$ 取微分：

$$2\ell \delta \ell = 2(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \cdot \delta \mathbf{r}_B \quad \Rightarrow \quad \delta \ell = \hat{\mathbf{k}} \cdot \delta \mathbf{r}_B.$$

同理移动起点 $\delta \mathbf{r}_A$ 时 $\delta \ell = -\hat{\mathbf{k}} \cdot \delta \mathbf{r}_A$ 。

对穿过若干折射面的光线，端点移动后，新的实际光线与原光线在中间各面上的交点也会移动 $\mathcal{O}(\delta r)$ 。但由推论 1，中间部分路径的这种变形只贡献二阶小量。于是到一阶，光程的变化只来自两端的直线段：

$$\delta[AB] = n_B \hat{\mathbf{k}}_B \cdot \delta \mathbf{r}_B - n_A \hat{\mathbf{k}}_A \cdot \delta \mathbf{r}_A, \quad (3.2)$$

$\hat{\mathbf{k}}_A$ 、 $\hat{\mathbf{k}}_B$ 是光线在起点、终点处的单位方向， n_A 、 n_B 是那里的折射率。

要点：马吕斯定理：光线垂直于波前

从同一点光源 O 出发，光程 $[OP]$ 等于同一常数的所有点 P 组成一个曲面，称为波前（等相位面）。在波前上任意移动终点 $\delta \mathbf{r}_P$ ($\delta \mathbf{r}_P$ 沿波前的切向)，光程不变，由式 (3.2)， $n \hat{\mathbf{k}}_P \cdot \delta \mathbf{r}_P = 0$ 。所以光线方向 $\hat{\mathbf{k}}_P$ 垂直于波前上的一切切向，即光线沿波前的法线方向（各向同性介质）。理想成像时，像方波前是以像点为球心的球面；有像差时，波前偏离球面，光线不再交于一点。

3.2 近轴光学：符号约定与两条基本光线**假设：本讲的符号约定**

- 光从左向右传播，光轴为 z 轴；距离从各面顶点量起，向右为正；曲率 $c = 1/r$ ，球心在顶点右方时 $c > 0$ 。
- 高度向上为正；光线的斜率 $u = dy/dz$ （小角度时就是光线与轴的夹角，向上为正）。
- 反射镜当作折射率由 n 变为 $n' = -n$ 的“折射面”，反射后的距离与 n' 一起变号。这样所有公式对透镜和反射镜通用。
- 实物在左方，物距 $l < 0$ ；实像在右方，像距 $l' > 0$ 。

推导：近轴折射公式

一条光线以高度 y 、斜率 u 射到曲率为 c 的球面上。球面在该点的法线经过球心 ($z = r, y = 0$)，法线的斜率为 $(0 - y)/(r - 0) = -yc$ 。入射角 i 等于光线斜率与法线斜率之差（小角度）：

$$\begin{aligned} i &= u + yc, \\ i' &= u' + yc. \end{aligned} \quad (3.3)$$

近轴时 $\sin i \approx i$ ，斯涅耳定律 $n \sin i = n' \sin i'$ 变成 $ni = n'i'$ 。代入式 (3.3)，得到近轴折射公式与转移公式（光线在两面间走直线，间距 d ）：

$$\begin{aligned} n'u' &= nu - yc(n' - n), \\ y_{\text{下一面}} &= y + du'. \end{aligned} \quad (3.4)$$

量 $A \equiv ni = n(u + yc)$ 在折射前后相等 ($A = A'$)，叫折射不变量。

检验：对轴上物点， $u = -y/l$ ，像点 $u' = -y/l'$ 。代入式 (3.4) 得单个球面的成像公式 $n'/l' - n/l = (n' - n)c$ 。对反射镜取 $n' = -n = -1$ ： $1/l' + 1/l = 2c = 2/r$ ，即熟悉的球面镜公式（焦距 $f = r/2$ 的大小）。两个球面贴在一起（薄透镜，空气中，折射率 n ），两次使用式 (3.4) 得 $u' = u - y\varphi$ ， $\varphi = (n - 1)(c_1 - c_2) = 1/f$ ，即磨镜者公式。

定义：两条基本近轴光线

- 边缘光线：从轴上物点出发、恰好擦过孔径光阑边缘的光线（定义见第 3.3 节）。它在各面的高度、斜率记为 y 、 u 。
- 主光线：从视场边缘的物点出发、穿过孔径光阑中心的光线。它的高度、斜率记为 $\bar{y}$ 、 $\bar{u}$ 。

近轴光学是线性的：任何一条近轴光线都可以写成这两条光线的线性组合。

推导：拉格朗日不变量

定义 $H = n(\bar{u}y - u\bar{y})$ 。在两面之间转移时, $y \rightarrow y + du$, $\bar{y} \rightarrow \bar{y} + d\bar{u}$, n 、 u 、 $\bar{u}$ 不变:

$$n[\bar{u}(y + du) - u(\bar{y} + d\bar{u})] = n(\bar{u}y - u\bar{y}),$$

不变。折射时 y 、 $\bar{y}$ 不变, 由式 (3.4), $n'u' = nu - yc\Delta n$, $n'\bar{u}' = n\bar{u} - \bar{y}c\Delta n$ ($\Delta n = n' - n$), 所以

$$\begin{aligned} n'(\bar{u}'y - u'\bar{y}) &= (n\bar{u} - \bar{y}c\Delta n)y - (nu - yc\Delta n)\bar{y} \\ &= n(\bar{u}y - u\bar{y}), \end{aligned}$$

也不变。因此 H 沿整个系统守恒, 叫拉格朗日不变量。在物面上 $y = 0$ 、 $\bar{y} = \eta$, 得 $H = -nu\eta$; 在像面上 $H = -n'u'\eta'$ 。由此得横向放大率 $m = \eta'/\eta = nu/(n'u')$ 。 H 的大小衡量系统“同时容纳多大口径与多大视场”, 五种像差中与视场有关的项都含 H 。

注：与 CPhO 已考内容的关系

第 40 届复赛考过“智能手机镜头的主点与等效焦距”, 本讲只把主点、焦距当作近轴工具, 不再展开; 第 38 届复赛考过“完美会聚的非球面透镜”(笛卡尔卵形面), 它是“对一个物点消球差”的特例, 本讲第 7.1 节会一笔带过。

3.3 光阑与光瞳、视场与光瞳坐标

定义：孔径光阑、入瞳与出瞳

- 孔径光阑：系统中限制轴上物点光束大小的那个开孔（可以是透镜框，也可以是专门的光阑）。
- 入瞳：孔径光阑被它前面的光学元件所成的像（从物方看到的光阑）；出瞳：孔径光阑被它后面的元件所成的像（从像方看到的光阑）。光阑前（后）没有元件时，入瞳（出瞳）就是光阑本身。
- 主光线经过光阑中心，所以在物方它的延长线经过入瞳中心，在像方经过出瞳中心（图 2）。
- 焦比（F 数） $F = f/D_{EP}$, D_{EP} 为入瞳直径；物在无穷远时，像方边缘光线斜率 $u' = -D_{EP}/(2f) = -1/(2F)$ 。

定义：视场 h 、光瞳坐标 (ρ, θ) 、子午面与弧矢面

- 因为系统绕轴旋转对称，总可以把坐标轴转到使物点位于 y 轴上，物高 $\eta = h\eta_{\max}$, $h \in [0, 1]$ 叫归一化视场。
- 出瞳平面上，以出瞳中心为原点、出瞳半径 a 为单位，光线穿过出瞳的位置写成 $(x_p, y_p) = \rho(\sin \theta, \cos \theta)$, $0 \leq \rho \leq 1$ 。注意 θ 从 y 轴量起（图 3）。
- 包含光轴和物点的平面叫子午面（这里是 y - z 平面），在子午面内的光线 ($\theta = 0^\circ$ 或 180°)

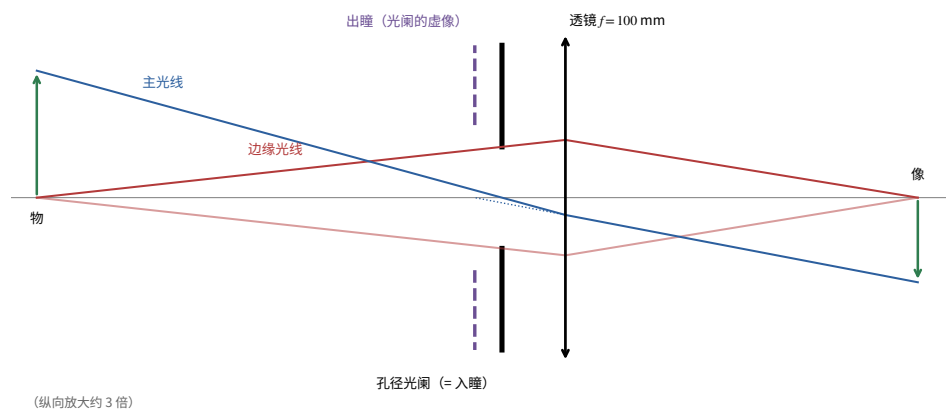


图 2 薄透镜 ($f = 100 \text{ mm}$) 与透镜前 30 mm 处的孔径光阑。光阑前没有元件，所以入瞳就是光阑本身；出瞳是光阑经透镜所成的虚像（在透镜前 42.9 mm ，半径放大到 1.43 倍）。红线：边缘光线；蓝线：主光线，其像方部分的反向延长线（点线）经过出瞳中心。各量由近轴公式算得。

叫子午光线；包含主光线、垂直于子午面的平面叫弧矢面，其中的光线 ($\theta = \pm 90^\circ$) 叫弧矢光线。

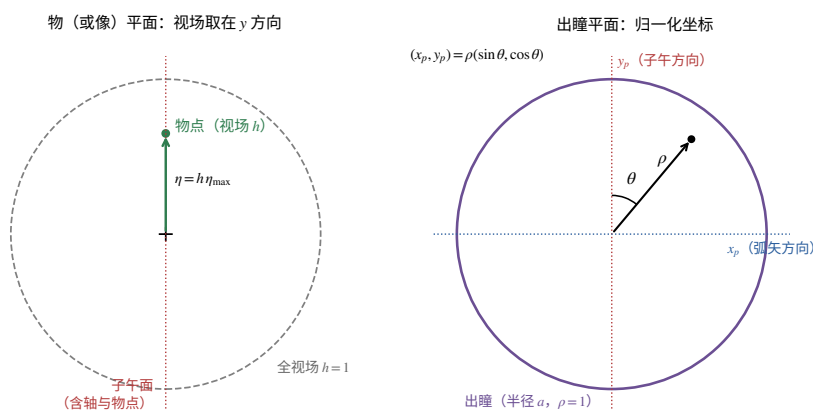


图 3 左：物面上取视场在 y 方向，子午面含光轴与物点。右：出瞳上的归一化坐标， $y_p = \rho \cos \theta$ 为子午方向， $x_p = \rho \sin \theta$ 为弧矢方向。

3.4 波像差、参考球与横向像差

定义：参考球与波像差

设物点 O 的高斯像点（近轴光学给出的像点）为 P'_0 ，出瞳中心为 E' 。以 P'_0 为球心、过 E' 的球面叫参考球，半径 $R = |E'P'_0|$ 。理想成像时像方波前正是参考球。实际光线经过出瞳附近时与参考球交于点 Q ，定义波像差

$$W(Q) = [OE'] - [OQ], \quad (3.5)$$

两个光程都沿实际光线计算（ $[OE']$ 沿到达 E' 的光线）。物理意义：过 E' 的实际波前在 Q 所在的光线上，比参考球向前（朝像点）多走了 W/n' 的距离； $W > 0$ 表示实际波前在该处超前。 W 依赖于物点（视场 h ）与光线在出瞳上的位置 (ρ, θ) ，记作 $W(h; \rho, \theta)$ 。

注：关于约定

不同教材对 W 的正负号、对光瞳坐标的取法并不统一（例如 Born & Wolf 的像差函数与本讲差一个负号，系数归一化也不同）[15]。本讲采用 Wyant 与 Creath 的约定 [16]： W 以实际波前超前为正， ρ 、 h 都归一化到 1，赛德尔和与波像差系数的关系见式 (4.4)。用其他书时请先核对约定。

推导：横向像差与波像差的关系

要算的量：像方折射率为 n' 。从出瞳上点 Q 出发的实际光线到达高斯像面时，偏离高斯像点 P'_0 的距离 $\epsilon = (\epsilon_x, \epsilon_y)$ ，叫横向像差。

第一步（写出实际波前）：以 P'_0 为原点用球坐标描述像方。参考球是 $r = R$ ；由定义，实际波前在每个方向上比参考球更靠近 P'_0 一段 W/n' ，即实际波前是曲面 $g(\mathbf{r}) \equiv r + W/n' = R$ 。这里 W 看成参考球上位置的函数。

第二步（求法线）：曲面 $g = \text{常数}$ 的法线沿 $\nabla g = \hat{\mathbf{r}} + \nabla_t W/n'$ ， ∇_t 表示沿球面切向的梯度。由马吕斯定理，光线沿法线、指向像点一侧，方向为

$$\hat{\mathbf{k}} \approx -\hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{n'} \nabla_t W,$$

其中 $-\hat{\mathbf{r}}$ 是从 Q 指向 P'_0 的方向。这一步只保留了 W 的一阶项（ W 本身是小量）。

第三步（传播到像面）：光线走过约 R 的距离到达像面。沿 $-\hat{\mathbf{r}}$ 的部分正好到达 P'_0 ，附加的横向方向分量 $-\nabla_t W/n'$ 使落点偏开

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{R}{n'} \frac{\partial W}{\partial X_p}, \\ \epsilon_y &= -\frac{R}{n'} \frac{\partial W}{\partial Y_p}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

这里把参考球上的切向坐标近似换成出瞳平面上的直角坐标 (X_p, Y_p) 。这一近似，以及“像面垂直于 $\hat{\mathbf{r}}$ ”的近似，带来的误差都比 W 的一阶项高阶，不影响本讲的四阶（赛德尔）结果。

第四步（归一化）：用 $X_p = a x_p$ 、 $Y_p = a y_p$ ，并注意像方边缘光线的斜率 $u' = -a/R$ （从出瞳边缘 $Y_p = a$ 射向轴上像点），

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{R}{n'a} \frac{\partial W}{\partial x_p} = \frac{1}{n'u'} \frac{\partial W}{\partial x_p}, \\ \epsilon_y &= -\frac{R}{n'a} \frac{\partial W}{\partial y_p} = \frac{1}{n'u'} \frac{\partial W}{\partial y_p}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

物在无穷远、空气中时， $R/(n'a) = -1/u' = 2F$ 。

检验：量纲、符号与一个特例

量纲： W 是长度， $\partial W / \partial X_p$ 无量纲，乘 R 得长度。符号：若边缘波前超前 ($W > 0$ 且随 Y_p 增大)，光线比指向 P'_0 的方向更向下偏，越过轴到达 $\varepsilon_y < 0$ 的一侧 (图 4)，这正是“边缘光线焦点提前”的球差。特例见下面的离焦。

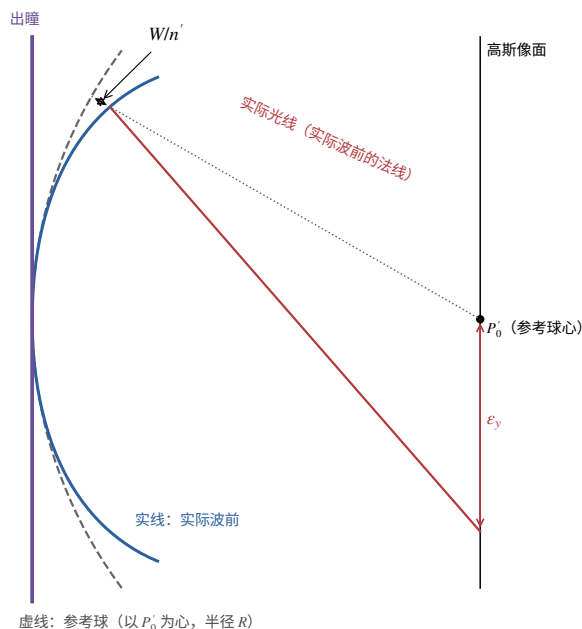


图 4 参考球 (虚线, 以高斯像点 P'_0 为心)、实际波前 (实线) 与波像差 W 。实际光线是实际波前的法线, 它在高斯像面上偏开 ε_y 。为看清楚, W 被放大了许多倍 ($W = \rho^4$ 型, 边缘超前)。

推导：离焦与倾斜：两种“假像差”

离焦。设实际波前完美会聚于轴上、距出瞳 R 处, 但我们在距出瞳 $R + \delta$ 处观察 ($\delta > 0$ 表示观察面远离出瞳), 并把参考球的球心取在观察点。从出瞳高度 Y_p 射向焦点的光线越过焦点后, 在观察面上的高度为 $-Y_p \delta / R$ (相似三角形)。另一方面, 相对于新参考球, 实际波前的曲率更大, 边缘超前, 设 $W = W_{020} y_p^2 = W_{020} Y_p^2 / a^2$ (只写子午方向, 弧矢方向相同)。把它代入式 (3.6), 要求给出同样的横向偏移:

$$-\frac{R}{n'} \cdot \frac{2W_{020}Y_p}{a^2} = -\frac{Y_p \delta}{R}.$$

解出

$$W_{020} = \frac{n'a^2}{2R^2} \delta = \frac{n'u'^2}{2} \delta. \quad (3.8)$$

这就是说: 观察面移动 δ 等于给波像差附加一项 $\frac{1}{2}n'u'^2\delta\rho^2$ 。反过来读: 已有的 $W_{020}\rho^2$ 可以通过把观察面移到 $\delta = -2W_{020}/(n'u'^2)$ 处而完全消去 ($W_{020} > 0$ 时边缘超前、焦点更靠近出瞳, 应向出瞳方向移动)。所以 $W_{020}\rho^2$ 不是“像差”, 只是“像面选在哪里”。

倾斜。若 $W = W_{111} y_p$ (与 ρ 成正比的项), 由式 (3.7), 所有光线一起偏移 $\varepsilon_y = -RW_{111}/(n'a)$, 与 ρ 、 θ 无关: 光束仍会聚于一点, 只是这一点不在高斯像点上。这相当于像点平移, 也不是使像变模糊的像差。

要点: 波像差的“断开光路”算法

由定义 (3.5), $W(Q) = [OE'] - [OQ]$ 。因为 Q 与 E' 都在以 P'_0 为心、半径 R 的球上, 两边各加 $n'R$:

$$\begin{aligned} W(Q) &= V(E') - V(Q), \\ V(Q) &\equiv [OQ] + n' |QP'_0|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$V(Q)$ 是一条“在 Q 处折断”的路径 $O \rightarrow Q \rightarrow P'_0$ 的光程: $O \rightarrow Q$ 走实际光线, $Q \rightarrow P'_0$ 走直线。注意 $Q \rightarrow P'_0$ 一段不是实际光线 (实际光线从 Q 射向 $P'_0 + \varepsilon$), 所以不能直接套用推论 1。要用的是下面两个事实。

(i) V 随折点位置变化很慢。把 Q 挪动 $\delta \mathbf{r}$: 由端点变分公式 (3.2), $[OQ]$ 变化 $n' \hat{\mathbf{k}}_{\text{实}} \cdot \delta \mathbf{r}$; 直线段 $n' |QP'_0|$ 变化 $-n' \hat{\mathbf{k}}_{Q \rightarrow P'_0} \cdot \delta \mathbf{r}$ 。所以 $\delta V = n'(\hat{\mathbf{k}}_{\text{实}} - \hat{\mathbf{k}}_{Q \rightarrow P'_0}) \cdot \delta \mathbf{r}$ 。两个方向之差就是光线的像差角 $\mathcal{O}(\varepsilon/R)$ 。若折点的位置本身只差一个像差量级的小距离, V 的误差就是两个像差量级小量之积。

(ii) 固定两 endpoints 时, 近似路径的光程误差是二阶的。从 O 到 Q , 若不走实际光线, 而走一条与它相差 $\mathcal{O}(\Delta)$ 的路径 (例如沿近轴光线经过各面的那些点), 由推论 1 (两 endpoints 固定), 光程只差 $\mathcal{O}(\Delta^2)$ 。

所以计算 W 时, 可以沿近轴光线的路径计算从物点经各面到高斯像点的光程: 近轴光线与实际光线的偏离是三阶小量, 引起的误差是六阶, 在四阶 (赛德尔) 精度下可以忽略。第 5 节计算各种系统的像差系数时都用这个办法。

4 像差的来源 (一): 对称性与波像差的展开

4.1 三个不变量

假设: 旋转对称系统

本讲讨论的系统由绕同一光轴旋转对称的折射面、反射面组成 (共轴系统), 各面没有偏心与倾斜。这样的系统还对任何包含光轴的平面镜面对称。

波像差依赖于两个二维矢量: 物点在物面上的位置 $\mathbf{h}$ (归一化), 以及光线在出瞳上的位置 $\boldsymbol{\rho} = (x_p, y_p)$ 。

推导: W 只能依赖 $h^2, \rho^2, \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\rho}$

第一步 (旋转): 把整个系统连同物点和光线绕光轴转一个角度 α , 系统不变, 所以 W 不变: $W(R_\alpha \mathbf{h}, R_\alpha \boldsymbol{\rho}) = W(\mathbf{h}, \boldsymbol{\rho})$, R_α 为平面转动。两个平面矢量在转动下不变的组合有四个: $\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$ 、 $\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}$ 、 $\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\rho}$, 以及“叉积” $h_x \rho_y - h_y \rho_x$ 。(两个平面矢量共有 4 个分量, 转动用掉 1 个自由度, 独立不变量只有 3 个; 四者满足 $(\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\rho})^2 + (h_x \rho_y - h_y \rho_x)^2 = h^2 \rho^2$ 。)

第二步 (镜面对称): 系统对包含光轴的平面作镜面反射也不变。镜面反射使叉积变号, 而 W 不变, 所以叉积只能以平方形式出现, 而它的平方可以用另外三个不变量表示。

第三步 (解析性): W 是光线坐标的光滑函数, 可以对 h_x, h_y, ρ_x, ρ_y 作泰勒展开。一个只依赖于转动不变量的光滑函数, 可以展开成这些不变量的幂级数 (不会出现 $|\boldsymbol{\rho}| = \rho$ 的奇次方这类在原点不光滑的项)。

结论: 取 $\mathbf{h} = (0, h)$, $\boldsymbol{\rho} = \rho(\sin \theta, \cos \theta)$,

$$W = W(h^2, \rho^2, h\rho \cos \theta). \quad (4.1)$$

4.2 逐阶展开: 零阶、二阶与四阶

把 W 按三个不变量的幂次展开。定义一个项的阶数为 h 与 ρ 的总次数; 由于每个不变量都是二次的, 阶数只能是 $0, 2, 4, \dots$ 。把 $h^k \rho^l \cos^m \theta$ 项的系数记为 W_{klm} :

零阶 W_{000} : 常数, 各条光线一样, 对成像无影响 (“活塞项”)。

二阶 三个不变量各一次:

$$W^{(2)} = W_{200}h^2 + W_{111}h\rho \cos \theta + W_{020}\rho^2. \quad (4.2)$$

$W_{200}h^2$ 与 ρ 无关, 是随视场变化的活塞项; $W_{020}\rho^2$ 是离焦, $W_{111}h\rho \cos \theta$ 是倾斜 (像点沿 y 平移, 平移量 $\propto h$, 即放大率的改变)。由第 3.4 节, 离焦和倾斜都可以通过重新选择像面位置和像的放大率完全吸收。近轴光学恰好就是使这两项为零的那个选择: 近轴像面使 $W_{020} = 0$, 近轴放大率使 $W_{111} = 0$ 。所以二阶项不是像差, 它们就是高斯光学本身。

四阶 三个不变量的二次组合共有 6 个:

$$(h^2)^2, (\rho^2)^2, (h\rho \cos \theta)\rho^2, \\ (h\rho \cos \theta)^2, h^2\rho^2, h^2(h\rho \cos \theta).$$

第一个与 ρ 无关 (活塞项), 其余 5 个就是赛德尔像差:

$$W^{(4)} = \underbrace{W_{040}\rho^4}_{\text{球差}} + \underbrace{W_{131}h\rho^3 \cos \theta}_{\text{彗差}} \\ + \underbrace{W_{222}h^2\rho^2 \cos^2 \theta}_{\text{像散}} + \underbrace{W_{220}h^2\rho^2}_{\text{场曲}} \\ + \underbrace{W_{311}h^3\rho \cos \theta}_{\text{畸变}}. \quad (4.3)$$

要点: “三阶像差” 这个名字

波像差的这 5 项是光瞳与视场坐标的四次式; 由式 (3.7), 横向像差是 W 的一阶导数, 是三次式 (如 ρ^3 、 $h\rho^2$ 、 $h^2\rho$ 、 h^3)。光学设计的传统是按横向像差命名, 所以叫 “三阶像差” 或 “初级像差”。它们是 $\sin \theta \approx \theta - \theta^3/6$ 中三次项进入光线追迹的结果。下一阶 (波像差六阶、横向像差五阶) 共有 9 项, 不再有专门的名字, 本讲不讨论。

4.3 赛德尔和与本讲的约定

1856 年赛德尔给出的不是 W_{klm} , 而是对系统中每个面求和的五个量 S_I-S_V (赛德尔和), 它们由近轴边缘光线与主光线在各面上的数据直接算出 (第 5 节)。本讲采用的对应关系是 [16]

$$\begin{aligned} W_{040} &= \frac{1}{8}S_I, & W_{131} &= \frac{1}{2}S_{II}, \\ W_{222} &= \frac{1}{2}S_{III}, \\ W_{220} &= \frac{1}{4}(S_{III} + S_{IV}), \\ W_{311} &= \frac{1}{2}S_V. \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中 h, ρ 都归一化到 1, S 与 W 都是长度。注意场曲系数 W_{220} 含两部分: $S_{IV}/4$ 叫 *Petzval* 场曲, $S_{III}/4$ 是像散“附带”的场曲 (第 6.4 节解释)。

定义: 点列图

从一个物点出发、均匀穿过出瞳的一束光线 (例如按 (ρ, θ) 均匀取样), 把它们在某个观察面上的落点画在一起, 叫点列图 (spot diagram)。它是几何光学意义下“一个物点的像”。

推导: 五项的横向像差

令 $k \equiv R/(n'a)$ 。对式 (4.3) 中每一项按式 (3.7) 求导 ($x_p = \rho \sin \theta$, $y_p = \rho \cos \theta$, $\rho^2 = x_p^2 + y_p^2$, $\rho \cos \theta = y_p$):

- 球差 $W_{040}(x_p^2 + y_p^2)^2$: $\partial_{y_p} = 4W_{040}\rho^2 y_p$, 所以 $(\varepsilon_x, \varepsilon_y) = -4kW_{040}\rho^3(\sin \theta, \cos \theta)$ 。
- 彗差 $W_{131}h y_p(x_p^2 + y_p^2)$: $\partial_{x_p} = 2hW_{131}x_p y_p$, $\partial_{y_p} = hW_{131}(x_p^2 + 3y_p^2)$ 。用 $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ 、 $1 + 2 \cos^2 \theta = 2 + \cos 2\theta$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -kW_{131}h\rho^2 \sin 2\theta, \\ \varepsilon_y &= -kW_{131}h\rho^2(2 + \cos 2\theta). \end{aligned}$$

- 像散 $W_{222}h^2 y_p^2$: $\varepsilon_x = 0$, $\varepsilon_y = -2kW_{222}h^2\rho \cos \theta$ 。
- 场曲 $W_{220}h^2(x_p^2 + y_p^2)$: $(\varepsilon_x, \varepsilon_y) = -2kW_{220}h^2\rho(\sin \theta, \cos \theta)$ 。
- 畸变 $W_{311}h^3 y_p$: $\varepsilon_x = 0$, $\varepsilon_y = -kW_{311}h^3$ 。

这些表达式已用 sympy 逐项核对 (scripts/verify_sympy.py)。

表 2 五种赛德尔像差一览 ($k = R/(n'a)$; 后两列为横向像差随孔径 ρ 、视场 h 的幂次)

像差	波像差项	赛德尔和	横向像差	随孔径	随视场
球差	$W_{040}\rho^4$	$S_I/8$	$-4kW_{040}\rho^3(\sin \theta, \cos \theta)$	ρ^3	h^0
彗差	$W_{131}h\rho^3 \cos \theta$	$S_{II}/2$	$-kW_{131}h\rho^2(\sin 2\theta, 2 + \cos 2\theta)$	ρ^2	h
像散	$W_{222}h^2\rho^2 \cos^2 \theta$	$S_{III}/2$	$-2kW_{222}h^2\rho(0, \cos \theta)$	ρ	h^2
场曲	$W_{220}h^2\rho^2$	$(S_{III} + S_{IV})/4$	$-2kW_{220}h^2\rho(\sin \theta, \cos \theta)$	ρ	h^2
畸变	$W_{311}h^3\rho \cos \theta$	$S_V/2$	$-kW_{311}h^3(0, 1)$	ρ^0	h^3

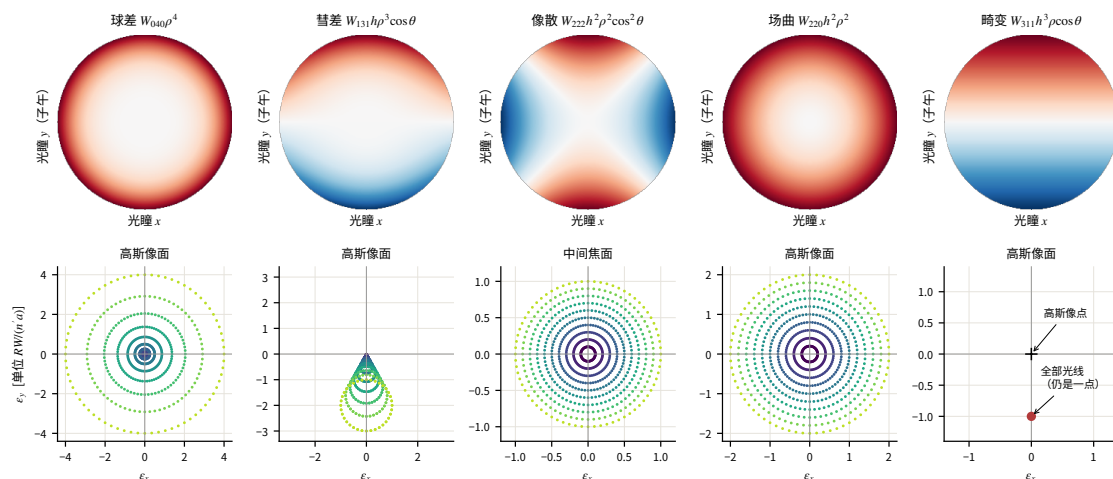


图 5 五种赛德尔像差的出瞳波前（上，红为超前、蓝为落后）与点列图（下）。每项系数取 1，横向像差以 $RW/(n'a)$ 为单位， $h = 1$ ；点的颜色表示光线的 ρ （深色小、浅色大）。像散画的是中间焦面（加离焦 $W_{020} = -W_{222}/2$ ），其余均在高斯像面。畸变的所有光线仍交于一点，只是这一点偏离高斯像点。

交互演示：五个赛德尔系数与离焦 W_{020} 的滑块：实时显示出瞳上的波面 W 与像面上的点列图 ($F = 5$ ，即 $R/(n'a) = 10$)，读出 RMS 光斑半径，并与艾里斑（衍射极限下的像斑，见第 6.1 节）比较。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 aberration-spot）。

5 像差的来源 (二): 系数从哪里来

第 4 节只用对称性就确定了像差的形式。本节回答五个系数的大小由什么决定。路线是：先用断开光路算两个最简单的例子（球面镜、单个折射球面的轴上点），再用“光阑移动”这一个技巧，把轴上的球差“搬”成彗差、像散、畸变，最后把各面相加。

5.1 球面镜与抛物面镜的球差

推导：二次曲面的矢高

以顶点为原点、光轴为 z 轴，绕轴旋转的二次曲面（圆锥曲面）写成

$$\begin{aligned} z(r) &= \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + \kappa)c^2r^2}} \\ &= \frac{c}{2}r^2 + \frac{(1 + \kappa)c^3}{8}r^4 \\ &\quad + \mathcal{O}(r^6), \end{aligned} \quad (5.1)$$

r 是到轴的距离， c 是顶点曲率， κ 是圆锥常数： $\kappa = 0$ 球面， $\kappa = -1$ 抛物面， $\kappa < -1$ 双曲面， $-1 < \kappa < 0$ 长椭球面。展开一步： $\sqrt{1 - x} = 1 - x/2 - \mathcal{O}(x^2)$ ， $x = (1 + \kappa)c^2r^2$ ，于是 $1/(1 + \sqrt{1 - x}) = \frac{1}{2} [1 + x/4 + \mathcal{O}(x^2)]$ ，乘 cr^2 即得。 $\kappa = -1$ 时根号恒为 1， $z = cr^2/2$ 是严格的抛物面。

所以同一顶点曲率下, 任意二次曲面相对球面的偏离是

$$\begin{aligned}\Delta z(r) &= z_{\kappa}(r) - z_{\text{球}}(r) \\ &= \frac{\kappa c^3}{8} r^4 + \mathcal{O}(r^6).\end{aligned}\quad (5.2)$$

推导: 面形偏离产生的波像差

设某个面 (两侧折射率 $n \rightarrow n'$) 在高度 r 处沿 $+z$ 方向多出一个位移 $\Delta z(r)$ 。对沿 $+z$ 前进、在该处穿过界面的光线, 界面后移 Δz 意味着它在介质 n 中多走 Δz 、在介质 n' 中少走 Δz , 光程变化 $(n - n')\Delta z$ (光线斜交的修正是 $\mathcal{O}(r^2)\Delta z$, 属于六阶)。由断开光路公式 (3.9), $W = V(0) - V(r)$, 光程增加使 W 减小:

$$\Delta W(r) = (n' - n) \Delta z(r). \quad (5.3)$$

对反射镜 ($n' = -n$): $\Delta W = -2n\Delta z$ 。物理图像: 镜面向入射光方向 ($-z$) 凸出 $|\Delta z|$, 光去时少走 $|\Delta z|$ 、回来也少走 $|\Delta z|$, 波前超前 $2n|\Delta z|$ 。

推导: 球面镜对无穷远物的球差

抛物面没有轴上球差。抛物线 $z = r^2/(4f)$ 上任一点到焦点 $(0, f)$ 的距离等于它到准线 $z = -f$ 的距离 (抛物线的定义)。平行于轴入射的平面波前到各点再反射到焦点的光程因此处处相等, 像方波前是以焦点为心的严格球面: $W \equiv 0$ 。(这里取镜面开口朝 $+z$ 的坐标以便使用抛物线定义, 与本讲的光路方向无关。)

球面镜。半径 R_m 的凹球面镜, 顶点曲率与焦距 $f = R_m/2$ 的抛物面相同。由式 (5.2) 取 $\kappa = -1$ 与 $\kappa = 0$ 之差, 球面比抛物面向入射光方向多凸出 $|c|^3 r^4/8 = r^4/(8R_m^3)$ 。由式 (5.3) 的反射情形, 这使波前在高度 r 处超前 $2 \times r^4/(8R_m^3)$ 。以出瞳 (镜面上的光阑, 半径 a) 归一化 $r = a\rho$:

$$\begin{aligned}W &= W_{040}\rho^4, \\ W_{040} &= \frac{a^4}{4R_m^3} = \frac{a^4}{32f^3} = \frac{D^4}{512f^3}.\end{aligned}\quad (5.4)$$

$W_{040} > 0$: 边缘光线的焦点比近轴焦点更靠近镜面 (“欠校正”)。数值: $f = 1000\text{ mm}$ 、 $D = 250\text{ mm}$ ($f/4$) 的球面镜, $W_{040} = 7.6\text{ }\mu\text{m}$, 约 14 个波长 (550 nm), 远不能用于天文成像。实际光线追迹给出的 W_{040} 与式 (5.4) 一致到 10^{-9} (第 8 节)。

检验: 量纲与标度

$W_{040} = D^4/(512f^3)$: 长度量纲正确。用焦比 $F = f/D$ 改写, $W_{040} = D/(512F^3)$ 。两种比较不要混淆: 同一焦距下口径加倍, W_{040} 变为 16 倍; 同一口径下焦比减半 (焦距减半, 更“快”), W_{040} 变为 8 倍。最小弥散圆的角直径 $4FW_{040}/f = 1/(128F^3)$ 弧度只取决于焦比: $f/4$ 时 $25''$, $f/8$ 时 $3.1''$ 。这就是快焦比的反射望远镜必须用抛物面或加校正板的原因。

5.2 光阑移动: 一个技巧生出四种像差

考虑一个已知像差系数的系统, 只移动孔径光阑的位置 (同时调整光阑大小, 使轴上光束不变)。轴上光束不变, 所以球差不变; 但离轴物点的光束换了一部分: 它们穿过各个面的位置整体平移了。

推导: 光阑移动参数 s 是整个系统的常数

设同一离轴物点有两条“主光线”: 旧主光线过旧光阑中心, 新主光线过新光阑中心。两者在任一面上的高度差 $\Delta\bar{y} = \bar{y}_{\text{新}} - \bar{y}_{\text{旧}}$ 本身满足近轴光线的方程 (近轴光学是线性的, 两条光线之差也是一条“光线”), 并且它在物面上的高度为零 (两条光线出自同一物点)。从轴上点出发的近轴光线都与边缘光线成正比, 所以 $\Delta\bar{y}/y$ 在每一个面上都相同。定义全视场下的

$$s = \frac{\Delta\bar{y}}{y} = \frac{\bar{y}_{\text{新}} - \bar{y}_{\text{旧}}}{y}. \quad (5.5)$$

对视场 h , 平移量是 sh (主光线高度正比于物高)。

推导: 光阑移动公式

用旧光阑的归一化坐标 ρ 标记光线 (在四阶精度下, 用哪个面上的坐标标记都一样, 只差一个线性缩放)。新光阑下, 视场 h 的光束以 $\rho = sh$ 为中心, 所以新系统的波像差是旧的波像差在平移后坐标上的值:

$$W_{\text{新}}(h, \rho) = W_{\text{旧}}(h, \rho + sh) - (\text{与 } \rho \text{ 无关的项}).$$

把 $\rho \rightarrow \rho + sh$ 代入式 (4.3) 中用矢量写出的各项: $\rho^4 = (\rho \cdot \rho)^2$, $h\rho^3 \cos \theta = (h \cdot \rho)(\rho \cdot \rho)$, $h^2\rho^2 \cos^2 \theta = (h \cdot \rho)^2$, $h^2\rho^2 = (h \cdot h)(\rho \cdot \rho)$, $h^3\rho \cos \theta = (h \cdot h)(h \cdot \rho)$ 。所需的两个替换是

$$\rho \cdot \rho \rightarrow \rho^2 + 2sh\rho \cos \theta + s^2h^2,$$

$$h \cdot \rho \rightarrow h\rho \cos \theta + sh^2.$$

以球差项为例:

$$\begin{aligned} & W_{040}(\rho^2 + 2sh\rho \cos \theta + s^2h^2)^2 \\ &= W_{040}[\rho^4 + 4sh\rho^3 \cos \theta + 4s^2h^2\rho^2 \cos^2 \theta \\ &\quad + 2s^2h^2\rho^2 + 4s^3h^3\rho \cos \theta + s^4h^4]. \end{aligned}$$

一个球差项生出了彗差、像散、场曲、畸变各一份! 其余各项同样展开, 按 $h^k \rho^l \cos^m \theta$ 归类 (sympy 核对):

$$\begin{aligned} W'_{040} &= W_{040}, \\ W'_{131} &= W_{131} + 4sW_{040}, \\ W'_{222} &= W_{222} + 2sW_{131} + 4s^2W_{040}, \\ W'_{220} &= W_{220} + sW_{131} + 2s^2W_{040}, \\ W'_{311} &= W_{311} + 2s(W_{222} + W_{220}) \\ &\quad + 3s^2W_{131} + 4s^3W_{040}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

用式 (4.4) 换成赛德尔和:

$$\begin{aligned}
 S'_I &= S_I, & S'_{IV} &= S_{IV}, \\
 S'_{II} &= S_{II} + sS_I, \\
 S'_{III} &= S_{III} + 2sS_{II} + s^2S_I, \\
 S'_V &= S_V + s(3S_{III} + S_{IV}) \\
 &\quad + 3s^2S_{II} + s^3S_I.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

要点: 光阑移动公式告诉我们什么

1. 球差 S_I 与 Petzval 和 S_{IV} 与光阑位置无关: 它们是系统本身的性质。
2. 彗差、像散、畸变都可以看成“偏心光束看到的球差 (以及低阶像差)”。只要系统有球差, 移动光阑就能把彗差调到零: $s^* = -S_{II}/S_I$ 。
3. 若系统已经同时消去球差与彗差 ($S_I = S_{II} = 0$, 叫齐明系统), 像散与 Petzval 场曲就与光阑位置无关; 若还消去了像散, 畸变也与光阑无关。所以设计时先消低“ ρ 阶”的像差, 再用光阑调高阶的。

例题: 抛物面镜的彗差: 用光阑移动来算

凹球面镜 (半径 R_m) 的光阑若放在球心 C , 每条主光线都经过 C , 沿镜面法线入射、原路返回。对这条主光线来说, 球面关于它是旋转对称的——它就是一条“光轴”。所以离轴光束与轴上光束完全一样, 只有球差 W_{040} , 没有彗差、像散 (畸变为零见第 5.3 节)。把光阑从球心移到镜面上: 视场角 θ_f 的旧主光线经过 C , 在镜面处的高度为 $|\bar{y}_{旧}| = R_m\theta_f$; 新主光线打在镜面中心, $\bar{y}_{新} = 0$ 。所以 $|s| = R_m\theta_f/a$, 由式 (5.6):

$$\begin{aligned}
 |W'_{131}| &= 4|s|W_{040} = 4 \cdot \frac{R_m\theta_f}{a} \cdot \frac{a^4}{4R_m^3} \\
 &= \frac{\theta_f a^3}{R_m^2} = \frac{\theta_f a^3}{4f^2}.
 \end{aligned}$$

抛物面镜与球面镜相比只多了一个“放在镜面上”的非球面形变。非球面形变放在光阑处时 $\bar{y} = 0$, 它只改球差、不改彗差 (下面式 (5.12) 中 $\bar{y} = 0$ 的情形)。所以光阑在镜面上的抛物面镜, 彗差与同口径同焦距的球面镜相同, $|W_{131}| = \theta_f a^3/(4f^2)$ 。这正是“抛物面镜轴上完美、离轴彗差严重”的定量形式。 $f = 1\text{ m}$ 、 $f/4$ 、 $\theta_f = 0.5^\circ$ 时 $|W_{131}| = 4.3\text{ }\mu\text{m}$ 。

5.3 单个折射球面的五个赛德尔和

第一步: 轴上点的球差 物点在轴上、距顶点 l (实物 $l < 0$), 近轴像点距顶点 l' , 满足 $n'/l' - n/l = (n' - n)c$ 。由断开光路公式 (3.9), 对高度 Y 处的球面点 P ,

$$V(Y) = n|OP| + n'|PI'|,$$

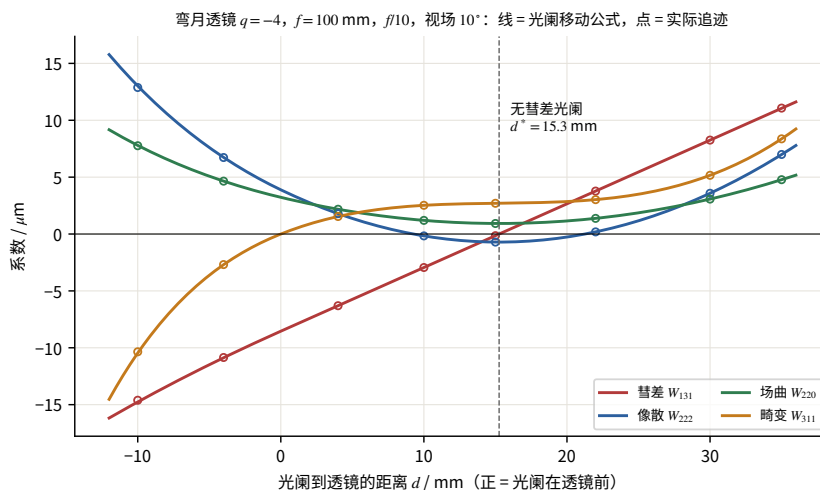


图 6 弯月形单透镜 ($q = -4$, 凹面朝物, $f = 100$ mm, $f/10$, 视场 10°) 的四个视场相关系数随光阑位置 d 的变化。曲线由式 (5.7) 从“光阑在透镜处”的薄透镜赛德尔和 (第 5.5 节) 算出, 圆点为实际光线追迹拟合。光阑在透镜前 $d^* = 15.3$ mm 时彗差为零, 此时像散也接近零 (第 6.3 节“风景镜”)。光阑在透镜后时, 主光线先经透镜折射再过光阑中心, s 与 d 不再成正比, 所以曲线左段弯曲。

把 $|OP|$ 、 $|PI'|$ 用球面矢高 $z(Y)$ 写出并展开到 Y^4 (附录 A): Y^2 项恰好因成像公式而消去——这就是“近轴像点”的意义; Y^4 项给出

$$S_I = 8W_{040} = -A^2 y \Delta\left(\frac{u}{n}\right), \quad (5.8)$$

$$A = n(u + yc), \quad \Delta\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u'}{n'} - \frac{u}{n}.$$

这里光阑放在该面上, y 是边缘光线在该面的高度。这一结果已用 sympy 对一般 n, n', l, l' 核对。

要点: 单个球面何时没有球差

式 (5.8) 是三个因子之积, 任何一个为零都没有球差: (i) $y = 0$: 物点在面的顶点上 (像与物重合, 平凡); (ii) $A = 0$: 入射角为零, 物点在球心, 光线沿法线穿过球面不偏折; (iii) $\Delta(u/n) = 0$: 即 $u'/n' = u/n$ 。由近轴折射公式解得, 物点到球心的距离为 rn'/n 、像点到球心的距离为 rn/n' 。这一对点叫球面的齐明点 (aplanatic points), 显微镜物镜的第一片 (齐明透镜、油浸半球) 就工作在这里。

第二步: 光阑放在球心——Petzval 场曲 把光阑放在球心 C 。与球面镜的论证相同, 每条主光线都经过 C 而不偏折, 它就是一条对称轴, 所以离轴光束只有“沿这条轴”的球差, $S_{II} = S_{III} = 0$ 。主光线是过 C 的直线, 它与平的物面、平的高斯像面的交点高度之比是常数 (等于这两个面到 C 的距离之比, 可以验证这正是近轴放大率), 所以也没有畸变: $S_V = 0$ 。唯一剩下的视场像是: 平面物上不同点沿各自“轴”到 C 的距离不同, 于是它们的像沿各自的轴前后错开, 组成一个弯曲的像面。

推导: Petzval 曲率

以 C 为原点沿任一过 C 的直线量距离, 物距 L 、像距 L' ($L = l - r$, $L' = l' - r$)。对每条这样的直线, 成像公式都是 $n'/(L' + r) - n/(L + r) = (n' - n)/r$ 。

平面物离 C 的轴向距离为 L_0 ; 与轴夹角 ϕ 的主光线上, 物点到 C 的距离为 $L_\phi = L_0 / \cos \phi = L_0(1 + \phi^2/2 + \dots)$ 。它的像在同一直线上距 C 为 L'_ϕ , 像点的轴向坐标为 $L'_\phi \cos \phi$, 高度 $\eta' \approx L'_0 \phi$ 。把 L'_ϕ 对 ϕ 展开到二阶: $L'_\phi \approx L'_0 + \frac{dL'}{dL} \frac{L_0 \phi^2}{2}$, 其中对成像公式求导得 $dL'/dL = n(L' + r)^2/[n'(L + r)^2]$ 。像点的轴向坐标 $L'_\phi \cos \phi \approx L'_0 + \frac{\phi^2}{2} (L_0 \frac{dL'}{dL} - L'_0)$, 像高 $\eta' \approx L'_0 \phi$ 。像面写成 $\Delta z = \eta'^2/(2r_P)$, 于是 $1/r_P = (L_0 dL'/dL - L'_0)/L_0^2$ 。下面化简分子。记 $l = L_0 + r$, $l' = L'_0 + r$ (从顶点量起的物距、像距), 成像公式写成 $n/l = n'/l' - (n' - n)/r$, 即

$$\frac{nl'}{l} = \frac{D}{r},$$

$$D \equiv n'r - (n' - n)l'.$$

由此 $l = nl'r/D$, $L_0 = l - r = r n'(l' - r)/D$, 以及 $dL'/dL = \frac{1}{nn'} \left(\frac{nl'}{l}\right)^2 = \frac{D^2}{nn'r^2}$ 。代入:

$$\begin{aligned} L_0 \frac{dL'}{dL} - L'_0 &= \frac{rn'(l' - r)}{D} \cdot \frac{D^2}{nn'r^2} - (l' - r) \\ &= (l' - r) \frac{D - nr}{nr} \\ &= -\frac{(n' - n)(l' - r)^2}{nr}, \end{aligned}$$

最后一步用了 $D - nr = (n' - n)(r - l')$ 。除以 $L_0^2 = (l' - r)^2$ 得平面物经单个球面所成像面的曲率 (sympy 另行核对)

$$\frac{1}{r_P} = -\frac{n' - n}{nr}. \quad (5.9)$$

把 Δz 与场曲系数联系起来: 视场 h 的光束若有 $W_{220}h^2\rho^2$, 它在 $W_{020} = -W_{220}h^2$ 处成像清晰, 由式 (3.8) 对应 $\delta = -2W_{220}h^2/(n'u'^2)$ 。令它等于 $\eta'^2/(2r_P)$, 并用拉格朗日不变量 $H = -n'u'\eta'_{\max}$ (第 3.2 节) 消去 u' , η' , 得 $W_{220} = -H^2/(4n'r_P)$ 。光阑在球心时 $S_{\text{III}} = 0$, $W_{220} = S_{\text{IV}}/4$, 代入式 (5.9):

$$\begin{aligned} S_{\text{IV}} &= -H^2 c \Delta \left(\frac{1}{n} \right), \\ \Delta \left(\frac{1}{n} \right) &= \frac{1}{n'} - \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

由光阑移动公式, S_{IV} 与光阑位置无关, 所以式 (5.10) 对任何光阑位置都成立。

第三步: 把光阑移回实际位置 光阑在 C 时的主光线经过球心, 入射角为零, 它的折射不变量 $\bar{A}_C = 0$ 。现在写出从任一物点出发、在该面高度为 Y 的近轴光线的折射不变量。物点高 η 、离顶点 l ($l < 0$), 光线斜率 $u = (Y - \eta)/(0 - l)$, 所以

$$\begin{aligned} A(Y) &= n(u + Yc) = n \left(c - \frac{1}{l} \right) Y + \frac{n\eta}{l} \\ &\equiv \alpha Y + \frac{n\eta}{l}, \\ \alpha &= n \left(c - \frac{1}{l} \right). \end{aligned}$$

比例系数 α 与物高 η 无关。对视场边缘的物点, A 在 $Y = \bar{y}_C$ 处为零, 所以 $A = \alpha(Y - \bar{y}_C)$; 对轴上物点 ($\eta = 0$), 边缘光线 $A = \alpha y$ 。于是实际主光线的 $\bar{A} = \alpha(\bar{y} - \bar{y}_C)$, 光阑移动参数

$$s = \frac{\bar{y} - \bar{y}_C}{y} = \frac{\bar{A}}{A}.$$

代入光阑移动公式 (5.7) (旧值: $S_{\text{II}} = S_{\text{III}} = S_{\text{V}} = 0$), 得到单个折射球面的全部赛德尔和:

$$\begin{aligned} S_{\text{I}} &= -A^2 y \Delta(u/n), \\ S_{\text{II}} &= -A \bar{A} y \Delta(u/n), \\ S_{\text{III}} &= -\bar{A}^2 y \Delta(u/n), \\ S_{\text{IV}} &= -H^2 c \Delta(1/n), \\ S_{\text{V}} &= \frac{\bar{A}}{A} (S_{\text{III}} + S_{\text{IV}}). \end{aligned} \quad (5.11)$$

(S_{V} 一式来自 $s(3S_{\text{III}}^C + S_{\text{IV}}) + s^3 S_{\text{I}} = s S_{\text{IV}} + s \cdot s^2 S_{\text{I}} = s(S_{\text{IV}} + S_{\text{III}})$, 其中 $S_{\text{III}}^C = 0$ 。) 这正是赛德尔 1856 年结果的现代写法 (Welford 形式) [17]。

推导: 非球面的附加项

若该面不是球面, 而在球面基础上多出式 (5.2) 那样的 $\Delta z = b r^4$ (二次曲面 $b = \kappa c^3/8$), 由式 (5.3), 它对穿过该面高度 r 的光线附加 $\Delta W = (n' - n) b r^4$ 。若光阑就在该面 ($\bar{y} = 0$), 这只是球差: $\delta S_{\text{I}} = 8(n' - n) b y^4$ 。实际光阑处, 该面上的光束中心在 $\bar{y}$, 用光阑移动公式 ($s = \bar{y}/y$, 旧值只有 δS_{I}):

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{I}} &= 8b \Delta n y^4, \\ \delta S_{\text{II}} &= 8b \Delta n y^3 \bar{y}, \\ \delta S_{\text{III}} &= 8b \Delta n y^2 \bar{y}^2, \\ \delta S_{\text{IV}} &= 0, \\ \delta S_{\text{V}} &= 8b \Delta n y \bar{y}^3. \end{aligned} \quad (5.12)$$

对二次曲面 $8b = \kappa c^3$ 。

5.4 多个面: 各面贡献相加

要点: 为什么可以相加

对多面系统, 由断开光路公式, W 可以沿近轴光线的路径计算, 误差是“实际光线与近轴光线的偏离”的平方。在第 j 个面上, 近轴光线与实际光线的偏离是三阶小量, 于是误差是六阶, 不影响四阶的 W 。沿近轴路径, 总光程是各面之间光程之和, 它的四阶部分就是各面贡献之和。所以

$$S_{\text{I}} = \sum_j S_{\text{I},j}, \quad \dots, \quad S_{\text{V}} = \sum_j S_{\text{V},j},$$

每个面的贡献用该面上的 $y, u, \bar{y}, \bar{u}, n, n'$ 按式 (5.11)、(5.12) 计算。“前面各面的像差会不会改变后面各面的像差”是六阶效应 (第 4.2 节称之为下一阶)。

检验：与实际光线追迹的对照

第 8 节用独立编写的实际光线追迹程序计算 W ，再按式 (4.3) 的各项拟合系数。对球面镜、抛物面镜、单个折射面、单透镜、哈勃 RC 系统，拟合出的 $W_{040}, W_{131}, W_{222}, W_{220}, W_{311}$ 与式 (5.11)–(5.12) 的预言相对差小于 0.2%，在表中所列的五位有效数字上完全相同 (表 4)。

5.5 薄透镜：形状因子与位置因子**定义：形状因子与位置因子 (Coddington 记号)**

空气中一片薄透镜，两面曲率 c_1, c_2 ，光焦度 $\varphi = (n-1)(c_1 - c_2)$ 。边缘光线入射斜率 u 、出射斜率 $u' = u - y\varphi$ 。定义

$$\begin{aligned} q &= \frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2}, \\ p &= \frac{u + u'}{u - u'}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

q 描述透镜的“弯曲”而不改变焦距： $q = 0$ 等凸， $q = 1$ 平凸且凸面朝物， $q = -1$ 平凸且平面朝物， $|q| > 1$ 为弯月形。 p 描述透镜的工作共轭：物在无穷远 $p = -1$ ，物距 $2f$ ($1:1$ 成像) $p = 0$ ，像在无穷远 $p = 1$ 。这对记号源于 Coddington (1829)，见文献 [18, 19]。

把式 (5.11) 对两个面相加 (两面上 y 相同；光阑在透镜处时 $\bar{y} = 0$)，并用 q, p 改写 (附录 B, sympy 核对)：

$$\begin{aligned} S_{\text{I}} &= \frac{y^4 \varphi^3}{4} \left[\left(\frac{n}{n-1} \right)^2 + \frac{n+2}{n(n-1)^2} q^2 + \frac{4(n+1)}{n(n-1)} qp + \frac{3n+2}{n} p^2 \right], \\ S_{\text{II}} &= \frac{y^2 \varphi^2 H}{2} \left[\frac{n+1}{n(n-1)} q + \frac{2n+1}{n} p \right], \\ S_{\text{III}} &= H^2 \varphi, \quad S_{\text{IV}} = \frac{H^2 \varphi}{n}, \\ S_{\text{V}} &= 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

光阑不在透镜处时，再用光阑移动公式， $s = \bar{y}/y$ ($\bar{y}$ 为主光线在透镜处的高度)。

要点：薄透镜公式的四个推论

1. 最小球差形状。 S_{I} 是 q 的二次函数，对 q 求极小：

$$\begin{aligned} q_{\min} &= -\frac{2(n^2 - 1)}{n + 2} p, \\ S_{\text{I}, \min} &= \frac{y^4 \varphi^3}{4} \left[\frac{n^2}{(n-1)^2} - \frac{n p^2}{n + 2} \right]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

物在无穷远 ($p = -1$)、 $n = 1.5168$ 时 $q_{\min} = 0.740$ ：接近凸面朝物的平凸透镜， $r_2 \approx -6.7r_1$ 。

2. 球面单透镜消不掉球差。对 $|p| \leq 1$ (实物、实像)，方括号 $\geq n^2/(n-1)^2 - n/(n+2) = n(4n-1)/[(n-1)^2(n+2)] > 0$ 。正透镜的球差总是欠校正 ($S_I > 0$)。
3. 零彗差形状。 $S_{II} = 0$ 给出 $q_c = -(2n+1)(n-1)p/(n+1)$ ； $p = -1$ 、 $n = 1.5168$ 时 $q_c = 0.828$ ，与 $q_{\min}$ 很接近，所以“最佳形状”的单透镜同时近似无彗差。
4. 弯曲改不了像散与 Petzval 场曲。光阑在透镜处时， $S_{III} = H^2\varphi$ 、 $S_{IV} = H^2\varphi/n$ 与 q 、 p 都无关。要改变像散，只能移动光阑（借助 S_I 、 S_{II} ）或增加透镜。

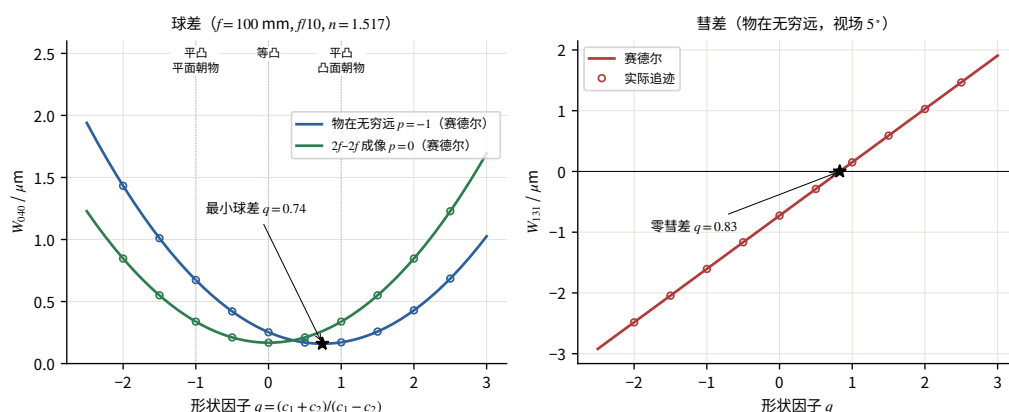


图 7 薄透镜 ($f = 100 \text{ mm}$, $n = 1.5168$, 光阑在透镜处) 的球差系数 $W_{040} = S_I/8$ (左, $f/10$) 与彗差系数 $W_{131} = S_{II}/2$ (右, 物在无穷远、视场 5°) 随形状因子 q 的变化。曲线为式 (5.14)，圆圈为零厚度透镜的实际光线追迹拟合（偏差均小于 1%）。平面朝物的平凸透镜 ($q = -1$) 的球差是凸面朝物 ($q = 1$) 的 3.9 倍。

6 五种像差逐一：来源、效果、示例与消除

本节对每一种像差按同一顺序讲四件事：**来源** (W 中哪一项、哪个赛德尔和、物理上从哪里来)；**效果** (光斑或像的形状，横向与纵向像差随孔径 ρ 与视场 h 的标度)；**示例** (具体系统的数值，均由脚本计算并与实际光线追迹核对)；**消除** (设计原理与典型结构，较长的推导放在第 7 节)。下文 $k \equiv R/(n'a) = -1/(n'u')$ 。

6.1 球差

来源 $W_{040}\rho^4$, $W_{040} = S_I/8$ 。它与视场无关，轴上点也有。物理根源是斯涅耳定律的非线性： $\sin i = i - i^3/6 + \dots$ ，入射角越大，实际偏折比近轴的线性规律偏离得越多。由式 (5.8)，单个面的贡献正比于 $A^2 = (ni)^2$ ——边缘光线的入射角平方。会聚的正透镜对边缘光线“折得过头”，边缘光线的焦点比近轴焦点更靠近透镜， $S_I > 0$ ，称为欠校正；反之称为过校正。

效果 高斯像面上， $\varepsilon = -4kW_{040}\rho^3(\sin\theta, \cos\theta)$ ：每一环（固定 ρ ）的光线落在半径 $4kW_{040}\rho^3$ 的圆上，光斑是轴对称的圆盘，边缘亮（各环半径随 ρ^3 增长，图 5）。

推导：纵向球差与焦散

把观察面移动 δ ，相当于加离焦 $W_{020} = n'u'^2\delta/2$ (式 (3.8))。环带 ρ 的子午光线与轴相交处满足 $\varepsilon_y = 0$ ，即 $\partial_{y_p}(W_{040}\rho^4 + W_{020}\rho^2) = 0$ 在 $\theta = 0$ 处： $4W_{040}\rho^3 + 2W_{020}\rho = 0$ ，所以 $W_{020} = -2W_{040}\rho^2$ ，

$$\delta(\rho) = -\frac{4W_{040}}{n'u'^2}\rho^2. \quad (6.1)$$

不同环带的焦点沿轴排开，离近轴焦点的距离 $\propto \rho^2$ ：这就是纵向球差， $\rho = 1$ 时的值 δ_m 叫边缘焦点的纵向球差 (LSA)。横向球差 $\propto \rho^3$ ，纵向球差 $\propto \rho^2$ ，两者差一个 ρ/u' ，因为光线以斜率 $\propto \rho$ 穿过轴。各环光线的包络是一个回转的“焦散面” (图 8上)。

前置知识：衍射极限、艾里斑、Strehl 比与 Maréchal 判据、视宁度

几何光学把像点当成光线的落点；实际上光是波，即使波前是完美的球面，圆孔径的像也不是一个点，而是艾里斑：中央亮斑的第一暗环角半径为 $1.22\lambda/D$ (D 为入瞳直径)，在焦面上半径 $1.22\lambda F$ 。只受衍射限制 (波像差可以忽略) 的系统叫衍射极限系统。有像差时，像点中心的峰值亮度相对无像差时的比值叫 *Strehl* 比 S 。像差不大时有近似 $S \approx e^{-(2\pi\sigma_W/\lambda)^2}$ ， σ_W 为波前的方均根起伏 (附录 C)。习惯上把 $S \geq 0.8$ 当作“达到衍射极限”，对应 $\sigma_W \leq \lambda/14$ ，这叫 *Maréchal* 判据 [15]。所以几何光斑比艾里斑大得多时，用几何判据评价像质；接近衍射极限时，用 σ_W 评价。地面望远镜的星像还受大气湍流扰动，展宽到约 $0.5''$ – $2''$ ，叫视宁度；它给出了地面望远镜实际有用的像质尺度。

推导：最佳焦面在哪里：三种判据

在观察面上 $W = W_{040}(\rho^4 - \beta\rho^2)$ ， $\beta \equiv -W_{020}/W_{040}$ ($\beta = 0$ 近轴焦点， $\beta = 2$ 边缘焦点)。光线的径向落点 $\varepsilon_r = -kW_{040}(4\rho^3 - 2\beta\rho)$ 。

(i) 最小几何弥散圆。弥散半径是 $g(\rho) = |4\rho^3 - 2\beta\rho|$ 在 $0 \leq \rho \leq 1$ 上的最大值 (以 kW_{040} 为单位)。 $4\rho^3 - 2\beta\rho$ 在 $\rho^2 = \beta/6$ 处取极小值 $-\frac{4\beta}{3}\sqrt{\beta/6}$ (内部的“焦散”点)，在 $\rho = 1$ 处为 $4 - 2\beta$ (边缘光线)。 β 增大时前者变大、后者变小，最大值的最小处在两者相等时：

$$\frac{4\beta}{3}\sqrt{\beta/6} = 4 - 2\beta.$$

令 $t = \sqrt{\beta/6}$ ，化为 $8t^3 = 4 - 12t^2$ ，即 $2t^3 + 3t^2 - 1 = (t+1)^2(2t-1) = 0$ ，得 $t = 1/2$ ， $\beta = 3/2$ 。所以最小弥散圆在近轴焦点到边缘焦点的 $3/4$ 处，半径 kW_{040} ，是高斯像面上弥散半径 $4kW_{040}$ 的 $1/4$ 。

(ii) 最小 RMS 光斑。 $\langle \varepsilon_r^2 \rangle \propto \langle (4\rho^3 - 2\beta\rho)^2 \rangle$ ，在单位圆上以面积平均 (权重 $2\rho d\rho$ ， $\langle \rho^{2m} \rangle = 1/(m+1)$)： $4 - \frac{16}{3}\beta + 2\beta^2$ ，极小在 $\beta = 4/3$ ，即 $2/3$ 处。

(iii) 最小 RMS 波像差。对衍射成像 (星点的峰值亮度) 重要的是波前的方均根起伏 σ_W 。同样做面积平均并扣除平均值 (附录 C)： $\sigma_W^2 = W_{040}^2(\frac{4}{45} - \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12})$ ，极小在 $\beta = 1$ (正中间)，此时 $\sigma_W = W_{040}/(6\sqrt{5}) \approx 0.075 W_{040}$ ；在近轴焦点 $\sigma_W = 2W_{040}/(3\sqrt{5}) \approx 0.30 W_{040}$ 。

三种判据给出三个不同的“最佳焦点”，这不是矛盾：它们优化的是不同的量。几何光斑大于衍射斑时用 (i)(ii)，接近衍射极限时用 (iii)。

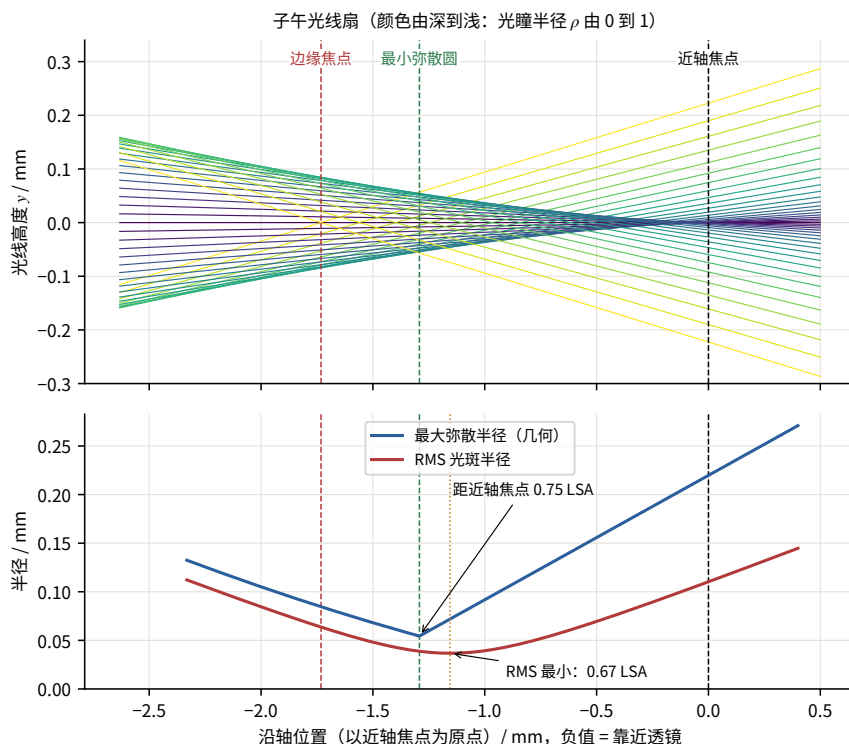


图 8 平凸透镜 (N-BK7, $f \approx 100$ mm, 中心厚 4 mm, $f/4$, 凸面朝物) 对平行光的实际光线追迹。上：子午光线扇 (纵向放大)；下：各观察面上的最大弥散半径与 RMS 光斑半径。最小弥散圆位于近轴焦点到边缘焦点的 0.75 处，RMS 最小在 0.67 处，与上面推导一致 (脚本中 `assert` 核对)。

示例 (1) 图 8 的平凸透镜：实际追迹给出 $LSA = -1.73$ mm (边缘焦点比近轴焦点近 1.73 mm)，赛德尔预言 (式 (6.1), $W_{040} = 6.65 \mu\text{m}$) -1.70 mm，差 2%，来自更高阶的球差。最小弥散圆半径 $54 \mu\text{m}$ ，是高斯像面上 ($220 \mu\text{m}$) 的 0.248 倍；同一透镜的艾里斑半径只有 $1.22\lambda F \approx 2.9 \mu\text{m}$ (587.6 nm)，所以它远未达到衍射极限。(2) 哈勃主镜的球差见例题 1。

交互演示：单透镜对平行光的实际子午光线追迹：拖动形状因子 q 与 F 数，观察焦区光线扇、近轴焦点、边缘焦点与最小弥散圆 (应在 3/4 处)，读出实际纵向球差并与薄透镜赛德尔公式比较。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 `aberration-raytrace`)。

消除 (i) 弯曲：选最佳形状 $q_{\min}$ (式 (5.15))，凸面朝物的平凸透镜接近最佳，反过来装球差约大 4 倍 (图 7)。(ii) 分裂：把一片透镜的光焦度分给两片，每片的入射角变小。例如 $f = 100$ mm、 $f/4$ 时，最佳形状单片 $W_{040} = 6.24 \mu\text{m}$ ；改用两片焦距 200 mm 的薄透镜密接，第一片 $p_1 = -1$ ，第二片的入射光会聚到 200 mm 处， $p_2 = (u + u')/(u - u') = -3$ ，各取最佳形状 ($q_1 = 0.74$, $q_2 = 2.22$)，总 $W_{040} = 1.23 \mu\text{m}$ ，只有单片的 0.197 倍 (零厚度实际追迹给出同一值)。(iii) 正负透镜组合：负透镜的球差与正透镜反号。消色差双胶合透镜在消色差的同时，可以靠弯曲把球差也消去 (例题 2 给出完整设计)。(iv) 非球面：抛物面镜 (第 5.1 节)、Schmidt 校正板 (第 7.1 节)、手机镜头的塑料非球面。(v) 齐明面：工作在齐明点的球面没有球差 (第 5.3 节)，用于显微物镜。(vi) 缩小孔径：横向球差 $\propto a^3$ ($W_{040} \propto a^4$ ，再乘 R/a)，代价是进光量。

6.2 彗差

来源 $W_{131}h\rho^3\cos\theta$, $W_{131} = S_{II}/2$, 对视场是一次的：只要离开光轴就最先出现的像差。两个等价的物理图像：(a) 由光阑移动公式，单个面的 $S_{II} = (\bar{A}/A)S_I$ ——离轴光束在面上的“足迹”偏离了对称中心，它看到的是一块偏心的球差，偏心球差的 ρ^3 项就是彗差；(b) 不同环带的光线成像的放大率不同（第 7.2 节的正弦条件）。

效果 由表 2，记 $C \equiv kW_{131}h$,

$$\varepsilon_x = -C\rho^2\sin 2\theta,$$

$$\varepsilon_y = -C\rho^2(2 + \cos 2\theta).$$

- 固定 ρ , θ 从 0 走到 2π , 落点 $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$ 沿一个圆走两圈：圆心 $(0, -2C\rho^2)$, 半径 $|C|\rho^2$ 。所以出瞳上的一个环在像面上成一个“彗差圆”，环越大，圆越大、离高斯像点越远。
- 所有圆都与两条过原点的直线相切：圆心距原点 $2|C|\rho^2$, 半径 $|C|\rho^2$, 切线与对称轴的夹角满足 $\sin\alpha = 1/2$, $\alpha = 30^\circ$ 。光斑因此是顶角 60° 的彗星形，头部（小 ρ 的光线密集处）在高斯像点，尾巴指向 $-\text{sgn}(C)\hat{y}$ 。
- $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ （子午光线）落在 $\varepsilon_y = -3C\rho^2$ ：子午彗差 $3|C|$ ； $\theta = \pm 90^\circ$ （弧矢光线）落在 $\varepsilon_y = -C\rho^2$ ：弧矢彗差 $|C|$ 。两者之比恒为 3。
- 标度：彗差的长度 $\propto h\rho^2$ ，正比于视场、正比于孔径的平方。

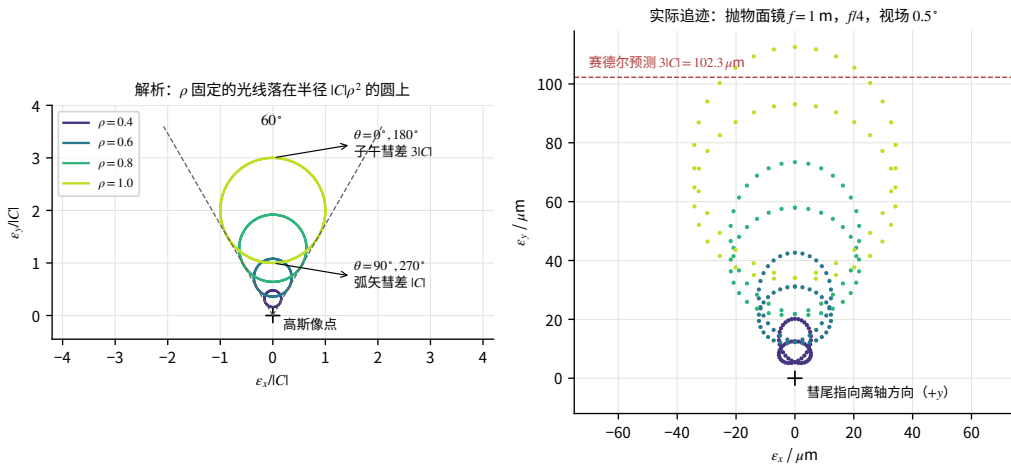


图 9 彗差。左：由解析式画出的彗差圆（ $C < 0$ ），两条虚线夹角 60° 。右：抛物面镜（ $f = 1\text{ m}$, $f/4$, 视场 0.5° , 光阑在镜面）的实际追迹点列图，子午彗差 $102.8\text{ }\mu\text{m}$ ，赛德尔预言 $3|C| = 102.3\text{ }\mu\text{m}$ 。每个 ρ 的圆略分成两个，是同时存在的少量像散与场曲（ $\propto \rho$, 对 θ 与 $\theta + \pi$ 反号）造成的。

示例 光阑在镜面上的抛物面镜，第 5.2 节已求得 $|W_{131}| = \theta_f a^3 / (4f^2)$, 取 $R = f$, $|C| = f \cdot \theta_f a^3 / (4f^2 a) = \theta_f f / (16F^2)$ ($a = f / (2F)$)。用角度表示（除以 f ），子午彗差为

$$\frac{3|C|}{f} = \frac{3\theta_f}{16F^2}. \quad (6.2)$$

$f/4$ 、 $\theta_f = 0.5^\circ$: $3|C|/f = 1.02 \times 10^{-4}\text{ rad} \approx 21''$, 比视宁度（ $\sim 1''$ ）大得多。所以快焦比的单块抛物面镜只有很小的可用视场——这正是 Schmidt 相机与 RC 望远镜要解决的问题。

消除 (i) 满足正弦条件 (齐明设计, 第 7.2 节)。 (ii) 移动光阑: 系统有球差时, 取 $s^* = -S_{II}/S_I$ 。球面镜的光阑放在球心即无彗差, 这是 Schmidt 相机的出发点。 (iii) 对称结构: 关于光阑对称的系统在 1:1 成像时彗差严格为零 (第 7.3 节)。 (iv) 单透镜弯曲到 q_c (式 (5.14) 推论 3)。 (v) 两块非球面镜: RC 望远镜用两个圆锥常数同时消球差与彗差 (第 7.4 节)。

6.3 像散

来源 $W_{222}h^2\rho^2\cos^2\theta$, $W_{222} = S_{III}/2$ 。它只出现在子午方向 ($\cos^2\theta = y_p^2$): 离轴光束在子午截面与弧矢截面内会聚到不同的位置。物理来源可以用第 5.3 节的“偏心光束”图像推出来。对单个球面, 若光阑在它的球心, 离轴光束沿自己的对称轴入射, 只有球差 $W_{040}\rho^4$, 没有像散。实际光阑不在球心时, 视场 h 的光束在“球心光阑”的光瞳上偏到以 $\rho_0 = sh$ 为中心的位置 ($s = \bar{A}/A$), 它截取的是球差波前 $W_{040}\rho^4$ 中偏离中心的一块。以这束光自己的光瞳坐标 (x_p, y_p) 写出 (y_p 沿子午方向), 并只保留对 (x_p, y_p) 为二次的项:

$$\begin{aligned} & W_{040}[(\rho_0 + y_p)^2 + x_p^2]^2 \\ &= W_{040}[\rho_0^4 + 4\rho_0^3y_p + 6\rho_0^2y_p^2 + 2\rho_0^2x_p^2 + \cdots]. \end{aligned}$$

二次项就是这束光的“离焦”。子午方向的系数 $6\rho_0^2$ 是弧矢方向 $2\rho_0^2$ 的 3 倍: 碗形的 ρ^4 波前在偏离中心处, 沿半径方向比沿切向弯 3 倍, 所以子午与弧矢光线会聚到不同位置。写成 $6\rho_0^2y_p^2 + 2\rho_0^2x_p^2 = 2\rho_0^2\rho^2 + 4\rho_0^2\rho^2\cos^2\theta$: 后一项 $4s^2h^2W_{040}\rho^2\cos^2\theta$ 是像散, 前一项 $2s^2h^2W_{040}\rho^2$ 是附加的场曲。这正是光阑移动公式中 $W'_{222} \ni 4s^2W_{040}$ 、 $W'_{220} \ni 2s^2W_{040}$ 两项的几何意义。光阑在透镜处的薄透镜也有像散: $S_{III} = H^2\varphi$, 与形状无关。这是因为对它的每个面来说, 光阑都不在该面的球心 ($\bar{A} \neq 0$), 细光束对各面都是“偏心”的。只要有光焦度和视场, 就有像散。

效果 加上离焦 W_{020} (观察面位置) 和场曲项, 横向像差为

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -2k(W_{220}h^2 + W_{020})x_p, \\ \varepsilon_y &= -2k[(W_{222} + W_{220})h^2 \\ &\quad + W_{020}]y_p. \end{aligned}$$

一般情况下光斑是椭圆。两个特殊位置:

- $W_{020} = -W_{220}h^2$: $\varepsilon_x = 0$, 所有光线落在沿 y 方向 (径向) 的一条线段上, 叫弧矢焦线 (弧矢光线在此会聚);
- $W_{020} = -(W_{220} + W_{222})h^2$: $\varepsilon_y = 0$, 光线落在沿 x 方向 (切向) 的线段上, 叫子午焦线。

两者正中间 $W_{020} = -(W_{220} + W_{222}/2)h^2$ 处, 两个方向的系数相等, 光斑是圆, 叫最小弥散圆, 半径 $k|W_{222}|h^2$ 。两条焦线的轴向间距 (像散差) 由式 (3.8): $\delta_T - \delta_S = -2W_{222}h^2/(n'u'^2)$ 。标度: 焦线长度与弥散圆半径 $\propto h^2\rho$ 。

示例 图 10 的单透镜, 视场 20° 处赛德尔给出子午焦面在高斯像面前 24.2 mm、弧矢焦面在前 11.0 mm; 在视场 10.3° ($h = 0.5$) 处实际追迹为 -5.78 与 -2.66 mm, 赛德尔为 -6.06 与 -2.75

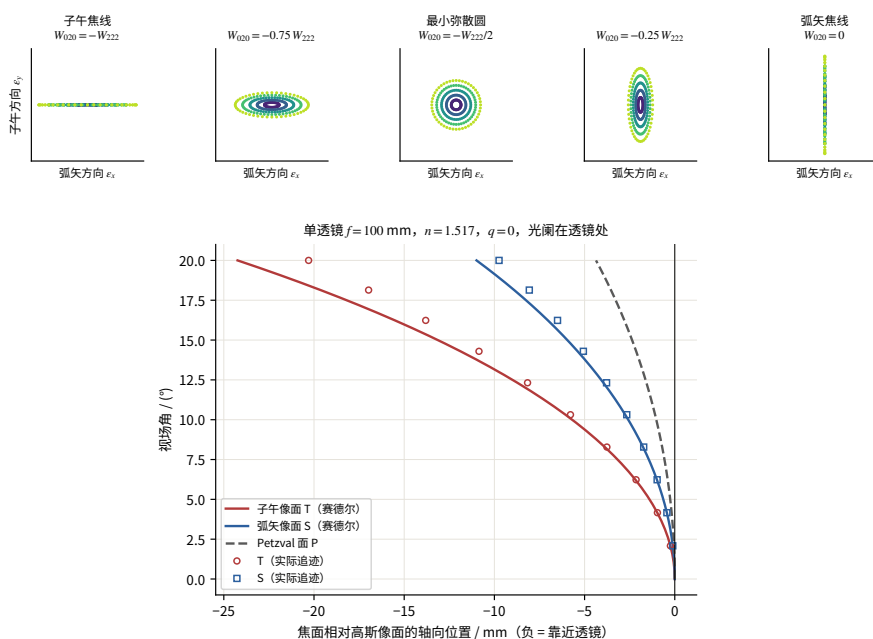


图 10 上：纯像散 ($W_{222} = 1$, $W_{220} = 0$) 在五个观察面上的光斑，从子午焦线经最小弥散圆到弧矢焦线 (单位任意)。下：单透镜 ($f = 100$ mm, $n = 1.5168$, $q = 0$, 光阑在透镜处, $f/10$) 的子午像面 T、弧矢像面 S 与 Petzval 面 P。实线为赛德尔预言，点为实际光线追迹 (主光线附近细光束的焦点)。全视场处 $(\delta_T - \delta_P)/(\delta_S - \delta_P) = 3$ 。

mm (差 3%–5%，高阶项)。像散差达 13 mm。在平的底片上， 20° 处的星点会拉成沿径向或切向的短线，或者一个椭圆，取决于对焦在哪里。

交互演示：像散与场曲的离焦扫描：自动移动观察面，光斑从子午焦线（横线）经最小弥散圆变成弧矢焦线（竖线）；下方标出 T、S、P 三个焦面的位置，读出 $(\delta_T - \delta_P)/(\delta_S - \delta_P)$ 。

网页版中此处为可调参数的交互动画（演示编号 aberration-astig）。

消除 (i) 移动光阑： $S'_{III} = S_{III} + 2sS_{II} + s^2S_I$ 是 s 的二次式，若判别式 $S_{II}^2 - S_I S_{III} \geq 0$ ，就有使像散为零的光阑位置。风景镜：弯月形薄透镜 ($q = -4$ ，凹面朝物， $f = 100$ mm, $f/10$ ，视场 10°)，光阑在透镜处时 $W_{131} = -8.54 \mu\text{m}$, $W_{222} = 3.89 \mu\text{m}$ 。由 $S'_{II} = S_{II} + sS_I = 0$ 得 $s^* = 0.538$ 。主光线在光阑中心过轴、以斜率 $\tan 10^\circ$ 到达透镜， $s = d \tan 10^\circ / a$ ，所以光阑在透镜前 $d^* = 15.3$ mm。此时彗差为零， W_{222} 降到 $-0.71 \mu\text{m}$ (图 6，实际追迹核对)。 10° 处子午焦面从高斯像面前 5.69 mm 移到前 0.17 mm，像场几乎变平，代价是 -0.31% 的桶形畸变。1812 年 Wollaston 提出用弯月形透镜做照相暗箱的物镜，以得到更平的像场 [20]。

(ii) 多片透镜组合：同时消像散、消场曲的镜头叫 anastigmat。一个两片的数值例子：N-BK7 负透镜 ($f_1 = -44.7$ mm) 在前，相隔 20 mm 放正透镜 ($f_2 = 44.7$ mm)，光阑在正透镜处。由 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - d\varphi_1\varphi_2 = d/f_2^2$ 得总焦距 100 mm；Petzval 和 $\varphi_1/n + \varphi_2/n = 0$ (第 6.4 节)。剩下两个形状因子作自由度，解 $S_{II} = S_{III} = 0$ 得 $q_1 = 0.629$ 、 $q_2 = -0.412$ ，即半径 -28.4 、 124.5 mm 与 78.6 、 -32.7 mm。注意前面的负透镜会缩小入瞳：光阑（在正透镜处）半径取 7.24 mm 时，入瞳半径才是 5 mm，即 $f/10$ 。在这一真正的 $f/10$ 、 10° 下做实际追迹，得 $W_{222} = 0.010 \mu\text{m}$ 、 $W_{220} = 0.003 \mu\text{m}$ ；同焦距、同 F 数的单透镜（取 $q = 0$ ，光阑在透镜处）为 3.89 与 $3.22 \mu\text{m}$ 。T、S 两个像面重合并且是平的。代价是球差与畸变： $W_{040} = 6.52 \mu\text{m}$ ，是单透镜 ($0.25 \mu\text{m}$) 的 26 倍；

畸变 -1.7% 。实际的消像散镜头（如三片式）就是在这类骨架上，再用更多的自由度去平衡球差、畸变和色差。

6.4 场曲

来源 $W_{220}h^2\rho^2$, $W_{220} = (S_{\text{III}} + S_{\text{IV}})/4$ 。它对 ρ 是二次的，形式上就是一个随视场 h^2 增长的离焦：每个视场点都成清晰的像（若无像散），只是像点不在同一平面上。 S_{IV} 部分叫 Petzval 场曲，由各面曲率与折射率决定（式 (5.10)），与光阑、物距、透镜形状都无关； S_{III} 部分来自像散。

推导：T、S、P 三个像面与“三比一”规则

视场 h 的像点在 $W_{020} = -W_{\text{eff}}h^2$ 的观察面上会聚，由式 (3.8)，像面相对高斯像面的位移为 $\delta = -2W_{\text{eff}}h^2/(n'u'^2)$ 。三个曲面分别取

$$\begin{aligned} W_{\text{eff}}^{(S)} &= W_{220}, \\ W_{\text{eff}}^{(T)} &= W_{220} + W_{222}, \\ W_{\text{eff}}^{(P)} &= W_{220} - \frac{1}{2}W_{222} = \frac{1}{4}S_{\text{IV}}. \end{aligned}$$

于是 $\delta_T - \delta_P \propto \frac{3}{2}W_{222}$, $\delta_S - \delta_P \propto \frac{1}{2}W_{222}$,

$$\delta_T - \delta_P = 3(\delta_S - \delta_P). \quad (6.3)$$

子午像面离 Petzval 面的距离总是弧矢像面的 3 倍，三者在同一侧。只有像散为零时，T、S 才重合于 Petzval 面。

推导：Petzval 和

把式 (5.10) 对各面求和，并用 $H^2 = n_k'^2 u_k'^2 \eta_{\text{max}}'^2$ 换回像面曲率（与第 5.3 节的推导相同），Petzval 面的曲率为

$$\frac{1}{r_P} = n_k' \sum_j c_j \left(\frac{1}{n_j'} - \frac{1}{n_j} \right), \quad (6.4)$$

n_k' 为像方折射率。空气中一片薄透镜两面之和为 $c_1(1/n - 1) + c_2(1 - 1/n) = -(n - 1)(c_1 - c_2)/n = -\varphi/n$ 。所以一组空气中的薄透镜（无论间隔多大）有

$$\frac{1}{r_P} = - \sum_i \frac{\varphi_i}{n_i} = - \sum_i \frac{1}{n_i f_i}. \quad (6.5)$$

$1/r_P < 0$ 表示 Petzval 面的曲率中心在像面左侧（朝透镜），即像面向透镜弯曲。

效果 若用平的探测器，视场 h 处的星点有离焦弥散，半径 $\propto h^2\rho$ ；中心对焦时边缘模糊，边缘对焦时中心模糊。

示例 单透镜 $f = 100 \text{ mm}$ 、 $n = 1.5168$ ： $r_P = -nf = -151.7 \text{ mm}$ 。20° 视场（像高 36.4 mm）处 Petzval 面在高斯像面前 4.37 mm（图 10）。单块凹面镜：取 $n = 1, n' = -1, 1/r_P = (-1) \cdot c(-1-1) = 2c$, $|r_P| = R_m/2 = f$ ，焦面是以球心为心、半径为 f 的球面，Schmidt 相机正是这样（第 7.1 节）。

消除 (i) 正负透镜分离：两片薄透镜 φ_1 、 φ_2 相距 d ，总光焦度 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - d\varphi_1\varphi_2$ ，而 Petzval 和 $\varphi_1/n_1 + \varphi_2/n_2$ 与 d 无关。取同种玻璃 $\varphi_2 = -\varphi_1$ ：Petzval 和为零，总光焦度却是 $d\varphi_1^2 > 0$ 。Petzval 和与光焦度可以分开控制，这是一切平场镜头的原理。Cooke 三片式（正-负-正）是最简单的例子 [9]：三片的光焦度、两个间隔与三个弯曲共 8 个自由度，正好够满足焦距、Petzval 和、其余四个赛德尔和与两种色差这 8 个条件。(ii) 场镜/平场镜：在像面附近放一片负透镜，那里边缘光线高度 $y \approx 0$ ，它几乎不改变系统光焦度（贡献 $\propto y$ ），却贡献完整的 $-\varphi/n$ 给 Petzval 和。(iii) 用像散抵消：让 $S_{\text{III}} = -S_{\text{IV}}$ 可使弧矢面变平， $S_{\text{III}} = -S_{\text{IV}}/2$ 可使中间像面变平，但代价是 T、S 分开。(iv) 弯曲探测器：Schmidt 相机用弯曲的底片；Kepler 空间望远镜（Schmidt 型）的焦面是弯曲的 CCD 阵列，每块 CCD 上再加蓝宝石平场镜 [11]。

6.5 畸变

来源 $W_{311}h^3\rho\cos\theta$ ， $W_{311} = S_V/2$ 。它对 ρ 是一次的——是一个随视场 h^3 增长的“倾斜”：同一物点的光线仍然交于一点，只是这一点不在高斯像高处。像点的位置由主光线决定，所以畸变的物理来源要看主光线怎样穿过系统。光阑移动公式 $S'_V = S_V + s(3S_{\text{III}} + S_{\text{IV}}) + 3s^2S_{\text{II}} + s^3S_{\text{I}}$ 中的各项各有几何意义：(a) s^3S_{I} ：主光线在透镜上的高度 $\bar{y} = shy$ 随视场增大。它穿过的是透镜的“外环”，那里有球差，主光线也被多折或少折一点，偏折量随 $\bar{y}^3 \propto h^3$ 偏离线性规律。对欠校正的正透镜 ($S_{\text{I}} > 0$)、光阑在前 ($s > 0$)，主光线被折得过头，像点落得比高斯像高更靠近轴，即桶形。(b) $s(3S_{\text{III}} + S_{\text{IV}})$ ：主光线的偏移在子午方向，起作用的是子午像面 T。 $3S_{\text{III}} + S_{\text{IV}} = 4(W_{220} + W_{222})$ 正是子午场曲的系数。视场 h 的子午光束会聚在弯曲的 T 面上，离开高斯像面 $\propto h^2$ ；而主光线相对光束的“中心光线”（过透镜中心的那条）倾斜一个 $\propto sh$ 的角度。它穿过平的高斯像面时，落点就偏开（倾角） $\times$ （像面偏离） $\propto sh^3$ 。(c) $3s^2S_{\text{II}}$ ：彗差使光束内不同光线的落点不同，偏心的主光线取到其中的一条。光阑在薄透镜处时 $s = 0$ ，三项都没有， $S_V = 0$ 。 s 越大畸变增长越快，所以畸变对光阑位置最敏感。

推导：相对畸变

由表 2，视场 h 的像点沿径向移动 $\varepsilon_y = -kW_{311}h^3 = W_{311}h^3/(n'u')$ 。高斯像高 $\eta' = h\eta'_{\text{max}}$ ，拉格朗日不变量 $H = -n'u'\eta'_{\text{max}}$ ，于是相对畸变

$$\begin{aligned} D(h) &\equiv \frac{\varepsilon_y}{\eta'} = \frac{W_{311}h^2}{n'u'\eta'_{\text{max}}} \\ &= -\frac{S_V}{2H} h^2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

$D < 0$ ：越往外像点越被“拉向中心”，方格的像四边外凸，叫桶形畸变； $D > 0$ ：像点被“推向外”，四角外伸，叫枕形畸变。 D 与孔径无关，正比于 h^2 。

效果 像是清晰的，只是几何形状变了：直线（不过中心的）成弯曲的像。对测量、拼接、制图用途的镜头，畸变比模糊更要紧。

示例 图 11：同一片透镜，光阑在前 30 mm 时角点（对角视场约 21° ）畸变 -5.9% ，光阑在后 20 mm 时 $+12.6\%$ 。规律：光阑在正透镜前得桶形，在后得枕形。原因可由光阑移动公式看出。光阑在透镜处时 $S_V = 0$ 。光阑在透镜前 d 处时，视场角为 $\bar{u} > 0$ 的主光线在光阑中心过轴，到透镜时

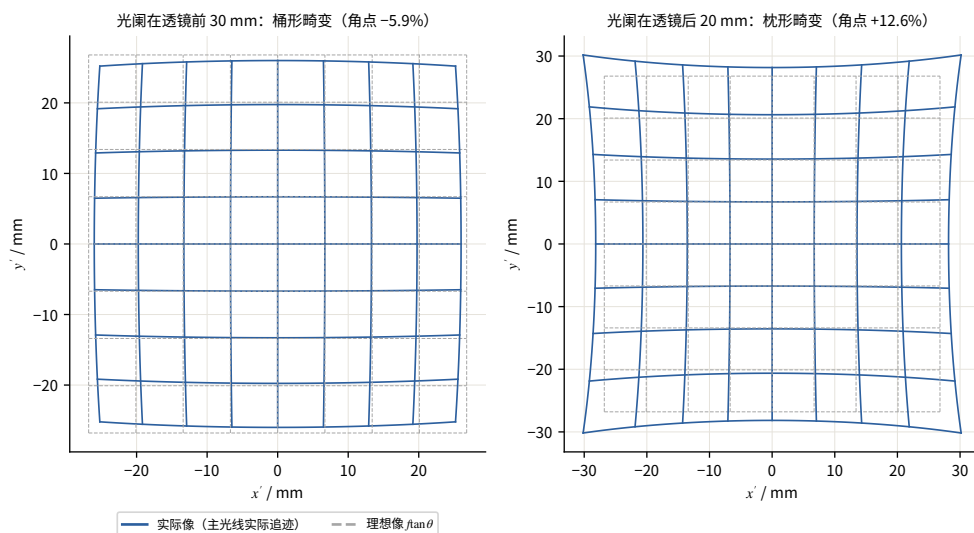


图 11 同一片双凸透镜 ($f = 100 \text{ mm}$, $q = 0$) 对无穷远方格物成像, 光阑在透镜前 30 mm 得桶形畸变 (左), 在透镜后 20 mm 得枕形畸变 (右)。蓝线由主光线的实际追迹得到 (迭代瞄准, 使主光线严格穿过实际光阑中心), 灰色虚线为理想像 $f \tan \theta$; 方格边缘对应每个方向 15° 。小视场 (5°) 处式 (6.6) 给出 -0.316% 与 $+0.465\%$, 追迹为 -0.316% 与 $+0.472\%$ 。大视场下两者偏离, 是五阶畸变的贡献; 光阑在后时还有光瞳像差——孔径光阑经它前面的元件所成的像 (入瞳) 本身有像差, 所以过实际光阑中心的主光线并不瞄准近轴入瞳中心。

已升到 $\bar{y} = \bar{u}d > 0$, 所以 $s = \bar{y}/y > 0$, 而 $H = \bar{u}a > 0$ 。式 (5.7) 中 s 的一次项 $s(3S_{\text{III}} + S_{\text{IV}})$ 起主导 (本例约为二次项的 3 倍), 对正透镜 $3S_{\text{III}} + S_{\text{IV}} = H^2\varphi(3 + 1/n) > 0$, 于是 $S'_V > 0$, $D = -S'_V/(2H) < 0$, 桶形。光阑在透镜后时 $\bar{y} < 0$, $s < 0$, 得枕形。用式 (5.14) 与式 (5.7) 算出的 5° 畸变正是图注中的 -0.316% 与 $+0.465\%$ 。对单片薄透镜还可以证明: 除 $s = 0$ 外, $S'_V(s)$ 没有别的零点, 所以光阑不在透镜上就必有三阶畸变; 对正透镜, 光阑在前必为桶形、在后必为枕形, 负透镜相反 (例题 4)。

交互演示：三阶畸变的方格图：单透镜或关于光阑对称的双透镜，可调光阑位置、形状因子与视场；对称双透镜在 1:1 成像时畸变严格为零，物在无穷远时只是近似抵消。

网页版中此处为可调参数的交互动画 (演示编号 aberration-distortion)。

消除 (i) 关于光阑对称：对称系统在 1:1 成像时 $S_V = 0$ (第 7.3 节), 前组的桶形与后组的枕形互相抵消。(ii) 光阑靠近光焦度集中处。(iii) 事后校正：畸变不损失信息, 若已知 $D(h)$, 可以在数字图像上把每个像素搬回原位——这是数字相机能容忍较大畸变的原因。

6.6 色差 (补充)

定义：阿贝数与两种色差

玻璃折射率随波长变化 (色散)。常用三条谱线：F 线 486.1 nm (蓝)、d 线 587.6 nm (黄)、C 线 656.3 nm (红)。阿贝数

$$\nu = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C} \quad (6.7)$$

越大，色散越弱。N-BK7 冕牌玻璃 $n_d = 1.5168$ 、 $\nu = 64.17$ ；F2 火石玻璃 $n_d = 1.62004$ 、 $\nu = 36.37$ [21]。轴向色差：不同颜色的焦点沿轴错开；横向色差：不同颜色的像高（放大率）不同。用波像差语言，它们正是第 4.2 节中“不算像差”的两个二阶项 W_{020} （离焦）与 W_{111} （放大率）随波长而变：对单一颜色可以重新对焦、重新定标，对白光却不能同时做到。

推导：薄透镜的轴向色差与消色差双胶合

薄透镜 $\varphi(\lambda) = (n(\lambda) - 1)(c_1 - c_2)$ ，所以 F、C 两线的光焦度差

$$\begin{aligned}\varphi_F - \varphi_C &= (n_F - n_C)(c_1 - c_2) \\ &= \frac{n_F - n_C}{n_d - 1} \varphi_d = \frac{\varphi_d}{\nu}.\end{aligned}$$

焦距 $f = 1/\varphi$ ， $\delta f = -\delta\varphi/\varphi^2$ ，得 $f_F - f_C \approx -f/\nu$ ：蓝光焦点更近。N-BK7、 $f = 100$ mm 时约 -1.56 mm（用 Sellmeier 色散公式精确计算为 -1.55 mm。Sellmeier 公式是光学玻璃厂给出的折射率经验公式 $n^2(\lambda) - 1 = \sum_{j=1}^3 B_j \lambda^2 / (\lambda^2 - C_j)$ ，来自把玻璃看成三组谐振子的色散模型，系数 B_j 、 C_j 由测量拟合得到 [21]）。

两片薄透镜密接，总光焦度 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ，F、C 光焦度差为 $\varphi_1/\nu_1 + \varphi_2/\nu_2$ 。令其为零：

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2} &= 0, \\ \text{即 } \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 &= 0, \\ \varphi_1 &= \frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2} \varphi, \\ \varphi_2 &= -\frac{\nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \varphi.\end{aligned}\tag{6.8}$$

要求 $\nu_1 \neq \nu_2$ ；取 $\nu_1 > \nu_2$ （冕牌在前）时正透镜用冕牌、负透镜用火石。 $f = 100$ mm 的 N-BK7/F2 双胶合： $f_1 = 43.3$ mm、 $f_2 = -76.4$ mm。

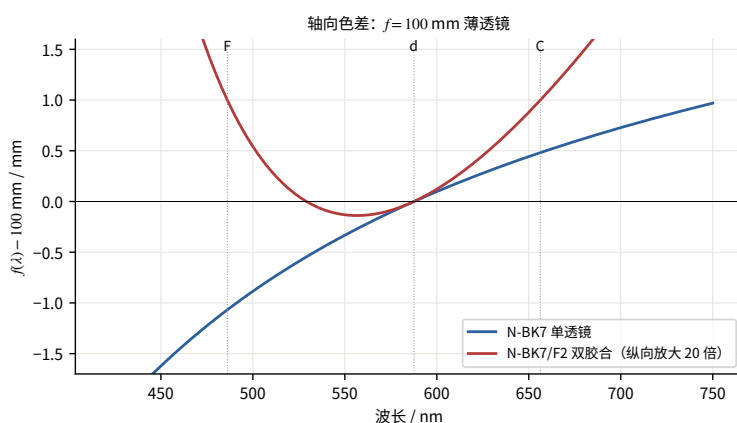


图 12 $f = 100$ mm 的 N-BK7 薄单透镜与 N-BK7/F2 薄消色差双胶合的焦距随波长的变化（折射率由 Schott 的 Sellmeier 系数计算 [21, 22]）。双胶合使 F、C 两线焦点重合，剩余的“二级光谱”约为 $f/2000$ （d 线与 F、C 线焦点相差 0.05 mm），焦距最短处在 557 nm。

消色差只能让两个波长（F、C）的焦点重合，其余波长的焦点仍有微小差别，叫二级光谱。原因是两种玻璃的色散曲线形状不完全相同。

注：横向色差与分离透镜

光阑在薄透镜处时，主光线过透镜中心不偏折，各色主光线重合，没有横向色差；光阑离开透镜时，主光线在透镜上的高度 $\bar{y} \neq 0$ ，偏折量 $\bar{y}\varphi$ 随颜色变化，产生横向色差。另一个有用的结果：同种玻璃、焦距 f_1 、 f_2 的两片薄透镜相距 $d = (f_1 + f_2)/2$ 时，组合焦距 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - d\varphi_1\varphi_2$ 对 n 的一阶导数为零（sympy 核对），物在无穷远时像高 $f \tan \theta$ 与颜色无关，即横向色差为零；惠更斯目镜用的就是这个条件。

6.7 小结：五种像差一览

表 3 五种赛德尔像差：效果、示例与主要消除方法

像差	光斑 / 像	本讲示例	主要消除方法
球差	轴对称圆盘，焦点沿轴拉长；横 ρ^3 、纵 ρ^2	$f/4$ 平凸透镜 LSA = 1.73 mm；哈勃 41 mm	弯曲、分裂、正负组合、非球面、齐明面
彗差	60° 彗星形，子午 = $3 \times$ 弧矢； $h\rho^2$	抛物面镜 $f/4$ 、 0.5° ：21"	正弦条件、光阑位置、对称结构、RC
像散	两条正交焦线，中间为圆； $h^2\rho$	单透镜 20° ：T、S 相距 13 mm	光阑位置、多片组合
场曲	像面弯曲； $h^2\rho$ （平底片上）	单透镜 $r_P = -nf$	Petzval 和为零（正负分离）、场镜、弯曲探测器
畸变	像清晰但变形； $D \propto h^2$	光阑前 30 mm：-5.9%	对称结构、光阑在透镜处、软件校正

7 消像差的设计原理**7.1 非球面与 Schmidt 相机**

由式 (5.3)，一个面相对球面的偏离 $\Delta z(r)$ 直接给波前加上 $(n' - n)\Delta z(r)$ 。只要 $\Delta z(r)$ 取得合适，就能抵消任意的轴上波像差：对单个物点做到完美成像的非球面（笛卡尔卵形面，第 38 届复赛考过）就是这一思想的极端情形。但式 (5.12) 提醒我们：非球面若不在光阑处 ($\bar{y} \neq 0$)，它在消球差的同时也改变彗差、像散、畸变。所以只想校正球差时，非球面应放在光阑或其像（光瞳）处。

推导：Schmidt 校正板

第一步（选光阑）：球面主镜（半径 R_m ）的光阑放在球心 C 。由第 5.2 节，此时每条主光线都是对称轴，离轴光束只有与轴上相同的球差 $W_{040} = a^4/(4R_m^3)$ ； $S_{II} = S_{III} = S_V = 0$ ；剩下 Petzval 场曲 $|r_P| = R_m/2$ 。

第二步（在光阑处加非球面板）：在 C 处放一块厚度随半径变化的薄玻璃板。板厚多出 $\Delta t(r)$ ，光程增加 $(n - 1)\Delta t$ ，波前落后， $\Delta W = -(n - 1)\Delta t$ 。板在光阑处， $\bar{y} = 0$ ，由式 (5.12) 它只改球差，不引入彗差、像散、畸变。要求 $\Delta W = -W_{040}\rho^4 + \beta W_{040}\rho^2$ (ρ^2 项是一个微弱的离焦，

只把焦点挪一点，可以自由选取)：

$$\Delta t(\rho) = \frac{W_{040}}{n-1}(\rho^4 - \beta\rho^2). \quad (7.1)$$

第三步 (选 β : 使色差最小): 板的折射率随波长变 δn , 于是对别的颜色, 板只校正了一部分, 剩下 $\delta W = -\delta n \Delta t = -\frac{\delta n}{n-1} W_{040}(\rho^4 - \beta\rho^2)$ 。这是一个“小号的球差加离焦”, 它造成的横向弥散正比于 $|\partial \delta W / \partial \rho| \propto |4\rho^3 - 2\beta\rho|$ 的最大值——与第 6.1 节求最小弥散圆是同一个数学问题! 所以最佳取 $\beta = 3/2$, 最大斜率为 1; 若取 $\beta = 1$ (使板的峰谷厚度最小), 最大斜率为 2, 色差弥散加倍。 $\beta = 3/2$ 时板最薄处在 $\rho_0 = \sqrt{\beta/2} = \sqrt{3}/2 \approx 0.866$, 叫中性带: 那里板面与光轴垂直, 任何颜色的光都不偏折。

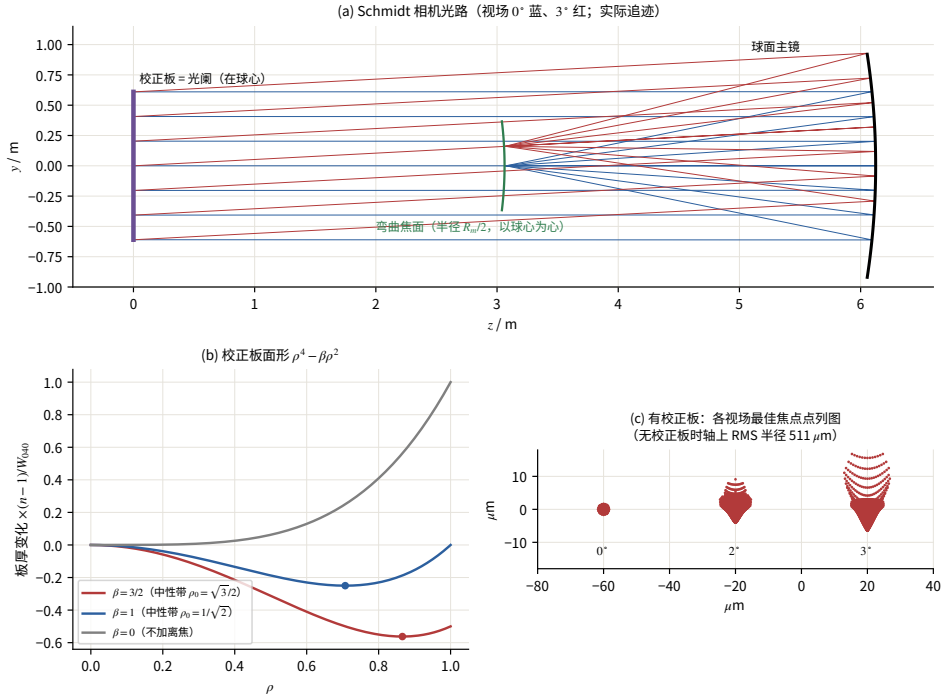


图 13 Schmidt 相机 (参数取 Palomar 48 英寸 Schmidt 的量级: $R_m = 6124\text{mm}$, 光阑半径 610mm, $f/2.5$ [23]; 校正板 $n = 1.5168$ 为本讲假设)。(a) 实际光线追迹的光路, 校正板即光阑, 在球心; 像面是以球心为心、半径 $R_m/2$ 的球面。(b) 校正板面形 $\rho^4 - \beta\rho^2$, 圆点为中性带。(c) 各视场在各自最佳焦点处的点列图: 轴上 RMS 半径 0.6 μm , 2°、3° 处 3.1 μm 、4.9 μm (残余是光束斜穿校正板引起的高阶像差); 没有校正板时, 轴上最佳焦点 (在近轴焦点朝镜面一侧 10.2mm 处) 的 RMS 半径约 0.51mm (三阶估计 $\frac{2}{3}kW_{040} = 0.50\text{mm}$)。

注: Schmidt 相机的数值

Palomar 的 Oschin Schmidt 望远镜: 球面主镜直径 1828mm、曲率半径 6124mm, 光阑在球心, 校正板直径 1244mm, 焦面曲率半径 3062mm[23]; 入瞳 (光阑) 口径 48 英寸 (1.22m), 焦比 $f/2.5$ [24]。用这些数, $W_{040} = a^4/(4R_m^3) = 151\mu\text{m}$ (约 270 个波长)。若板玻璃 $n = 1.5168$, $\beta = 3/2$, 板的面形峰谷值为 $\frac{9}{16}W_{040}/(n-1) = 164\mu\text{m}$ ——一块 1.2m 的玻璃板, 表面只需磨出 0.16mm 的起伏。剩余色差: 由阿贝数的定义 $n_F - n_C = (n_d - 1)/\nu$, F 线或 C 线相对 d 线约差 $\delta n \approx (n_d - 1)/(2\nu)$; 弥散半径 $2F \cdot W_{040} \delta n / (n-1) \approx 5.9\mu\text{m}$, 约 0.40"。我们的追迹

还显示，校正板需要在解析值基础上微调 1.5%（因为板本身的弱光焦度略改变了镜面上的光线高度），并加一个 ρ^6 项抵消球面镜的六阶球差。

7.2 阿贝正弦条件与齐明系统

推导：正弦条件

设系统已把轴上物点 O 完美成像于 I （无球差）：所有光线的光程 $[OI]$ 相同。现在问：紧邻的离轴点 O_1 （物高 $\delta\eta$ ，垂直于轴）是否也被完美成像于 I_1 （像高 $\delta\eta'$ ）？

对一条在物方与轴成角 u 、在像方与轴成角 u' 的子午光线，用端点变分公式 (3.2)：起点移动 $\delta\eta\hat{y}$ ，终点移动 $\delta\eta'\hat{y}$ ，光线方向的 y 分量分别为 $\sin u$ 、 $\sin u'$ ，

$$[O_1I_1] - [OI] = n'\delta\eta'\sin u' - n\delta\eta\sin u.$$

O_1 完美成像要求这个光程差对所有光线相同。对沿轴的光线 $u = u' = 0$ ，它为零，所以对一切 u 都应为零：

$$\begin{aligned} n\delta\eta\sin u &= n'\delta\eta'\sin u' \\ \iff \\ m = \frac{\delta\eta'}{\delta\eta} &= \frac{n\sin u}{n'\sin u'} = \text{常数}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

这就是阿贝正弦条件 [25]：横向放大率对所有孔径角都相同。近轴极限下它退化为拉格朗日不变量 $nu\eta = n'u'\eta'$ 。物在无穷远时，用入射平面波的倾角 $\delta\alpha$ 代替 $\delta\eta$ ：高度 Y 处光线的起点光程变化为 $-nY\delta\alpha$ ，于是条件变为

$$\frac{Y}{\sin|u'|} = f, \quad (7.3)$$

这对一切入射高度 Y 都应成立，即每条入射光线与对应出射光线的交点落在以焦点为心、半径 f 的球面上（“主面是球面”）。

推导：不满足正弦条件 $\Rightarrow$ 彗差

物在无穷远、空气中。本小节只比较各量的大小，方向由抛物面镜的例子另行确定，因此一律用绝对值。设 $Y/\sin|u'| = f[1 + g(Y)]$ ， g 叫正弦差。重复上面的论证：入射波前倾斜 $\delta\alpha$ 使高度 Y 的光线起点光程改变 $Y\delta\alpha$ ；若把它们都会聚到高斯像点（像高 $\delta\eta' = f\delta\alpha$ ），终点光程改变 $f\delta\alpha\sin|u'|$ 。两者之差就是这条光线相对于轴上光线的光程差，大小为 $|\Delta L| = \delta\alpha|Y - f\sin|u'|| \approx \delta\alpha Y|g(Y)|$ （小 g ）。对一般方位角 θ 的光线，位移的 y 分量乘以 $\cos\theta$ ，所以附加波像差 $\propto \delta\alpha Yg(Y)\cos\theta$ 。三阶近似下 $g \propto Y^2$ ，这正是 $h\rho^3\cos\theta$ 的彗差项。由 $W_{131}h = \delta\alpha a g(a)$ （按大小）与 $C = kW_{131}h$ 、 $k = f/a$ ：

$$\begin{aligned} |C|_{\text{弧矢彗差}} &= \eta' |g(a)|, \\ \eta' &= f\delta\alpha. \end{aligned} \quad (7.4)$$

检验（抛物面镜）：抛物面上高度 Y 的点到焦点的距离为 $f + Y^2/(4f)$ （sympy 核对），反射光线从该点射向焦点，所以 $Y/\sin|u'| = f + Y^2/(4f)$ ， $g(a) = a^2/(4f^2)$ ，弧矢彗差 $\eta'a^2/(4f^2) = \theta_f a^2/(4f) = \theta_f f/(16F^2)$ ，与第 6.2 节由光阑移动得到的结果完全相同。

要点：齐明系统

同时消去球差与彗差 ($S_I = S_{II} = 0$ ，即无球差且满足正弦条件) 的系统叫齐明 (aplanatic) 系统。单个球面的齐明点 (第 5.3 节，物点距球心 rn'/n) 是严格齐明的：它对所有孔径角都满足正弦条件，横向放大率为 $(n/n')^2$ 。显微镜高倍物镜的前片常做成工作在齐明点附近的半球或弯月透镜，以在大数值孔径下保持无球差、无彗差。RC 望远镜是齐明的双镜系统。

7.3 对称原理**推导：关于光阑对称的系统在 1:1 成像时无彗差、无畸变、无横向色差**

设系统关于光阑平面镜面对称 (后半部分是前半部分的镜像)，物面与像面也关于光阑平面对称，于是近轴放大率 $m = -1$ ：视场 $\mathbf{h}$ 的物点 O_h 的高斯像点 P'_h 在像面上 $-\mathbf{h}$ 处。

第一步 (在光阑处断开)：定义 $U(\mathbf{h}, \boldsymbol{\rho}) = [O_h S_\rho] + [S_\rho P'_h]$ ， S_ρ 是光阑上坐标 $\boldsymbol{\rho}$ 的点，两段各自都沿实际光线 ($S_\rho \rightarrow P'_h$ 是从 S_ρ 恰好射到高斯像点的那条实际光线)。比较 U 与断开光路函数 $V(Q)$ (式 (3.9)， Q 是过 S_ρ 的实际光线与参考球的交点)：两者的差别只在 S_ρ 到 P'_h 这一段。 U 走的是这两点间的实际光线； V 走的是“沿实际光线到 Q ，再直线到 P'_h ”，它与前者只相差像差量级的偏离。端点固定，由推论 1，两者的光程差是二阶小量。所以到四阶精度， $W(\mathbf{h}, \boldsymbol{\rho}) = U(\mathbf{h}, \mathbf{0}) - U(\mathbf{h}, \boldsymbol{\rho})$ 。

第二步 (用对称性)：把整条路径对光阑平面作镜面反射并反转光的方向。系统不变；光程在反向与镜面反射下都不变；光阑上的点 S_ρ 不动；物面上的 O_h (横向位置 $\mathbf{h}$) 变成像面上横向位置 $\mathbf{h}$ 的点，即 P'_{-h} ；像面上的 P'_h (横向位置 $-\mathbf{h}$) 变成物面上的 O_{-h} 。所以

$$\begin{aligned} [O_h S_\rho] &= [S_\rho P'_{-h}], \\ [S_\rho P'_h] &= [O_{-h} S_\rho] \\ \Rightarrow U(\mathbf{h}, \boldsymbol{\rho}) &= U(-\mathbf{h}, \boldsymbol{\rho}). \end{aligned}$$

第三步 (结论)：到四阶精度， $W(\mathbf{h}, \boldsymbol{\rho}) = W(-\mathbf{h}, \boldsymbol{\rho})$ ， W 是 $\mathbf{h}$ 的偶函数。式 (4.3) 中对 $\mathbf{h}$ 为奇次的彗差 W_{131} 、畸变 W_{311} ，以及二阶的倾斜项 W_{111} (对每种颜色分别成立，所以没有三阶横向色差)，都为零。球差、像散、场曲是偶次的，两半的贡献相加而不抵消。注意第一步只在四阶精度下成立，所以这一论证只保证三阶彗差为零；高阶彗差一般不为零。

要点：畸变与横向色差：对所有阶严格为零

对主光线可以做严格论证。取视场 $\mathbf{h}$ 的实际主光线前半段 $O_h \rightarrow S_0$ ，设它到达光阑中心时方向为 $\hat{\mathbf{k}} = (k_x, k_y, k_z)$ 。依次作三个操作：对光阑平面镜面反射，反转光的方向，再绕光轴转 180° 。系统在每个操作下都不变，所以得到的仍是一条实际光线。它从 S_0 出发，方向依次变为 $(k_x, k_y, -k_z) \rightarrow (-k_x, -k_y, k_z) \rightarrow (k_x, k_y, k_z)$ ，即与原主光线在 S_0 处方向相同；它的终点是像面上横向位置 $-\mathbf{h}$ 的点。从同一点、沿同一方向出发的光线是唯一的，所以它就是原主光线的后半段。因此实际主光线严格落在高斯像点 $-\mathbf{h}$ 上：1:1 对称系统的畸变对所有阶为零。论证对每个波长都成立，所以横向色差 (主光线高度随颜色的变化) 也对所有阶为零。

检验：数值核对

把第 6.3 节风景镜的弯月透镜与它的镜像关于光阑对称放置（间隔 $2 \times 15.3 \text{ mm}$ ），在 $1:1$ 成像时，逐面计算的 S_{II} 与 S_{V} 分别为 -1.4×10^{-18} 与 $-5.2 \times 10^{-18} \text{ mm}$ （舍入误差），而 $S_{\text{I}} = 8.0 \times 10^{-4} \text{ mm}$ 不为零。同一系统对无穷远物成像时（两半的共轭不再对称）， S_{V} 不为零，畸变为 $+0.97\%$ ：对称原理只在 $m = -1$ 时严格成立。

7.4 RC 望远镜与哈勃

卡塞格林型双镜望远镜：凹主镜把光会聚，凸副镜在主镜焦点之前把光反射回去，穿过主镜中央的孔成像。两块镜面各有一个圆锥常数 κ_1 、 κ_2 。

推导：两个圆锥常数，两个条件

光阑在主镜上：主镜处 $\bar{y}_1 = 0$ ，副镜处 $\bar{y}_2 \neq 0$ 。由式 (5.12)，主镜的圆锥常数只出现在 S_{I} 中，副镜的出现在 S_{I} 和 S_{II} 中：

$$\begin{aligned} S_{\text{I}} &= S_{\text{I}}^{\text{球}} + \kappa_1 c_1^3 y_1^4 \Delta n_1 + \kappa_2 c_2^3 y_2^4 \Delta n_2, \\ S_{\text{II}} &= S_{\text{II}}^{\text{球}} + \kappa_2 c_2^3 y_2^3 \bar{y}_2 \Delta n_2, \end{aligned}$$

$S^{\text{球}}$ 是两块镜都取球面时的赛德尔和（式 (5.11)），反射面 $\Delta n = -2n$ 。这是关于 κ_1, κ_2 的线性方程组：先由 $S_{\text{II}} = 0$ 定 κ_2 ，再由 $S_{\text{I}} = 0$ 定 κ_1 。用两个无量纲参数表示几何：副镜的横向放大率 $m = f/f_1$ （系统焦距与主镜焦距之比），以及 $\beta = \text{焦点到主镜顶点的距离（后截距）}/f_1$ 。把各面的 y 、 $\bar{y}$ 、 c 用 m 、 β 写出后解这个方程组，得到 Schroeder 给出的闭式 [26]：

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -1 - \frac{2(1+\beta)}{m^2(m-\beta)}, \\ \kappa_2 &= -\left(\frac{m+1}{m-1}\right)^2 - \frac{2m(m+1)}{(m-\beta)(m-1)^3}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

推导见附录 D；脚本 `verify_rc.py` 对四组 (m, β) 核对了式 (7.5) 与逐面赛德尔和的数值解，两者一致到 10^{-7} 。

- 经典卡塞格林： $\kappa_1 = -1$ （主镜自身对无穷远完美），副镜是以主镜焦点 F_1 （虚物）和最终焦点 F_2 为两焦点的双曲面。双曲面上任一点到两焦点的距离之差为常数，所以它把会聚向 F_1 的球面波严格变成会聚向 F_2 的球面波。设副镜顶点到 F_1 、 F_2 的距离为 $c-a$ 与 $c+a$ （双曲线的半焦距 c 、实半轴 a ），二者之比就是放大率 m ，于是离心率 $e = c/a = (m+1)/(m-1)$ ， $\kappa_2 = -e^2 = -[(m+1)/(m-1)]^2$ 。此时 $S_{\text{I}} = 0$ ，但 $S_{\text{II}} \neq 0$ 。比较式 (7.5)，RC 的两个圆锥常数在这一基础上各多出一个修正项。
- RC：同时要求 $S_{\text{I}} = S_{\text{II}} = 0$ ，两块镜都是双曲面，系统齐明。

哈勃的数值 用 Allen 报告的设计参数（主镜 $R_1 = 11040.0 \text{ mm}$ ，副镜 $R_2 = 1358.0 \text{ mm}$ ，间距 4906.072 mm ，焦点在主镜顶点后 1500.0 mm ，光阑半径 1200 mm ）[2]，近轴追迹得系统焦距

57.60 mm、像面位于主镜后 1500.02 mm。此时 $m = 57.60/5.52 = 10.435$, $\beta = 1500/5520 = 0.2717$ 。代入式 (7.5) 得 $\kappa_1 = -1.0022986$ 、 $\kappa_2 = -1.4969$ (经典卡塞格林的副镜为 -1.4689)；设计值为 -1.0022985 、 -1.49600 [2]。 κ_1 一致到 10^{-7} , κ_2 相差 0.06% (我们只施加了三阶条件, 实际设计还要平衡更高阶像差与视场像差)。主镜磨成 $\kappa_1 = -1.0139$ 后, 只有 S_1 改变 (主镜在光阑上), 这就是“纯球差”的由来 (图 14, 例题 1)。

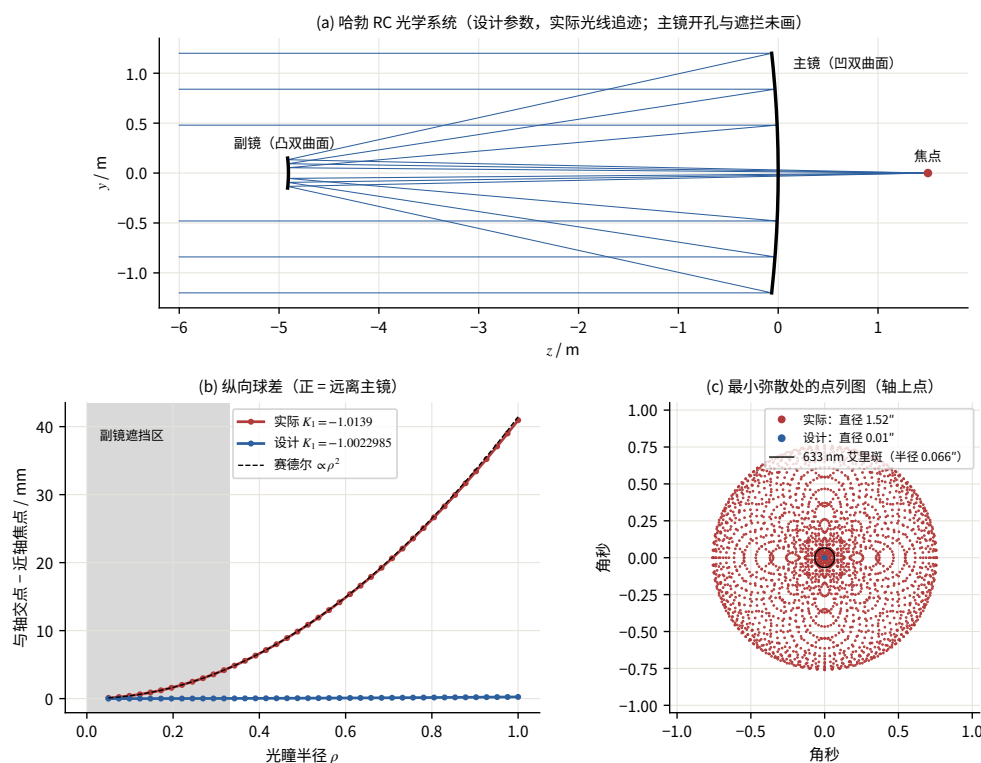


图 14 哈勃望远镜 (参数取自 Allen 报告表 E-1[2]; 实际主镜 $\kappa_1 = -1.0139$ [4])。(a) 设计系统的子午面光路 (实际追迹)。(b) 不同光瞳半径的光线与轴交点相对近轴焦点的距离: 实际主镜的纵向球差 $\propto \rho^2$, 边缘达 40.9 mm (虚线为赛德尔预言 41.4 mm), 设计系统几乎为零; 灰色为副镜遮挡区。(c) 两者在各自最小弥散处的点列图 (遮挡比 0.33 的环形光瞳): 实际主镜光斑直径 $1.52''$, 设计系统 $0.01''$, 圆为 633 nm 艾里斑 (半径 $0.066''$)。

8 数值光线追迹

赛德尔理论是展开到四阶的近似。要检验它, 也为了处理大孔径、大视场, 需要实际光线追迹: 严格按斯涅耳定律一面一面地追每条光线。

推导: 矢量形式的折射定律

入射光线单位方向 $\hat{k}$, 界面单位法线 $\hat{N}$ (取 $\hat{N} \cdot \hat{k} > 0$), 入射角余弦 $\cos i = \hat{N} \cdot \hat{k}$, $\mu = n/n'$ 。斯涅耳定律包含两部分: (a) 折射光线在入射面内 ($\hat{k}$ 、 $\hat{N}$ 、 $\hat{k}'$ 共面); (b) $n \sin i = n' \sin i'$ 。两者合起来等价于“方向矢量的切向分量乘以折射率连续”:

$$n[\hat{k} - (\hat{k} \cdot \hat{N})\hat{N}] = n'[\hat{k}' - (\hat{k}' \cdot \hat{N})\hat{N}],$$

因为切向分量的方向确定了入射面,其长度分别是 $\sin i, \sin i'$ 。解出 $\hat{\mathbf{k}}' = \mu \hat{\mathbf{k}} + (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{N}} - \mu \cos i) \hat{\mathbf{N}}$ 。再由 $|\hat{\mathbf{k}}'| = 1$: 切向分量长度为 $\mu \sin i$, 所以 $\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{N}} = \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 i}$ (取正, 折射光继续向前):

$$\hat{\mathbf{k}}' = \mu \hat{\mathbf{k}} + \left(\sqrt{1 - \mu^2 (1 - \cos^2 i)} - \mu \cos i \right) \hat{\mathbf{N}}. \quad (8.1)$$

根号内为负时发生全反射。反射定律则为 $\hat{\mathbf{k}}' = \hat{\mathbf{k}} - 2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{N}}) \hat{\mathbf{N}}$ 。

算法 每一面用式 (5.1) (可加 r^4, r^6 项) 描述。(1) 交点: 光线 $\mathbf{P} + t\hat{\mathbf{k}}$, 解 $F(t) = z(t) - z_v - \text{sag}(r(t)) = 0$, 从顶点平面出发做牛顿迭代, 收敛到 10^{-13} mm。(2) 法线: $\hat{\mathbf{N}} \propto (-\partial_x \text{sag}, -\partial_y \text{sag}, 1)$ 。(3) 用式 (8.1) 或反射公式得新方向, 累加光程 $|n|t$ 。(4) 最后求光线与参考球 (球心为高斯像点、过近轴出瞳中心) 的交点, 按定义 (3.5) 得 W ; 或求与高斯像面的交点得 ϵ 。(5) 在多个视场 h 与光瞳网格 (ρ, θ) 上计算 W , 用最小二乘按全部旋转不变单项 $h^k \rho^l \cos^m \theta$ ($k + l \leq 8$) 拟合, 读出 $W_{040}, \dots, W_{311}$ 。程序见 `scripts/optics.py` (约 300 行, 只用 numpy)。

表 4 赛德尔和 (式 (5.11)、(5.12)) 给出的系数 (单位 μm)。实际光线追迹拟合的结果在表中五位有效数字上与之完全相同 (唯一差别: 哈勃一行 W_{220} 追迹为 0.39502)

系统	W_{040}	W_{131}	W_{222}	W_{220}	W_{311}
球面镜 $R_m = 1000, a = 50, \theta = 0.01$	1.56250	-1.25000	0.25000	0.00000	0.00000
抛物面镜 (同上)	0.00000	-1.25000	0.25000	0.00000	0.00000
单个折射面 $r = 100, n: 1 \rightarrow 1.5$ ($a = 10$, 物在无穷远, $\theta = 0.02$)	0.27778	0.22222	0.04444	0.05556	0.02222
平凸透镜, 光阑前 10 mm, $f/25, 1^\circ$	0.00436	0.00355	0.00649	0.00525	0.00206
哈勃 RC (设计), 0.05°	-0.02751	-0.00353	0.08183	0.39501	-0.01385

表 4 中各系统的赛德尔预言与追迹拟合在所列有效数字上完全相同 (核对脚本要求每个系数的相对差小于 0.2%)。这同时检验了三件事: 横向/波像差的定义与符号约定、单面公式 (5.11) (含光阑移动的推导)、非球面附加项 (5.12)。抛物面镜一行说明: 二次曲面消去了球差, 彗差与球面镜相同 (第 5.2 节)。哈勃设计系统的球差、彗差只剩 0.03、0.004 μm 量级, 主要剩下场曲与像散——RC 是齐明而非消像散的系统。

标度律的检验 赛德尔理论的另一个可检验的预言是各像差随 ρ, h 的幂次。图 15 用平凸透镜 ($f/5$ 、视场 5°) 的子午光线扇, 只利用光线的对称性把各像差分开 (不做任何拟合): $\pm\rho$ 两条光线的平均扣去主光线即为彗差 (对 ρ 偶), 差的一半扣去轴上球差即为像散加场曲 (对 ρ 奇), 主光线本身即为畸变。双对数图上的斜率分别是 3、2、1 (随 ρ) 与 1、2、3 (随 h), 与表 2 完全一致; 在全口径、全视场处追迹与赛德尔的偏差为 0.3%–6.5%, 这就是被忽略的五阶像差的大小。

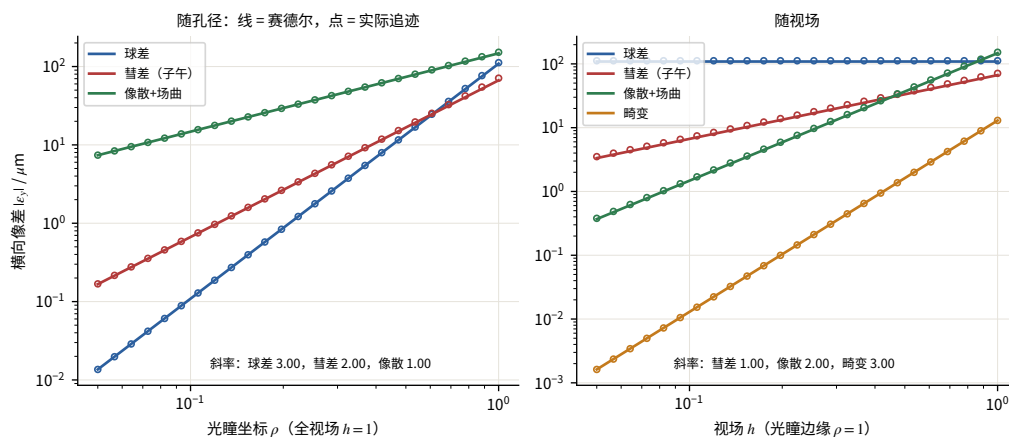


图 15 用实际光线追迹检验标度律（平凸透镜 $f = 100 \text{ mm}$, $f/5$, 光阑在透镜前 10 mm , 全视场 5° ）。线为赛德尔预言，点为追迹；图中给出拟合斜率。

9 决赛风格例题

例题 1：哈勃主镜的 2.2 微米

哈勃望远镜的主镜顶点曲率半径 $R_1 = 11.04 \text{ m}$, 通光半径 $a_1 = 1.20 \text{ m}$, 光阑在主镜上；系统焦比 $F = 24$, 副镜遮挡的光瞳半径比为 0.33 。设计圆锥常数 $\kappa_d = -1.0022985$, 实际磨成 $\kappa = -1.0139$ 。取 $\lambda = 633 \text{ nm}$ 。

1. 只改变主镜的圆锥常数，为什么只改变系统的球差，而不改变彗差、像散、畸变？求主镜边缘的面形误差 $\Delta z(a_1)$ ，并说明边缘是“太平”还是“太弯”。
2. 求由此产生的波像差系数 ΔW_{040} （以 μm 与波长数表示），判断边缘光线的焦点在近轴焦点之前还是之后。
3. 在 $f/24$ 焦面处，边缘焦点与近轴焦点相距多远？为什么用系统的 $F = 24$ 而不是主镜自己的焦比 $f/2.3$ ？
4. 求最小几何弥散圆的位置与角直径，与 633 nm 的艾里斑角直径 $2.44\lambda/D$ 比较。
5. 求在最佳焦面上波前的方均根误差 σ_W ：先对完整圆形光瞳，再对遮挡比 $\epsilon = 0.33$ 的环形光瞳。（提示：在 $\epsilon \leq \rho \leq 1$ 上按面积平均， $\langle \rho^{2m} \rangle = \frac{1 - \epsilon^{2m+2}}{(m+1)(1 - \epsilon^2)}$ ；“最佳焦面”指选 W_{020} 与活塞项使方差最小。）与常用的衍射极限判据 $\sigma_W \leq \lambda/14$ （Maréchal 判据）比较。
6. 地面检验：主镜在磨制过程中是在它的曲率中心用点光源检验的（光从球心附近的点射向镜面，反射回来）。求一块设计面形（ κ_d ）的主镜在这种检验中显示的波像差 W_{cc} 。“反射式零位校正器”是一组放在检验光路中的光学元件，它产生大小相等、符号相反的球差，使合格的镜面显示“零条纹”。零位校正器的输出球差需要准确到什么程度？Allen 报告认定，场镜位置偏了 1.3 mm 就完全解释了事故，这相当于零位校正器的输出球差改变了百分之几？

7. 校正的思路：在系统中主镜的某个像（光瞳像）处放一块小反射镜，光瞳像半径为 a_c 。它的面形应相对理想面形偏离多少？为什么必须放在光瞳像处？若放在光阑移动参数 $s \neq 0$ 的位置会怎样？

解答：例题 1

(1) 主镜就是光阑，主光线在主镜上的高度 $\bar{y}_1 = 0$ 。由式 (5.12)，非球面附加项 $\delta S_{II}, \delta S_{III}, \delta S_V$ 都含 $\bar{y}_1$ 的正次幂，为零，只有 δS_I 。由式 (5.2)，同一顶点曲率下 $\Delta z = \Delta \kappa c^3 r^4 / 8$ 。按大小，

$$|\Delta z(a_1)| = \frac{|\Delta \kappa| a_1^4}{8 R_1^3} = \frac{0.0116 \times (1.20)^4}{8 \times (11.04)^3} \text{ m} \\ = 2.24 \mu\text{m}.$$

κ 更负，曲面越往外越偏离球面向“平”的方向（抛物面比球面平，双曲面比抛物面更平），所以边缘太平：镜面边缘比设计位置远离入射光 $2.2 \mu\text{m}$ ，与 NASA 给出的数值一致 [3]。

(2) 由式 (5.3) 的反射情形，镜面边缘远离入射光 $|\Delta z|$ ，光去时多走 $|\Delta z|$ 、回来又多走 $|\Delta z|$ ，边缘波前落后 $2|\Delta z|$ ：

$$\Delta W_{040} = -2|\Delta z(a_1)| = -4.47 \mu\text{m} \approx -7.1\lambda.$$

(实际光线追迹与式 (5.12) 均给出 $-4.47 \mu\text{m}$ ；Burrows 等人由星像反推“边缘光线在近轴焦点处的光程误差为 $4.6 \mu\text{m}$ ” [1]。) $W_{040} < 0$ ：边缘波前落后、曲率不足，边缘光线会聚得晚，焦点在近轴焦点之后（过校正）。

(3) 波像差是“每条光线的光程差”，经过副镜反射后保持不变（副镜的球差在设计中已平衡，这里只看变化量）。在最终像方， $u' = -1/(2F)$ ，由式 (6.1)：

$$\delta_m = -\frac{4\Delta W_{040}}{u'^2} = 16F^2 |\Delta W_{040}| \\ = 16 \times 576 \times 4.47 \mu\text{m} = 41.2 \text{ mm}.$$

实际光线追迹给出 40.9 mm ；Burrows 等人在轨测得约 43 mm [1]。纵向像差取决于会聚到该焦点的光束的锥角：同一个 W ，锥角越小（焦比越大），焦点沿轴拉得越长 ($\propto F^2$)。在主镜自己的 $f/2.3$ 焦点处同一误差只对应 $16 \times 2.3^2 \times 4.47 \mu\text{m} \approx 0.38 \text{ mm}$ 。

(4) 最小弥散圆在近轴焦点之后 $\frac{3}{4}\delta_m = 30.9 \text{ mm}$ 处，半径 kW_{040} ， $k = R/(n'a) = 2F$ ，直径 $4F|W_{040}| = 0.429 \text{ mm}$ 。除以系统焦距 57.6 m ，角直径 $7.45 \times 10^{-6} \text{ rad} = 1.54''$ （实际追迹 $1.52''$ ，图 14）。艾里斑角直径 $2.44\lambda/D = 0.13''$ ，几何光斑直径约为它的 12 倍：星像变成“亮核 + 角秒级的晕”。

(5) 圆形光瞳： $\sigma_W = |W_{040}|/(6\sqrt{5}) = 0.333 \mu\text{m} = 0.53\lambda$ 。环形光瞳：最佳离焦相当于用 ρ^2 与常数对 ρ^4 作最小二乘，剩余方差为

$$\frac{\sigma_W^2}{W_{040}^2} = \text{Var}(\rho^4) - \frac{\text{Cov}(\rho^4, \rho^2)^2}{\text{Var}(\rho^2)},$$

用提示中的矩代入 $\epsilon = 0.33$ ，得 $\sigma_W = 0.0592 |W_{040}| = 0.265 \mu\text{m} = 0.42\lambda$ 。Allen 报告给出的最佳焦点处方均根波前误差正是“0.4 个波长 (632.8 nm)” [2]。衍射极限要求 $\sigma_W \leq \lambda/14 \approx 0.07\lambda$ [15]，实际超出约 6 倍，离衍射极限很远。（遮挡使 σ_W 变小：去掉中心区域后，剩下的环带上 ρ^4 更接近 ρ^2 的线性函数，更多的部分能被离焦抵消。）

(6) 球面镜在曲率中心检验时, 点光源发出的每条光线都沿法线入射、原路返回, 所以球面显示零像差。圆锥面相对同顶点曲率的球面偏离 $\Delta z = \kappa r^4 / (8R^3)$ (式 (5.2), 取大小), 光线近乎垂直入射, 往返光程差 $2\Delta z$ (斜入射的修正是六阶)。所以边缘处

$$\begin{aligned} |W_{cc}| &= \frac{|\kappa_d| a_1^4}{4R_1^3} = \frac{1.0023 \times (1.20)^4}{4 \times (11.04)^3} \text{ m} \\ &= 386 \mu\text{m} \approx 610\lambda. \end{aligned}$$

(点光源放在曲率中心的实际光线追迹给出同一值。)这与“近抛物面在无穷远处几乎无像差”并不矛盾: 同一块镜面在不同的共轭位置有完全不同的球差。零位校正器必须产生 $386 \mu\text{m}$ 、即约 610 个波长的反向球差。由于 $W_{cc} \propto \kappa$, 它的相对误差直接变成圆锥常数的相对误差: $\Delta\kappa/\kappa = 0.0116/1.0023 = 1.16\%$ 。也就是说, 零位校正器的输出只要错 1.2%, 就造成了这次事故; 要把 κ 控制在 10^{-3} 量级, 校正器的输出必须准确到约千分之一。这一问的教训是: 大口径非球面的“零检验”把测量的全部责任交给了校正器本身, 所以需要有一个独立的检验。Allen 报告指出, 当时另外两台检验装置其实都显示了误差, 但被当作那两台装置自身的问题而忽略了 [2]。

(7) 每条光线的光程差在成像 (包括光瞳成像) 过程中守恒。所以只要在光瞳像上把对应同一条光线的位置的波前提前 $|\Delta W_{040}| \rho^4$, 就能抵消。对反射镜, $\Delta W = -2n\Delta z$, 需要

$$\Delta z_c(\rho) = \frac{|\Delta W_{040}|}{2} \rho^4 = 2.24 \mu\text{m} \times \rho^4,$$

(偏离朝向入射光), 即校正镜的面形误差与主镜误差大小相同、方向相反, 且与光瞳像的大小 a_c 无关——无论校正镜是 1 cm 还是 1 m, 要磨出的都是边缘 $2.2 \mu\text{m}$ 的起伏。(a_c 只影响把它写成圆锥常数时的数值: $\Delta\kappa_c \propto a_c^{-4} R_c^3$ 。)必须放在光瞳像处的原因: 只有在光瞳像上, 不同视场的光束才落在同一块区域上 ($s = 0$), 校正对全视场一样有效。若放在 $s \neq 0$ 的面上, 由光阑移动公式, 这块“反球差”板在视场 h 处会额外产生彗差 $4s\Delta W_{040}h$ 、像散 $4s^2\Delta W_{040}h^2$ 等——轴上校好了, 视场边缘却变坏。COSTAR 为各仪器配置的正是成对的小反射镜 [3]。

例题 2: 同时消色差、消球差的双胶合物镜

用 N-BK7 ($n_1 = 1.5168$, $\nu_1 = 64.17$) 与 F2 ($n_2 = 1.62004$, $\nu_2 = 36.37$) 做一片 $f = 100 \text{ mm}$ 的密接双胶合物镜, 冕牌在前, 物在无穷远, 光阑在透镜处, $f/5$ ($a = 10 \text{ mm}$), 按薄透镜处理。

1. 由消色差条件求两片的光焦度。第二片的入射光不再平行, 求它的位置因子 p_2 。
2. “胶合”要求第一片的后表面与第二片的前表面曲率相同: $c_2 = c_3$ 。说明在焦距与消色差都已确定后, 整个物镜只剩一个自由参数; 取它为 c_2 , 把总球差 $S_I = S_{I,1} + S_{I,2}$ 写成 c_2 的函数, 它是几次式?
3. 解 $S_I = 0$ 。有几个解? 分别给出四个曲率半径 (其中两个相同)。
4. 两组解的彗差分别多大 (视场 1°)? 只有一个自由参数, 能否同时消彗差?
5. 用实际光线追迹检验 (零厚度): 剩余球差来自五阶项 $W_{060}\rho^6$ 。只调离焦时, 哪一组解

满足衍射极限 ($\sigma_W \leq \lambda/14$, $\lambda = 587.6 \text{ nm}$)? 若冕牌、火石分别取中心厚 4 mm 与 2.5 mm, 应怎样修正?

解答: 例题 2

(1) 由式 (6.8), $\varphi_1 = \varphi \nu_1/(\nu_1 - \nu_2)$, $\varphi_2 = -\varphi \nu_2/(\nu_1 - \nu_2)$, 即 $f_1 = 43.32 \text{ mm}$ 、 $f_2 = -76.44 \text{ mm}$ 。第一片入射平行光, $u = 0$, 出射 $u'_1 = -a\varphi_1$; 第二片入射 $u = -a\varphi_1$, 出射 $u' = -a\varphi$,

$$p_2 = \frac{u + u'}{u - u'} = \frac{\varphi_1 + \varphi}{\varphi_1 - \varphi} = 2.529.$$

$p_2 > 1$: 第二片的“物”是第一片会聚光束形成的虚物。

(2) 每片的 $c_1 - c_2 = \varphi_1/(n_1 - 1)$ 、 $c_3 - c_4 = \varphi_2/(n_2 - 1)$ 已由光焦度确定; 再加 $c_2 = c_3$, 四个曲率只剩一个自由。由 $q = (c_1 + c_2)/(c_1 - c_2)$, q_1 、 q_2 都是 c_2 的一次函数, 而式 (5.14) 的 S_I 对 q 是二次的, 所以总 $S_I(c_2)$ 是 c_2 的二次多项式。数值上 (单位 mm, c_2 以 mm^{-1} 计)

$$S_I = 242.85 c_2^2 + 14.054 c_2 + 0.19504.$$

(3) 判别式 $14.054^2 - 4 \times 242.85 \times 0.19504 = 8.04 > 0$, 有两个实根:

- 解 A: $c_2 = -0.03477 \text{ mm}^{-1}$, 半径 $R_1 = 101.1$ 、 $R_2 = R_3 = -28.8$ 、 $R_4 = -73.1 \text{ mm}$ (冕牌接近平凸, 两片都强烈弯曲);
- 解 B: $c_2 = -0.02310 \text{ mm}^{-1}$, 半径 $R_1 = 46.4$ 、 $R_2 = R_3 = -43.3$ 、 $R_4 = -500.7 \text{ mm}$ (双凸冕牌, 火石后表面近平)。

若判别式为负, 则这一对玻璃做成的胶合物镜无法消球差, 只能换玻璃或放弃胶合 (留一个空气间隔, 多一个自由度)。

(4) 由式 (5.14) 的 S_{II} 求和, 1° 处解 A 的 $W_{131} = -0.93 \mu\text{m}$, 解 B 为 $0.82 \mu\text{m}$, 都不为零。消彗差需要 $S_{II} = 0$ 这第二个条件, 一个自由参数做不到。实际设计中通过选择玻璃对 (改变 n 、 ν 的搭配) 或采用空气间隔, 可以得到同时消球差、消彗差的“齐明消色差”物镜。

(5) 零厚度实际追迹: 两组解的 W_{040} 都小于 $0.001 \mu\text{m}$ (三阶球差确实消去), 剩下的五阶项分别为 $W_{060} = -0.41 \mu\text{m}$ (A) 与 $-0.17 \mu\text{m}$ (B)。只调离焦时, ρ^6 的剩余方差为 $\text{Var}(\rho^6) - \text{Cov}(\rho^6, \rho^2)^2/\text{Var}(\rho^2)$ (附录 C 的方法), $\sigma_W = 0.113 |W_{060}|$, 即 47 nm (A) 与 20 nm (B)。 $\lambda/14 = 42 \text{ nm}$: 只调离焦时, B 在轴上达到衍射极限, A 略超出。但这只是“只调离焦”的人为限制: 若再留一点 W_{040} 去平衡 W_{060} (实际设计都这样做, 最优组合是 Zernike 多项式 $20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1$), 剩余 RMS 为 $|W_{060}|/(20\sqrt{7})$, A、B 分别约 8 nm 与 3 nm , 都达到衍射极限。真正的区别是: B 的五阶球差约为 A 的 $1/2.4$, 对加工和装配误差的容差更大。原因是 A 的表面弯得更厉害, 入射角更大。加上实际厚度 (4 mm 与 2.5 mm) 后, 追迹给出 $W_{040} = 0.29 \mu\text{m}$: 厚度改变了第二、三面上的光线高度。只需把整个物镜重新弯曲 (保持每片的光焦度不变, 即 $c_1 - c_2$ 、 $c_3 - c_4$ 不变), 四个半径变为 48.2 、 -41.8 、 -41.8 、 -353.4 mm (焦距 100.02 mm), 就可再次使 $W_{040} = 0$ 。这里用实际追迹加一维求根完成, 这正是“薄透镜初始设计 + 光线追迹优化”的标准流程。

例题 3: Schmidt 相机能缩短多少?

Schmidt 相机的镜筒长度约为球面主镜曲率半径 R_m ，是焦距的 2 倍，十分笨重。设想把校正板（连同光阑）从球心移近主镜，放在离主镜 $D = R_m - \Delta$ 处，校正板面形不变。主镜 $R_m = 6124 \text{ mm}$ ，光阑半径 $a = 610 \text{ mm}$ ($F = 2.51$)，校正板很薄，视场 $\theta = 3^\circ$ 。

1. 轴上光束仍然完全被校正，为什么？校正板仍在光阑上，它会引入彗差吗？
2. 对离轴光束，主镜的球差与校正板不再完全抵消。用光阑移动的思想，求系统的彗差系数 W_{131} 与 Δ 、 θ 的关系。
3. 子午彗差不超过 $1''$ （地面视宁度的量级）时，镜筒最多能缩短多少？
4. 若把镜筒缩短一半 ($\Delta = R_m/2$)，彗差 $\leq 1''$ 的视场半径是多少？
5. 移动后还会出现像散吗？估计 $\Delta = 19 \text{ mm}$ 时的大小。

解答：例题 3

(1) 轴上光束不论板放在哪里，都垂直穿过校正板并照满它，校正板给出的 $-W_{040}\rho^4$ 正好抵消主镜的 $W_{040}\rho^4$ （主镜的 S_I 与光阑位置无关）。校正板在光阑上，主光线在板上的高度 $\bar{y} = 0$ ，由式 (5.12)，它的非球面只贡献 S_I ，不贡献彗差、像散、畸变。

(2) 问题出在主镜。光阑在球心时，视场 θ 的主光线经过球心，在镜面上的高度为 $\bar{y}_C = R_m\theta$ （取大小），主镜不产生彗差。现在主光线过离镜面 D 的光阑中心，在镜面上的高度为 $\bar{y} = D\theta$ 。对主镜而言，这等效于光阑从球心移动了，移动参数 $s = (\bar{y} - \bar{y}_C)/a = -\Delta\theta/a$ 。由式 (5.6)，主镜的彗差为

$$W_{131} = 4sW_{040} = -4 \frac{\Delta\theta}{a} \cdot \frac{a^4}{4R_m^3} = -\frac{\Delta\theta a^3}{R_m^3}.$$

物理图像：校正板“看到”的是居中的光束，主镜“看到”的是偏心的光束，两者的球差只在轴上互相抵消；偏心光束看到的球差的 $\rho^3 \cos\theta$ 部分就是彗差（第 6.2 节）。

(3) 子午彗差 $3|C| = 3kW_{131}$ ， $k = 2F$ ，角量除以焦距 $f = R_m/2$ ：

$$\frac{3|C|}{f} = \frac{6F\Delta\theta a^3}{R_m^3 f}.$$

$\theta = 3^\circ$ 时，每缩短 1 mm 增加 $0.0525''$ 。令其为 $1''$ ，得 $\Delta \approx 19 \text{ mm}$ ：只能缩短 0.3% 。用自己写的追迹（校正板置于离镜面 D 处）核对： $\Delta = 19$ 、 200 、 3062 mm 时， W_{131} 相对于 $\Delta = 0$ 的增量分别为 -0.97 、 -10.2 、 $-158 \mu\text{m}$ ，与公式的 -0.98 、 -10.35 、 $-158.4 \mu\text{m}$ 相差不到 2% 。

(4) $\Delta = R_m/2 = 3062 \text{ mm}$ 时，令 $6F\Delta\theta a^3/(R_m^3 f) = 1''$ ，得 $\theta = 3.3 \times 10^{-4} \text{ rad} = 1.1'$ 。视场从几度缩到 1 角分：镜筒缩短一半，Schmidt 相机的大视场优势就完全丧失了。这就是 Schmidt 相机必须做成“两倍焦距长”的原因；要缩短镜筒，必须换用别的结构，例如让主镜也非球面化、或加副镜，用多出的自由度重新消彗差。

(5) 由式 (5.6)， $W_{222} = 4s^2W_{040} = 4(\Delta\theta/a)^2W_{040}$ 。 $\Delta = 19 \text{ mm}$ 时 $s = 1.6 \times 10^{-3}$ ， $W_{222} \approx 0.002 \mu\text{m}$ （追迹 0.003 ），完全可以忽略。像散是 s 的二阶效应，彗差是一阶效应，所以小的移动首先表现为彗差。

例题 4：由畸变网格反推光阑位置（本题使用模拟数据）

一片 N-BK7 等凸薄透镜 ($q = 0$, $n = 1.5168$, $f = 100.0 \text{ mm}$) 对远处方格靶成像, 光阑在透镜前, 但距离 d 未知。沿水平方向测得各格点 (视场 $\tan \theta_k$) 的像到中心的距离 r'_k , 读数误差 $\sigma = 2 \mu\text{m}$, 见表 5。(模拟数据: 由主光线的实际追迹加随机误差生成, 种子 20261018, 代码 `scripts/ex4_data.py`。)

1. 计算相对畸变 $D_k = r'_k / (f \tan \theta_k) - 1$ 。说明为什么模型应取 $D = g_3 t^2 + g_5 t^4$ ($t = \tan \theta$), 并作加权拟合。

2. 由薄透镜赛德尔和 (式 (5.14), 光阑在透镜处) 与光阑移动公式, 证明三阶系数为

$$g_3 = -\frac{1}{2} \left[x \left(3 + \frac{1}{n} \right) + \frac{3}{2} \mathcal{B} x^2 + \frac{1}{4} \mathcal{A} x^3 \right],$$

$$x = \frac{d}{f},$$

其中 $\mathcal{A}$ 、 $\mathcal{B}$ 分别是式 (5.14) 中 S_{I} 与 S_{II} 方括号内的量 ($p = -1$)。

3. 由拟合的 g_3 求 d 及其不确定度。

4. 是否存在别的光阑位置使这片透镜没有 (三阶) 畸变? 证明: 对任意形状的单片薄透镜 (物在无穷远), 光阑不在透镜上就必有三阶畸变; 对正透镜, 光阑在前必为桶形、在后必为枕形 (负透镜相反)。

5. g_5 与 χ^2 说明了什么?

表 5 例题 4 的格点像位置 (模拟数据)

$\tan \theta_k$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
r'_k/mm	4.999	9.968	14.896	19.742	24.493	29.125	33.608	37.922

解答：例题 4

(1) D_k (%) 依次为 $-0.02, -0.32, -0.69, -1.29, -2.03, -2.92, -3.98, -5.20$ 。像高是视场的奇函数 (把视场反向, 像也反向), 所以 $r' = ft(1 + g_3 t^2 + g_5 t^4 + \cdots)$, D 只含 t 的偶次方。三阶项 $g_3 t^2$ 来自式 (6.6), 五阶项 $g_5 t^4$ 来自下一阶。 D_k 的误差 $\sigma_{D,k} = \sigma / (ft_k)$, 小视场的点很不准, 必须加权 (附录 E)。加权拟合得 $g_3 = -0.3232 \pm 0.0011$, $g_5 = -0.010 \pm 0.008$, $\chi^2 = 9.8$ (自由度 6)。

(2) 物在无穷远, 视场 $\tan \theta = t$ 的主光线在光阑中心过轴, 到透镜时高度 $\bar{y} = dt$, 所以 $s = dt/a$; $H = at$ 。光阑在透镜处的值: $S_{\text{I}} = \frac{1}{4} a^4 \varphi^3 \mathcal{A}$, $S_{\text{II}} = \frac{1}{2} a^2 \varphi^2 H \mathcal{B} = \frac{1}{2} a^3 t \varphi^2 \mathcal{B}$, $S_{\text{III}} = H^2 \varphi = a^2 t^2 \varphi$, $S_{\text{IV}} = a^2 t^2 \varphi / n$, $S_{\text{V}} = 0$ 。代入式 (5.7):

$$\begin{aligned} S'_{\text{V}} &= s(3S_{\text{III}} + S_{\text{IV}}) + 3s^2 S_{\text{II}} + s^3 S_{\text{I}} \\ &= at^3 \left[d\varphi \left(3 + \frac{1}{n} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \mathcal{B} (d\varphi)^2 + \frac{1}{4} \mathcal{A} (d\varphi)^3 \right]. \end{aligned}$$

口径 a 在 $D = -S'_V/(2H)$ 中约去，畸变与孔径无关； $D = g_3 t^2$ ，得到题给的式子 ($x = d\varphi = d/f$)。对 $q = 0$ 、 $p = -1$ ： $\mathcal{A} = 12.933$ ， $\mathcal{B} = -2.659$ ， $3 + 1/n = 3.659$ 。

(3) 解三次方程 $-\frac{1}{2}[3.659x - 3.989x^2 + 3.233x^3] = -0.3232$ ，只有一个实根 $x = 0.2200$ ，即 $d = 22.0\text{ mm}$ 。另两根为复数。误差传递 $\sigma_d = f\sigma_{g_3}/|dg_3/dx| = 0.1\text{ mm}$ 。(生成数据所用的 $d = 22\text{ mm}$ 。)

(4) $g_3 = -\frac{1}{2}x[(3 + 1/n) + \frac{3}{2}\mathcal{B}x + \frac{1}{4}\mathcal{A}x^2]$ 。除 $x = 0$ 外，零畸变要求方括号为零，它的判别式为 $\Delta_q = \frac{9}{4}\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}(3 + 1/n)$ 。把 $\mathcal{A}$ 、 $\mathcal{B}$ 对 q 的依赖代入， Δ_q 是 q 的二次式， q^2 的系数为 $[\frac{9}{4}(n+1)^2 - (n+2)(3n+1)]/[n^2(n-1)^2] = -8.57 < 0$ ($n = 1.5168$)，其最大值 -29.3 (在 $q = 0.5$) 仍为负。对常用玻璃 $n = 1.45\text{--}2.0$ ，判别式的最大值都为负 (约 -36 到 -12)。所以方括号恒为正， g_3 与 $x = d\varphi$ 反号。对正透镜 ($\varphi > 0$)，光阑在前 ($x > 0$) 必为桶形；光阑在后时 $s < 0$ ，同一结论给出枕形 (s 与 d 的关系变了，但 S'_V 作为 s 的函数仍是 s 乘一个恒正的二次式)。负透镜 $\varphi < 0$ ，结论相反。所以单片透镜除非光阑在透镜上，否则不可能没有畸变；无畸变镜头至少需要两组透镜，例如关于光阑对称的结构 (第 7.3 节)。

(5) g_5 只有 1.3σ ，在这个视场 ($\tan\theta \leq 0.4$) 内五阶畸变不显著，三阶理论已足够描述。 $\chi^2 = 9.8$ (自由度 6，超过此值的概率为 0.13) 属正常的统计涨落：用无噪声的真值做同样的拟合， $\chi^2 = 0.05$ ，可见 t^6 项可以忽略， χ^2 全部来自读数误差 (主要是 $\tan\theta = 0.15$ 一点偏离 2.6σ)。 r' 只需 $2\text{ }\mu\text{m}$ 的精度，就能把光阑位置定到 0.1 mm ：畸变是测量光学系统几何参数的灵敏工具。

10 实验与数据处理：Hartmann 光阑法测透镜球差

背景：Hartmann 检验

在透镜前放一块开有若干小孔的光阑 (Hartmann 光阑)，每个小孔只让一束细光通过。在焦点前后各放一个屏，测出每个小光斑的位置，就知道了每一条“光线”的走向，从而直接测出不同环带光线与轴的交点——这就是纵向球差的定义。这种方法不需要干涉仪，对振动不敏感，至今仍用于检验大型反射镜与校准波前传感器 (Shack-Hartmann 传感器是它的现代形式)。

例题：实验题：Hartmann 光阑法测平凸透镜的球差 (本题使用模拟数据)

装置：经扩束准直的 He-Ne 激光 (632.8 nm) 沿机械轴入射。N-BK7 平凸透镜 (凸面朝光源，凸面曲率半径 103.0 mm ，中心厚 6.0 mm ，该波长 $n = 1.5151$) 紧贴其前的 Hartmann 光阑在竖直直径上开有 14 个小孔，孔心在 $y = \pm r$ ， $r = 3, 6, \dots, 21\text{ mm}$ 。两块 CCD 屏垂直于机械轴，距透镜后顶点 $z_1 = 185.00\text{ mm}$ 、 $z_2 = 205.00\text{ mm}$ 。用质心法读出每个光斑中心的 y 坐标 (以机械轴为原点)，读数的随机误差 $\sigma = 5\text{ }\mu\text{m}$ (各读数独立)。透镜的光轴可能相对机械轴略有偏心。数据见表 6。

模拟数据说明：表中数据由实际三维光线追迹 (含全部高阶像差，透镜光轴偏心 0.15 mm) 加独立高斯噪声生成，随机种子 20261017 事先固定，生成代码 `scripts/exp_data.py`。

1. 对每个 r ，由 $\pm r$ 两孔的四个读数构造“半差” $Y_i = [y_i(+r) - y_i(-r)]/2$ 与“半和” $M_i = [y_i(+r) + y_i(-r)]/2$ ($i = 1, 2$)。说明半差为什么不受偏心的一阶影响。由 Y_1 、 Y_2 求该环带光线与轴的交点 $z_c(r)$ ，并求它的标准不确定度 σ_{z_c} 。哪些 r 的 z_c 最不准？

2. 由三阶理论写出 $z_c(r)$ 的模型, 说明它对 r^2 是线性的, 截距与斜率各代表什么。
3. 用加权最小二乘拟合 $z_c = z_p + br^2$, 给出 z_p 、 b 及其不确定度、 χ^2 。
4. 由 b 求光阑半径 $a = 25 \text{ mm}$ 时的 W_{040} (取 $u' = -a/f'$, $f' = 200 \text{ mm}$), 与薄透镜理论值比较。
5. 再拟合 $z_c = z_p + br^2 + cr^4$ 。 r^4 项显著吗? 两种拟合给出的 W_{040} 怎样解释?
6. 由半和估计透镜的偏心量。
7. 讨论系统误差: 屏距 $z_2 - z_1$ 的误差、透镜厚度、小孔大小与衍射、质心偏差; 提出改进方案。

表 6 Hartmann 光斑中心的 y 坐标 (单位 mm; 模拟数据)

r/mm	$y_1(+r)$	$y_1(-r)$	$y_2(+r)$	$y_2(-r)$
3	0.310	-0.022	0.010	0.294
6	0.464	-0.179	-0.124	0.434
9	0.619	-0.334	-0.266	0.590
12	0.765	-0.470	-0.428	0.750
15	0.890	-0.595	-0.622	0.929
18	0.988	-0.696	-0.830	1.142
21	1.061	-0.775	-1.064	1.391

解答: 实验题

(1) 透镜光轴偏心 Δ 使所有光斑近似整体平移同一个量 (在给定屏上), 在 $\pm r$ 两孔中同号出现, 半差中相消; 半和则保留它。在两屏之间光线是直线, 过 (z_1, Y_1) 、 (z_2, Y_2) , 与轴交于

$$z_c = z_1 + L \frac{Y_1}{Y_1 - Y_2},$$

$$L = z_2 - z_1 = 20 \text{ mm}.$$

Y_i 由两个独立读数构成, $\sigma_Y = \sigma/\sqrt{2} = 3.5 \mu\text{m}$ 。误差传递:

$$\sigma_{z_c} = \sigma_Y \frac{L}{(Y_1 - Y_2)^2} \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}.$$

结果见表 7。 $r = 3 \text{ mm}$ 时 $Y_1 - Y_2$ 只有 0.31 mm , $\sigma_{z_c} = 0.16 \text{ mm}$; $r = 21 \text{ mm}$ 时为 0.024 mm 。小环带的光线与轴夹角小, 交点难定, 所以必须加权拟合。

(2) 由式 (6.1), 环带 $\rho = r/a$ 的光线与轴交于 $z_c(r) = z_p + \delta(\rho)$, $\delta = -4W_{040}\rho^2/(n'u'^2)$, 即 $z_c = z_p + br^2$,

$$b = -\frac{4W_{040}}{u'^2 a^2} = -\frac{4W_{040}f'^2}{a^4}.$$

截距 z_p 是近轴焦点 (到后顶点的距离, 即后焦距), 斜率 b 正比于球差系数; 欠校正 ($W_{040} > 0$) 时 $b < 0$ 。

(3) 以 $w_i = 1/\sigma_{z_{c,i}}^2$ 加权 (公式见附录 E): $z_p = 196.000 \pm 0.036 \text{ mm}$, $b = (-5.52 \pm 0.11) \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$, $\chi^2 = 3.7$ (自由度 5), 拟合良好; z_p 与 b 的相关系数为 -0.92 (截距由大 r 的点外推得到)。不确定度只计读数的统计误差, 未按 χ^2 放大 (χ^2 小于自由度)。

(4) $W_{040} = -ba^4/(4f'^2) = (13.5 \pm 0.3) \mu\text{m}$ (约 21 个波长)。薄透镜理论 ($q = 1$, $p = -1$, $f = 103.0/(n-1) = 200.0 \text{ mm}$, 式 (5.14)): $W_{040} = 13.47 \mu\text{m}$; 把厚度算进去的逐面赛德尔和为 $13.40 \mu\text{m}$ 。测量值与两者在 0.3σ 内一致; 薄透镜近似的误差 (0.5%) 远小于测量不确定度。近轴焦点的理论值 (厚透镜近轴追迹) 为 196.005 mm , 与 z_p 一致。

(5) 三参数拟合: $z_p = 195.93 \pm 0.06 \text{ mm}$, $b = (-4.81 \pm 0.52) \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$, $c = (-1.3 \pm 0.9) \times 10^{-6} \text{ mm}^{-3}$, $\chi^2 = 1.8$ (自由度 4)。由 b 得 $W_{040} = (11.8 \pm 1.3) \mu\text{m}$, 与两参数的 13.5 ± 0.3 相差约 1.3σ 。怎样理解:

- 物理上, b 在两种拟合中的含义不同。三参数拟合中 b 是“纯三阶”系数, 五阶项 cr^4 把边缘纵向球差的一部分分走了; 两参数拟合中 b 把三阶与五阶的贡献混在一起, 是一个“有效”系数。薄透镜理论值 $13.47 \mu\text{m}$ 对应的是三阶部分。
- 统计上, c 只有 1.4σ , χ^2 下降 1.9, 对增加一个参数而言不显著; b 与 c 强相关, 加入 c 后 b 的不确定度扩大约 5 倍。两者的相关系数为 -0.98 。用无噪声的追迹数据做同样的拟合: 三参数给出真实的 $c = -1.6 \times 10^{-7} \text{ mm}^{-3}$ (在 $r = 21 \text{ mm}$ 处只占纵向球差的 1.3%), 纯三阶 $W_{040} = 13.40 \mu\text{m}$; 两参数给出的“有效”值为 $13.61 \mu\text{m}$, 比纯三阶大 1.6%, 但小于统计误差 $0.27 \mu\text{m}$ 。所以本数据中三参数拟合的 c 主要是噪声, 偏离来自 b - c 的相关性, 而不是真实的五阶球差。

结论: 在本数据精度下, 应报告两参数模型的结果 (它给出的是包含少量五阶贡献的有效系数, 偏差小于统计误差); 要真正测出五阶球差, 需要把读数误差降低一个数量级, 或者加大孔径 (cr^4 相对于 br^2 的比例随 r^2 增长)。

(6) 半和 M_1 、 M_2 在各环带近似相同, 均值约 0.145 mm 与 0.157 mm 。傍轴近似下, 透镜把平行光会聚到它自己光轴上的焦点, 所以把半和线性内插到近轴焦点 z_p , 各环带平均得 $\Delta = 0.152 \pm 0.001 \text{ mm}$ (生成值 0.15 mm ; 球差使偏心光束的中心略有偏移, 大环带处约 4%)。

(7) 屏距: 若 L 偏大 0.05 mm , 所有 $z_c - z_1$ 按比例偏大, z_p 偏 $+0.03 \text{ mm}$ 、 b 偏 $+0.25\%$, 对 W_{040} 的影响小于统计误差, 但 z_p 的系统误差与统计误差相当, 需要独立标定屏距。厚度: 已用逐面赛德尔和估计, 影响 0.5% 。小孔: 孔径 d_h 的衍射使光斑展宽 $\sim \lambda z/d_h$, 只影响质心精度, 不引入偏差; 但孔内光线本身跨越一段 ρ , 球差使光斑内部不对称, 质心比孔心的光线略偏 (偏差 $\propto d_h^2$)。改进: 两屏间距加大 ($\sigma_{z_c} \propto 1/L$ 的因子)、多拍几次取平均、改用正交两条直径的孔 (同时检测像散)、用旋转透镜 180° 的方法分离偏心与透镜自身的不对称。

11 小结：推导链

1. 起点: 费马原理 $\Rightarrow$ 折线路径误差二阶 (推论 1)、端点变分 $\delta[AB] = n'\hat{\mathbf{k}}' \cdot \delta\mathbf{r}' - n\hat{\mathbf{k}} \cdot \delta\mathbf{r} \Rightarrow$ 光线垂直波前。
2. 度量: 波像差 $W = [OE'] - [OQ]$ (式 (3.5)) $\Rightarrow$ 横向像差 $\varepsilon = -(R/n')\nabla W$ (式 (3.6)); 离

表 7 实验题的中间结果（由表 6 计算）

r/mm	Y_1/mm	Y_2/mm	z_c/mm	σ_{z_c}/mm
3	0.1660	-0.1420	195.779	0.163
6	0.3215	-0.2790	195.708	0.083
9	0.4765	-0.4280	195.536	0.055
12	0.6175	-0.5890	195.236	0.041
15	0.7425	-0.7755	194.783	0.033
18	0.8420	-0.9860	194.212	0.027
21	0.9180	-1.2275	193.557	0.024

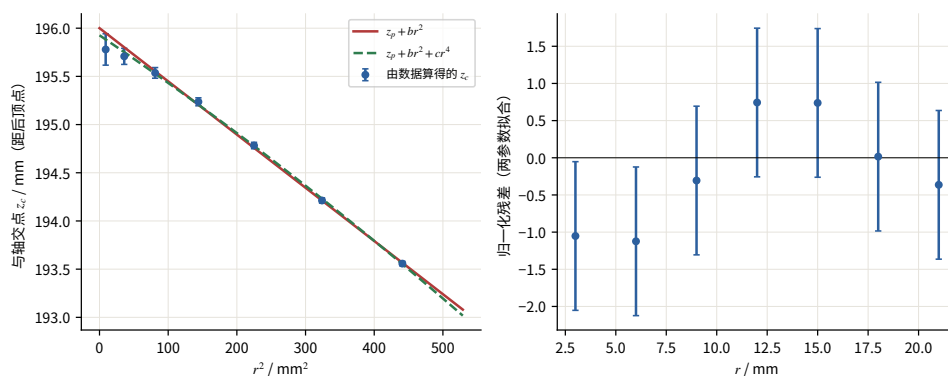


图 16 实验题的拟合。左： z_c 对 r^2 （误差棒为 σ_{z_c} ），实线为加权两参数拟合，虚线为加 r^4 项的三参数拟合。右：两参数拟合的归一化残差。

焦 $W_{020} = n'u^2\delta/2$ （式 (3.8)）。

- 形式：**旋转 + 镜面对称 $\Rightarrow W(h^2, \rho^2, h\rho \cos \theta) \Rightarrow$ 二阶 = 高斯光学，四阶 = 五个赛德尔项（式 (4.3)），横向三阶。
- 大小：**断开光路算球面镜（式 (5.4)）与单面轴上球差（式 (5.8)）；光阑在球心 $\Rightarrow$ 只有 S_I 与 Petzval S_{IV} （式 (5.10)）；光阑移动 $\rho \rightarrow \rho + s\mathbf{h}$ （式 (5.7), $s = \bar{A}/A$ ） $\Rightarrow$ 全部五个和（式 (5.11)），非球面附加项（式 (5.12)）；各面相加；薄透镜的 q, p 形式（式 (5.14)）。
- 效果：**表 2、表 3；球差的 3/4、2/3、1/2 三种最佳焦面；彗差 60° 与 3:1；像散两条焦线与 T-S-P 三比一（式 (6.3)）；Petzval 和（式 (6.5)）；畸变 $D = -S_V h^2/(2H)$ （式 (6.6)）。
- 消除：**非球面放在光阑处（Schmidt, 式 (7.1)）；正弦条件（式 (7.2)）与齐明；对称原理（ W 对 $\mathbf{h}$ 为偶）；光阑位置（ $s^* = -S_{II}/S_I$ ）；正负透镜分离（Petzval）；两个圆锥常数解两个线性条件（RC）； $\nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 = 0$ （式 (6.8)）。
- 检验：**矢量斯涅耳定律（式 (8.1)）的实际光线追迹与赛德尔和一致（表 4），标度律斜率 3/2/1 与 1/2/3（图 15）。

参考文献

- [1] Christopher J. Burrows, Jon A. Holtzman, S. M. Faber, Pierre Y. Bely, Hashima Hasan, C. R. Lynds, and Daniel Schroeder. The imaging performance of the Hubble Space Telescope. *The Astrophysical Journal*, 369:L21–L25, 1991. doi: 10.1086/185950. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1991ApJ...369L..21B>.
- [2] Lew Allen, Roger Angel, John D. Mangus, George A. Rodney, Robert R. Shannon, and Charles P. Spoelhof. The Hubble Space Telescope optical systems failure report. Technical Report NASA-TM-103443, NASA, Washington, DC, November 1990. URL <https://ntrs.nasa.gov/citations/19910003124>. NTRS 19910003124; Appendix E, Tables E-1/E-2.
- [3] NASA. Servicing mission 1 (STS-61). NASA Science, Hubble mission pages. URL <https://science.nasa.gov/mission/hubble/observatory/missions-to-hubble/servicing-mission-1/>. Accessed 2026-10-17.
- [4] David C. Redding, S. Sirlin, A. Boden, J. Mo, B. Hanisch, and L. Furey. Optical prescription of the HST. In *Calibrating Hubble Space Telescope: Post Servicing Mission*, page 132. STScI, 1995. URL https://web.archive.org/web/20150501140016/http://trs-new.jpl.nasa.gov/dspace/bitstream/2014/31621/1/95-1205_A1b.pdf. JPL TRS hdl:2014/31621; ADS 1995chst.conf..132R.
- [5] NASA and STScI. Picture perfect: Hubble’s new improved optics probe the core of a distant galaxy. News release STScI-PRC1994-01, January 1994. URL <https://hubblesite.org/contents/news-releases/1994/news-1994-01>. Image credit: NASA, STScI (public domain).
- [6] Lance Day and Ian McNeil. Biographical dictionary of the history of technology, 1996. Petzval lens, 1840, Voigtländer.
- [7] Joseph Petzval. *Bericht über die Ergebnisse einiger dioptrischen Untersuchungen*. Hartleben, Pest, 1843.
- [8] Ludwig Seidel. Zur Dioptrik. Ueber die Entwicklung der Glieder 3ter Ordnung, welche den Weg eines ausserhalb der Ebene der Axe gelegenen Lichtstrahles durch ein System brechender Medien bestimmen. *Astronomische Nachrichten*, 43(19–21):289–332, 1856. doi: 10.1002/asna.18560431902. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1856AN....43..289S>. Three parts: No. 19 pp. 289–304 (doi:10.1002/asna.18560431902), No. 20 pp. 305–320 (doi:10.1002/asna.18560432002), No. 21 pp. 321–332 (doi:10.1002/asna.18560432102); AN Nr. 1027–1029.
- [9] Harold Dennis Taylor. A simplified form and improved type of photographic lens. British Patent GB 1893 No. 22,607 (GB189322607A), 1893. URL <https://patents.google.com/patent/GB189322607A/en>. Filed 25 Nov 1893, accepted 6 Oct 1894; US counterpart US 568,052 (granted 22 Sep 1896).

- [10] Bernhard Schmidt. Ein lichtstarkes komafreies Spiegelsystem. *Central-Zeitung für Optik und Mechanik*, 52(2):25–26, 1931. Reprinted in *Mitteilungen der Hamburger Sternwarte in Bergedorf*, Bd. 7, Nr. 36, S. 15–17 (1932).
- [11] David G. Koch, William J. Borucki, Gibor Basri, et al. Kepler mission design, realized photometric performance, and early science. *The Astrophysical Journal Letters*, 713(2):L79–L86, 2010. doi: 10.1088/2041-8205/713/2/L79.
- [12] Vladimir Sacek. Classical and aplanatic two-mirror systems. Notes on Amateur Telescope Optics, 2006. URL https://www.telescope-optics.net/classical_and_aplanatic.htm.
- [13] Largan Precision Co., Ltd. Optical image capturing system. US Patent 8,902,511 B2, 2014. URL <https://patents.google.com/patent/US8902511B2/en>. Priority 2012-07-06; seven plastic aspheric lens elements, aspheric coefficients A1–A14.
- [14] Largan Precision Co., Ltd. Optical imaging lens assembly, image capturing unit and electronic device. US Patent 10,914,919 B2, 2021. URL <https://patents.google.com/patent/US10914919B2/en>. Seven lens elements (embodiment 1: one glass + six plastic aspheric), coefficients A4–A16.
- [15] Max Born and Emil Wolf. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 7th (expanded) edition, 1999. ISBN 0-521-64222-1. doi: 10.1017/CBO9781139644181.
- [16] James C. Wyant and Katherine Creath. Basic wavefront aberration theory for optical metrology. In Robert R. Shannon and James C. Wyant, editors, *Applied Optics and Optical Engineering*, volume XI, pages 1–53. Academic Press, San Diego, 1992. ISBN 0-12-408611-X. URL https://wp.optics.arizona.edu/jcwyant/wp-content/uploads/sites/13/2016/08/03-BasicAberrations_and_Optical_Testing.pdf.
- [17] W. T. Welford. *Aberrations of Optical Systems*. Adam Hilger Series on Optics and Optoelectronics. Adam Hilger, Bristol, 1986. ISBN 0-85274-564-8. doi: 10.1201/9781315136530. DOI refers to the Routledge 2017 reissue.
- [18] T. T. Smith. Spherical aberration in thin lenses. *Scientific Papers of the Bureau of Standards*, 18:559–584, 1922. doi: 10.6028/nbsscipaper.127. URL https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/ScientificPapers/nbsscientificpaper461vol18p559_A2b.pdf.
- [19] Henry Coddington. *A Treatise on the Reflexion and Refraction of Light: being Part I of a System of Optics*. Simpkin & Marshall, Cambridge, 1829. URL <https://archive.org/details/b29320963>.
- [20] William Hyde Wollaston. On a periscopic camera obscura and microscope. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 102:370–377, 1812. doi: 10.1098/rstl.1812.0021.
- [21] SCHOTT AG. Optical glass data sheets / zemax catalog 2017-01-20b, 2017. URL https://refractiveindex.info/download/data/2017/schott_2017-01-20.pdf. N-BK7 and F2 Sellmeier coefficients.

- [22] Mikhail N. Polyanskiy. Refractiveindex.info database of optical constants. URL <https://refractiveindex.info>. Data files specs/schott/optical/N-BK7.yml and F2.yml (accessed 2026-10-17).
- [23] Richard Dekany, Roger M. Smith, Reed Riddle, et al. The Zwicky Transient Facility: Observing system. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 132(1009):038001, 2020. doi: 10.1088/1538-3873/ab4ca2.
- [24] Palomar Observatory / Caltech. The 48-inch samuel oschin telescope. URL <https://sites.astro.caltech.edu/palomar/about/telescopes/oschin.html>. Accessed 2026-10-17.
- [25] Ernst Abbe. On the estimation of aperture in the microscope. *Journal of the Royal Microscopical Society*, 1(3):388–423, 1881. doi: 10.1111/j.1365-2818.1881.tb05909.x.
- [26] Daniel J. Schroeder. *Astronomical Optics*. Academic Press, San Diego, 2nd edition, 2000. ISBN 0-12-629810-6.

A 单个折射球面轴上球差的展开

设定 球面曲率半径 $r > 0$ (球心 C 在顶点右方), 左侧折射率 n 、右侧 n' 。实物点 O 在顶点左方 L 处, 近轴像点 I' 在顶点右方 L' 处 ($L' > r$), 满足 $n/L + n'/L' = (n' - n)/r$ (即 $n'/l' - n/l = (n' - n)/r$, $l = -L$, $l' = L'$)。光阑在该面上, 出瞳就是该面。由断开光路公式 (3.9), 取折点为球面上的点 P (与参考球上的点相差像差量级, 引起的误差为二阶):

$$\begin{aligned} V(P) &= n|OP| + n'|PI'|, \\ W(P) &= V(\text{顶点}) - V(P). \end{aligned}$$

用球心角作参数 设 P 对球心的张角为 ϕ ($\phi = 0$ 为顶点), $Y = r \sin \phi$ 。 O, C, I' 共线, $|OC| = L + r$, $|CI'| = L' - r$ 。由余弦定理,

$$\begin{aligned} |OP|^2 &= (L + r)^2 + r^2 - 2r(L + r) \cos \phi, \\ |PI'|^2 &= (L' - r)^2 + r^2 + 2r(L' - r) \cos \phi. \end{aligned}$$

用 $\cos \phi = 1 - \phi^2/2 + \phi^4/24 - \dots$:

$$\begin{aligned} |OP|^2 &= L^2 \left[1 + g_1 \phi^2 - \frac{g_1}{12} \phi^4 \right], & g_1 &= \frac{r(L + r)}{L^2}; \\ |PI'|^2 &= L'^2 \left[1 - g_2 \phi^2 + \frac{g_2}{12} \phi^4 \right], & g_2 &= \frac{r(L' - r)}{L'^2}. \end{aligned}$$

开方 $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + \mathcal{O}(x^3)$, 保留到 ϕ^4 :

$$\begin{aligned} |OP| &= L \left[1 + \frac{g_1}{2} \phi^2 - \left(\frac{g_1}{24} + \frac{g_1^2}{8} \right) \phi^4 \right], \\ |PI'| &= L' \left[1 - \frac{g_2}{2} \phi^2 + \left(\frac{g_2}{24} - \frac{g_2^2}{8} \right) \phi^4 \right]. \end{aligned}$$

二次项消去 V 的 ϕ^2 系数为 $\frac{1}{2}(nLg_1 - n'L'g_2) = \frac{r}{2}[n\frac{L+r}{L} - n'\frac{L'-r}{L'}] = \frac{r}{2}[(n-n') + r(\frac{n}{L} + \frac{n'}{L'})] = 0$, 最后一步用了成像公式。这就是“近轴像点”的含义：在 I' 处，波前到二阶是严格的球面。

四次项 ϕ^4 系数中， $-\frac{1}{24}(nLg_1 - n'L'g_2)$ 同样为零，剩下

$$\begin{aligned} V(\phi) - V(0) &= -\frac{\phi^4}{8}(nLg_1^2 + n'L'g_2^2) \\ &= -\frac{r^2\phi^4}{8}\left[\frac{n(L+r)^2}{L^3} + \frac{n'(L'-r)^2}{L'^3}\right]. \end{aligned}$$

四阶精度下 $\phi^4 = Y^4/r^4$ ，于是

$$W(Y) = \frac{Y^4}{8r^2}\left[\frac{n(L+r)^2}{L^3} + \frac{n'(L'-r)^2}{L'^3}\right].$$

化为 Welford 形式 边缘光线 $u = Y/L$ ($= -Y/l$), $u' = -Y/L'$, 折射不变量 $A = n(u + Yc) = nY(L+r)/(Lr)$, 折射前后相等, 即 $n(L+r)/L = n'(L'-r)/L' \equiv \hat{A}$. 于是方括号 $= \hat{A}^2[1/(nL) + 1/(n'L')]$, 而 $\Delta(u/n) = u'/n' - u/n = -Y[1/(n'L') + 1/(nL)]$, $A = Y\hat{A}/r$. 所以

$$W(Y) = -\frac{1}{8}A^2Y\Delta\left(\frac{u}{n}\right),$$

在光瞳边缘 $Y = y$ 处即 $W_{040} = S_I/8$, $S_I = -A^2y\Delta(u/n)$, 这就是式 (5.8)。(虚物、虚像、凹面等情形由解析延拓给出同一公式; `verify_sympy.py` 对一般 n, n', L, L' 直接展开核对。)

B 薄透镜赛德尔和的推导

空气中薄透镜, 两面曲率 c_1, c_2 , 玻璃折射率 n , 两面上边缘光线高度都是 y , 光阑在透镜处 ($\bar{y} = 0$)。用 φ, q, p 表示:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(q+1)\varphi}{2(n-1)}, & c_2 &= \frac{(q-1)\varphi}{2(n-1)}, \\ u &= \frac{(p+1)y\varphi}{2}, & u' &= \frac{(p-1)y\varphi}{2}. \end{aligned}$$

(后两式由 $p = (u + u')/(u - u')$ 与 $u - u' = y\varphi$ 解出。) 透镜内部的斜率由第一面的折射公式 $nu'_1 = u - yc_1(n-1)$ 得 $u'_1 = y\varphi(p-q)/(2n)$ 。各面所需的量:

$$\text{第一面: } A_1 = u + yc_1,$$

$$\Delta_1 \equiv \Delta(u/n)_1 = \frac{u'_1}{n} - u,$$

$$\text{第二面: } A_2 = n(u'_1 + yc_2),$$

$$\Delta_2 \equiv \Delta(u/n)_2 = u' - \frac{u'_1}{n}.$$

球差 $S_I = -y(A_1^2\Delta_1 + A_2^2\Delta_2)$ 。把上面各式代入后, 这是 q, p 的二次多项式乘 $y^4\varphi^3$, 按 q^2, qp, p^2 与常数项整理即得式 (5.14) 第一行 (`verify_sympy.py` 逐项核对)。

彗差 主光线过透镜中心, $\bar{y} = 0$, 所以 $\bar{A}_1 = \bar{u}$, 透镜内 $\bar{u}'_1 = \bar{u}/n$, $\bar{A}_2 = n\bar{u}'_1 = \bar{u}$. 于是 $S_{II} = -\bar{u}y(A_1\Delta_1 + A_2\Delta_2)$, $H = \bar{u}y$, 整理得式 (5.14) 第二行。

像散 $S_{III} = -\bar{u}^2 y (\Delta_1 + \Delta_2) = -\bar{u}^2 y (u' - u) = \bar{u}^2 y^2 \varphi = H^2 \varphi$: 与 q 、 p 无关是因为 $\bar{A}_1 = \bar{A}_2$, 两面的贡献只通过 $\Delta_1 + \Delta_2 = u' - u$ 出现。

Petzval 与畸变 $S_{IV} = -H^2 [c_1(1/n-1) + c_2(1-1/n)] = H^2 \varphi/n$. $S_V = \sum_j (\bar{A}_j/A_j)(S_{III,j} + S_{IV,j})$, 代入后两面贡献相消, $S_V = 0$ (sympy 核对); 物理原因是主光线过薄透镜中心不偏折, 与平的物面、像面相交, 像高严格正比于物高。

C RMS 波像差与最佳焦面的积分

光瞳平均 对圆形光瞳上均匀照明, 按面积平均: $\langle f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f \rho d\rho d\theta$. 对只依赖 ρ 的函数, $\langle f \rangle = \int_0^1 f \cdot 2\rho d\rho$, 于是 $\langle \rho^{2m} \rangle = 1/(m+1)$. 环形光瞳 $\epsilon \leq \rho \leq 1$: 权重 $2\rho/(1-\epsilon^2)$, $\langle \rho^{2m} \rangle = (1-\epsilon^{2m+2})/[(m+1)(1-\epsilon^2)]$.

方差 波前的方均根起伏定义为 $\sigma_W^2 = \langle W^2 \rangle - \langle W \rangle^2$ (扣除平均值, 即活塞项不影响像质)。对 $W = W_{040}(\rho^4 - \beta\rho^2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_W^2}{W_{040}^2} &= \langle \rho^8 \rangle - 2\beta \langle \rho^6 \rangle + \beta^2 \langle \rho^4 \rangle \\ &\quad - (\langle \rho^4 \rangle - \beta \langle \rho^2 \rangle)^2 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{\beta}{2} \right)^2 \\ &= \frac{4}{45} - \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12}. \end{aligned}$$

对 β 求导为零得 $\beta = 1$, $\sigma_W^2 = W_{040}^2/180$, $\sigma_W = W_{040}/(6\sqrt{5})$ 。一般地, 最佳离焦与活塞项就是用 $\{1, \rho^2\}$ 对 ρ^4 作 (以光瞳面积为权重的) 最小二乘, 剩余方差为 $\text{Var}(\rho^4) - \text{Cov}(\rho^4, \rho^2)^2 / \text{Var}(\rho^2)$, 这就是例题 1 第 (5) 问所用的公式。

RMS 光斑 光线的径向横向像差 $\varepsilon_r = -kW_{040}(4\rho^3 - 2\beta\rho)$, 与 θ 无关, 光斑质心在原点。

$$\begin{aligned} \frac{\langle \varepsilon_r^2 \rangle}{(kW_{040})^2} &= \langle 16\rho^6 - 16\beta\rho^4 + 4\beta^2\rho^2 \rangle \\ &= 4 - \frac{16}{3}\beta + 2\beta^2, \end{aligned}$$

极小在 $\beta = 4/3$ 。

D RC 圆锥常数的推导

本附录用第 5.3 节的逐面公式 (5.11)、(5.12) 推出式 (7.5)。每一步都已用 sympy 符号核对 (脚本见 VERIFY.md)。

几何 主镜焦距 f_1 (凹面, $c_1 = -1/(2f_1)$), 光阑在主镜上, 边缘光线高度 $y_1 = a$ 。副镜放在离主镜 D 处, 最终焦点在主镜顶点后 βf_1 处。副镜把会聚向主镜焦点 F_1 的光束 (虚物在副镜后 $f_1 - D$

处) 成像到离副镜 $D + \beta f_1$ 的焦点, 横向放大率

$$m = \frac{D + \beta f_1}{f_1 - D} \Rightarrow$$

$$D = f_1 \frac{m - \beta}{m + 1}, \quad f_1 - D = f_1 \frac{1 + \beta}{m + 1}.$$

近轴光线数据 按本讲约定, 反射后 $n' = -n$ 。

- 主镜: 入射 $u = 0$, $n = 1 \rightarrow n' = -1$ 。由式 (3.4), $u'_1 = a/f_1$ 。转移距离为 $-D$, 得副镜处高度

$$y_2 = a \left(1 - \frac{D}{f_1} \right) = ka, \quad k \equiv \frac{1 + \beta}{m + 1}.$$

- 副镜: $n = -1 \rightarrow n' = 1$, 出射光会聚到 $D + \beta f_1$ 处, $u'_2 = -y_2/(D + \beta f_1)$ 。由式 (3.4) 解出副镜曲率

$$c_2 = \frac{1 - m^2}{2f_1 m(1 + \beta)} \quad (\text{凸面}).$$

- 主光线 (视场角 θ): 过主镜中心, $\bar{y}_1 = 0$, 反射后斜率 $-\theta$, 到副镜处高度 $\bar{y}_2 = D\theta$ 。拉格朗日不变量 $H = a\theta$ 。

四个赛德尔和 把上面的数据代入式 (5.11), 再加上式 (5.12) 的圆锥项 ($\Delta n = \mp 2$)。逐项整理得

$$S_I^{(1)} = \frac{a^4}{4f_1^3} (\kappa_1 + 1),$$

$$S_I^{(2)} = -\frac{a^4}{4f_1^3} \cdot \frac{(1 + \beta)(m - 1)^3}{m^3(m + 1)} \times \left[\kappa_2 + \left(\frac{m + 1}{m - 1} \right)^2 \right],$$

$$S_{II}^{(1)} = -\frac{a^3\theta}{2f_1^2},$$

$$S_{II}^{(2)} = -\frac{a^3\theta}{4f_1^2} \cdot \frac{m - 1}{m^3(m + 1)} \times \left[\kappa_2(m - 1)^2(m - \beta) - (m + 1)^2(m + \beta) \right].$$

几个检查:

- 主镜的 $S_I^{(1)}$ 在 $\kappa_1 = -1$ (抛物面) 时为零, 与第 5.1 节一致; $\kappa_1 = 0$ 时为 $a^4/(4f_1^3) \cdot 1 = 8 \times a^4/(32f_1^3)$, 即 $W_{040} = a^4/(32f_1^3)$, 与式 (5.4) 一致。
- 主镜的彗差 $S_{II}^{(1)}$ 与 κ_1 无关 (主镜在光阑上), 对应 $W_{131} = -a^3\theta/(4f_1^2)$, 就是第 5.2 节求得的抛物面镜彗差。
- 副镜的方括号说明: $\kappa_2 = -[(m + 1)/(m - 1)]^2$ 时副镜自身无球差, 这就是经典卡塞格林的副镜。

解方程 先由 $S_{\text{II}}^{(1)} + S_{\text{II}}^{(2)} = 0$:

$$\begin{aligned} (m-1) \left[\kappa_2(m-1)^2(m-\beta) - (m+1)^2(m+\beta) \right] \\ = -2m^3(m+1). \end{aligned}$$

解出 $\kappa_2(m-1)^3(m-\beta) = (m+1)^2(m+\beta)(m-1) - 2m^3(m+1)$ 。右边等于 $-(m+1)^2(m-1)(m-\beta) - 2m(m+1)$: 两者之差为 $(m+1)^2(m-1) \cdot 2m - 2m^3(m+1) + 2m(m+1) = 2m(m+1)[(m+1)(m-1) - m^2 + 1] = 0$ 。于是

$$\kappa_2 = -\left(\frac{m+1}{m-1}\right)^2 - \frac{2m(m+1)}{(m-\beta)(m-1)^3}.$$

再由 $S_{\text{I}}^{(1)} + S_{\text{I}}^{(2)} = 0$, 并利用上式 $\kappa_2 + [(m+1)/(m-1)]^2 = -2m(m+1)/[(m-\beta)(m-1)^3]$:

$$\begin{aligned} \kappa_1 + 1 &= \frac{(1+\beta)(m-1)^3}{m^3(m+1)} \cdot \left[-\frac{2m(m+1)}{(m-\beta)(m-1)^3} \right] \\ &= -\frac{2(1+\beta)}{m^2(m-\beta)}. \end{aligned}$$

这就是式 (7.5)。RC 的主镜比抛物面略“更双曲” ($\kappa_1 < -1$): 主镜带一点过校正的球差, 由副镜相应地少校正一点来补偿。两者的球差在轴上抵消, 而副镜 (不在光阑上) 的球差经光阑移动生出的彗差, 恰好抵消主镜的彗差。

E 加权最小二乘

数据 (x_i, y_i) , y_i 的标准不确定度 σ_i , 模型 $y = a + bx$ 。使

$$\begin{aligned} \chi^2(a, b) &= \sum_i w_i (y_i - a - bx_i)^2, \\ w_i &= 1/\sigma_i^2 \end{aligned}$$

最小。令 $\partial\chi^2/\partial a = \partial\chi^2/\partial b = 0$, 记 $S = \sum w_i$, $S_x = \sum w_i x_i$, $S_y = \sum w_i y_i$, $S_{xx} = \sum w_i x_i^2$, $S_{xy} = \sum w_i x_i y_i$, $\Delta = SS_{xx} - S_x^2$, 得

$$\begin{aligned} a &= \frac{S_{xx}S_y - S_xS_{xy}}{\Delta}, \\ b &= \frac{SS_{xy} - S_xS_y}{\Delta}. \end{aligned}$$

a 、 b 是 y_i 的线性组合, 按误差传递,

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \frac{S_{xx}}{\Delta}, \\ \sigma_b^2 &= \frac{S}{\Delta}, \\ \text{cov}(a, b) &= -\frac{S_x}{\Delta}. \end{aligned}$$

若 σ_i 估计正确, χ^2 的期望值为自由度 $N_f = N - 2$; χ^2/N_f 明显大于 1 说明模型不全或误差低估。多参数模型 $y = \sum_j c_j f_j(x)$ 的写法相同: 设计矩阵 $X_{ij} = f_j(x_i)$, 权矩阵 $\mathbf{W} = \text{diag}(w_i)$, $\mathbf{c} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{y}$, 协方差矩阵 $(\mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1}$ 。实验题中 $x = r^2$ 。